

MT3001 – Sannolikhetssteori I – tentamen

Datum Fredag 21 februari, 2025

Examinator Daniel Ahlberg

Hjälpmedel Formelblad, normalfördelningstabell och miniräknare. Samtliga hjälpmedel delas ut vid tentan.

Bedömning Tentamen är indelad i en basdel och en betygsdel, vilka består av 20 respektive 40 poäng. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även betygsdelen, som bestämmer betyget. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen:

	A	B	C	D	E
Basdel	14	14	14	14	14
Betygsdel	32	24	16	8	0

Uppgifter på basdelen kan ge upp till fem poäng var, och uppgifter på betygsdelen kan ge upp till tio poäng var. Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Basdel

Uppgift 1. I följande flervalsfrågor finns ett rätt svar per fråga. Ange vilket. Motivering krävs ej i denna uppgift.

- (a) Låt (X, Y) vara en tvådimensionell stokastisk variabel med täthetsfunktion $f_{X,Y}(x, y) = x + y$ för $x \in [0, 1]$ och $y \in [0, 1]$. Vilket av följande gäller?
- (i) $\mathbb{E}[X] < \mathbb{E}[Y]$,
 - (ii) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$,
 - (iii) $\mathbb{E}[X] > \mathbb{E}[Y]$.
- (b) Låt (X, Y) vara en tvådimensionell slumpvariabel där både X och Y är heltalsvärda. Vilket av följande är alltid sant:
- (i) Om X och Y är oberoende, så är $p_{X,Y}(2, 2) = p_X(2)p_Y(2)$.
 - (ii) Om $p_{X,Y}(2, 2) = p_X(2)p_Y(2)$, så är X och Y oberoende.
 - (iii) Om X och Y är oberoende, så är $p_{X,Y}(2, 2) = p_X(2) + p_Y(2)$.
 - (iv) Om $p_{X,Y}(2, 2) = p_X(2) + p_Y(2)$, så är X och Y oberoende.

Uppgift 2. Låt X vara en kontinuerlig slumpvariabel med täthetsfunktion given av $f_X(x) = 1 - |x|$ för $-1 \leq x \leq 1$, och $f_X(x) = 0$ annars.

- (a) Bestäm sannolikheten för att $X \geq 1/2$.
- (b) Bestäm väntevärde och varians för X .

Uppgift 3. Utav två miljoner Trisslotter är 429 000 vinstlotter. Du köper 100 lotter. Uppskatta sannolikheten att du får minst 30 vinstlotter.

Uppgift 4. Studera nedanstående R-kod. Två utav variablerna A , B , C och D återges i Fig. 1 och Fig. 2. Avgör vilken variabel som genererat respektive histogram, samt motivera ditt svar.

```
set.seed(3)
A <- runif(n = 10, min = 0, max = 8)
B <- rnorm(n = 1000, mean = 4, sd = 2)
C <- rexp(n = 100, rate = 1)
D <- rbinom(n = 10000, size = 8, prob = 0.85)
```

Fig. 1

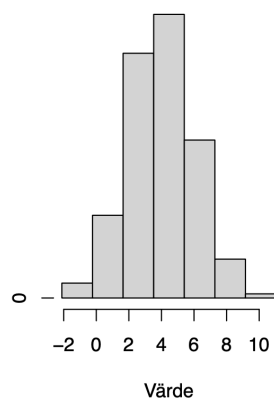
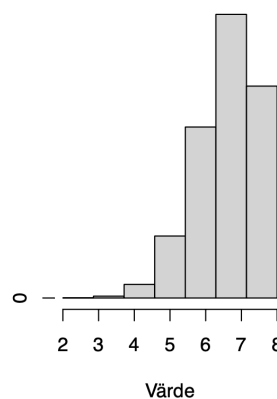


Fig. 2



Betygsdel

Uppgift 5. Vid tillverkning av en viss sorts keramiska plattor uppstår färgfel på en andel 0.05 av plattorna och bubblor i glasyren hos en andel 0.08. Andelen plattor som uppvisar både färgfel och bubblor i glasyren är 0.03.

- Bestäm sannolikheten att en slumpvis vald platta har minst en av de angivna defekterna.
- Avgör om defekterna 'färgfel' och 'bubblor i glasyren' uppstår oberoende eller ej.
- Bestäm sannolikheten att en slumpvis vald platta har precis en av de angivna defekterna.

Uppgift 6. En vanlig kortlek innehåller 52 kort fördelade på fyra färger. I var färg finns kort i valörerna 2, 3, ..., 10, knekt, dam, kung, ess. I spelet Poker så delas fem kort (kallad en *hand*) ut till vardera spelare.

- Var är sannolikheten att en spelare erhåller en hand med samtliga kort i samma färg?
- Vad är sannolikheten att en spelare erhåller en kåk, dvs tre kort av en valör och två av en annan?

Uppgift 7. En viss sjukdom antas finnas hos 1% av alla individer i en population. 20% av sjukdomsfallen är av den elakartade sorten, och kräver behandling. Ett diagnostiskt test, vilket resulterar i ett positivt eller negativt svar, har utvecklats för att detektera sjukdomen. Testets *sensitivitet* (sannolikhet att en sjuk individ får ett positivt svar) är 99.5% och dess *specificitet* (sannolikheten att en frisk person får ett negativt svar) är 97%. Testet kan dock ej diskriminera mellan elakartade och godartade fall, och dess sensitivitet är den samma i båda fallen. Bestäm sannolikheten för att en på måfå vald person som testas positivt behöver behandling mot sjukdomen.

Uppgift 8. Adam och Berit får i uppdrag att uppskatta vikten på tre föremål A , B och C . Till sitt förfogande har de en våg för vilken det är känt att mätfelet följer en normalfördelning med väntevärde $\mu = 0$ och standardavvikelse $\sigma = 1.5$ gram. De får lov att göra 30 mätningar var, och Adam mäter helt enkelt var föremål tio gånger vardera. Berit bestämmer sig däremot för att väga föremålen två och två, och väger $A + B$, $A + C$ och $B + C$ tio gånger vardera.

- (a) Adam skattar vikten på föremål A med medelvärdet av sina tio vägningar av A . Beteckna medelvärdet med $\bar{X}$ och bestäm fördelningen för $\bar{X}$.
- (b) Låt $\bar{Y}_{AB}$, $\bar{Y}_{AC}$ och $\bar{Y}_{BC}$ ange stickprovsmedelvärdena för Berits mätningar av $A + B$, $A + C$ och $B + C$. Berit väljer att skatta vikten på föremål A med $Z = \frac{1}{2}(\bar{Y}_{AB} + \bar{Y}_{AC} - \bar{Y}_{BC})$. Bestäm fördelningen för Z .
- (c) Avgör vem av Adam och Berit som erhåller bättre precision för vikten av A med sin mätmetod.