Lösningar tenta Sannolikhetsteori I 2024-12-12

1 (a) $X \sim \text{Likf}[0,5]$. Då kontinuerlig gäller $\mathbb{P}(X=x)=0$ för varje x, samt då $[4,5]$ utgör en femtedel av $[0,5]$ gäller $\mathbb{P}(X \in [4,5]) = \frac{1}{5}$. 2p

$\boxed{\text{Svar: (ii)}}$

(b) Då det totala antalet lotter är stort är det rimligt att anta att inköpta lotter ger vinst oberoende av varandra med sannolikhet $1/5$. Därmed $X \sim \text{Bin}(100, 1/5)$, samt

$$\mathbb{E}[X] = 20 \qquad \text{Var}(X) = 100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 16$$

Vidare ger Centrala gränsvärdessatsen att

$$\mathbb{P}(X \geq 30) = \mathbb{P}\left(\frac{X-20}{4} \geq 2.5\right) \approx 1 - \Phi(2.5)$$

Tabell ger $\Phi(2.5) \approx 0.9938$. Därmed 3p

$$\mathbb{P}(X \geq 30) \approx 0.0062.$$

$\boxed{\text{Svar: (iii)}}$

2 Marginaltätheten för Y ges för $y \in [-1,1]$ av

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \\ &= \int_0^1 x(y+1)\,dx \\ &= (y+1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \boxed{\frac{y+1}{2}}. \end{aligned}$$

Vi får väntevärdet av en kontinuerlig variabel

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (y^2+y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\right] = \boxed{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

5p

3

Låt A = { olika färg }. Då varje urval är lika sannolikt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\,\text{gynnsamma}}{\#\,\text{urval totalt}}.$$

2p

Det totala antalet urval är $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$

Gynnsamma urval består av en från var färg. Då vi har 3 val av röd och blå, och 4 av grön blir antalet gynnsamma urval $3\cdot 3\cdot 4 = 36$. Därmed

3p

$$\mathbb{P}(\text{alla olika}) = \frac{36}{120} = \boxed{\frac{3}{10}}.$$

4

Variablerna anger vektorer av längd n med observationer från olika fördelningar, vilken för

A	är	likf [0,8]	n=10
B	är	N(4,4)	n=1000
C	är	exp(1)	n=100
D	är	Bin(8, 0.85)	n=10 000

B och D innehåller båda ett stort antal observationer, så histogram över dessa borde båda följa täthet- resp. mass-funktion nära. Dessa skulle uppvisa en topp vid 4 resp. $8\cdot 0.85 = 6.8$. Ingen av figurerna uppvisar detta.

Istället uppvisar Fig 1 en skevhet mot höger som kännetecknar en exp-fördelning, och Fig 2 skulle mycket väl kunna uppvisa ett litet antal observationer från en likf [0.8] - fördelning.

5p

Svar:

Fig 1 visar C

Fig 2 visar A

$\boxed{5}$ Betrakta n oberoende komponenter och låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ange dess livslängder. Givet är att

$$\mathbb{P}(X_k > 60) = 0.99 \qquad \text{för alla } k.$$

Vi vill bestämma det maximala n så att

$$\mathbb{P}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > 60) \geq 0.9.$$ 5p

Då variabler oberoende gäller

$$\mathbb{P}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > 60) = \mathbb{P}(X_k > 60)^n = 0.99^n.$$

Vi får för

$n = 10$ ger $0.99^n \approx 0.904$

$n = 11$ ger $0.99^n \approx 0.895$

5p

Svar: $\boxed{n = 10}$.

$\boxed{6}$ (a) Vi har 3000 hushåll. Låt X ange antalet matbröd som ett givet hushåll köper en viss dag. Då gäller

$p_X(0) = 0.4 \qquad p_X(1) = 0.35 \qquad p_X(2) = 0.15 \qquad p_X(3) = 0.1$

vilket ger

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot 0.35 + 2 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.1 = \boxed{0.95}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 0.35 + 4 \cdot 0.15 + 9 \cdot 0.1 = 1.85$$ 4p

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \boxed{0.9475}$$

(b) För $k = 1, 2, \ldots, 3000$ låt X_k ange antalet köpta matbröd för hushåll k. Enligt uppgift kan variablerna antas oberoende. Centrala gränsvärdessatsen ger att behovet av matbröd $Y = \sum_{k=1}^{3000} X_k$ en given söndag uppfyller

$$\frac{Y - 3000 \cdot \mathbb{E}[X]}{\sqrt{3000 \cdot \mathrm{Var}(X)}} \quad \text{approx } N(0,1)\text{-fördelat.}$$ 2p

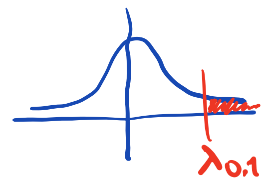
Mer specifikt får vi

$$P(Y \leq m) = P\left(\frac{Y - 3000 \cdot E[X]}{\sqrt{3000 \cdot Var(X)}} \leq \frac{m - 3000 \cdot E[X]}{\sqrt{3000 \cdot Var(X)}} \right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{m - 3000 \cdot E[X]}{\sqrt{3000 \cdot Var(X)}} \right)$$

2p

Vi vill bestämma det minsta m så att $P(Y \leq m) \geq 0.9$.
Ur tabell får vi $\Phi(\lambda_{0.1}) = 0.9$ där $\lambda_{0.1} \approx 1.2816$.

Detta ger

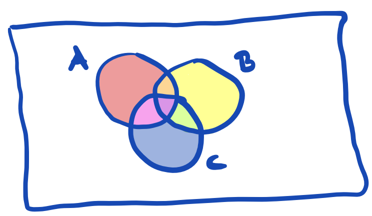


$$m \geq \lambda_{0.1} \cdot \sqrt{3000 \cdot Var(X)} + 3000\, E[X]$$
$$\approx 2918.32$$

Svar: $\boxed{\text{2919 matbröd}}$ behövs.

2p

7 Vi har tre oberoende händelser A, B, C.
Dessa kan visualiseras i ett Venndiagram.
Med given information är det möjligt att
beräkna var färgat område. Oberoendet ger:



● = $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.006$

● + ● = $P(A \cap C) = P(A)P(C) = 0.1 \cdot 0.3 = 0.03$

● + ● = $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$

● + ● = $P(B \cap C) = P(B)P(C) = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06$

● + ● + ● + ● = $P(A) = 0.1$

● + ● + ● + ● = $P(C) = 0.3$

● + ● + ● + ● = $P(B) = 0.2$

2p

Hur som helst resonerar vi nedan för var beräkning separat.

(a) Vi vill beräkna 3p

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = 1-\mathbb{P}(A^c\cap B^c\cap C^c)$$

$$\overset{\text{oberoende}}{=} 1-\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C^c) = 1-0.9\cdot 0.8\cdot 0.7 = \boxed{0.496}$$

(b) Vi vill beräkna + + :

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C^c)+\mathbb{P}(A\cap B^c\cap C)+\mathbb{P}(A^c\cap B\cap C)$$

$$\overset{\text{oberoende}}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C^c)+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

$$= 0.1\cdot 0.2\cdot 0.7 + 0.1\cdot 0.8\cdot 0.3 + 0.9\cdot 0.2\cdot 0.3 = \boxed{0.092}$$

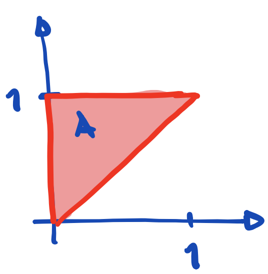
(c) Den betingade sannolikheten ges av

$$\mathbb{P}(A\mid A\cup B\cup C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap(A\cup B\cup C))}{\mathbb{P}(A\cup B\cup C)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A\cup B\cup C)}$$ 2p

$$= \frac{0.1}{0.496} \approx \boxed{0.2016}$$

8 (a) Täthetsfunktionen för (X,Y) är konstant på regionen A och ges av



$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{|A|} \quad \text{för } (x,y)\in A$$

där $|A| = 1/2$.

Marginalfördelningarna ges av

$$f_X(x) = \int_x^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy = [2y]_x^1 = \boxed{2(1-x)} \quad \text{för } 0\le x\le 1.$$

$$f_Y(y) = \int_0^y f_{X,Y}(x,y)\,dx = [2x]_0^y = \boxed{2y} \quad \text{för } 0\le y\le 1.$$

4p

(b) Väntevärden beräknas

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \int_0^1 2x(1-x)\,dx$$
$$= \left[x^2 - \tfrac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \tfrac{2}{3} = \boxed{\tfrac{1}{3}}$$
$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 2y^2\,dy = \left[\tfrac{2}{3}y^3\right]_0^1 = \boxed{\tfrac{2}{3}}$$

3p

(c) Kovariansen ges av formeln

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

där

$$\mathbb{E}[XY] = \iint_A xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1 y\left(\int_0^y 2x\,dx\right)dy$$
$$= \int_0^1 y\left[x^2\right]_0^y\,dy$$
$$= \int_0^1 y^3\,dy$$
$$= \left[\tfrac{y^4}{4}\right]_0^1 = \tfrac{1}{4}$$

3p

Vi får

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3} = \frac{9-8}{4\cdot 9} = \boxed{\tfrac{1}{36}}$$