Tenta Sannolikhetsteori I 2025-02-21 lösningar

1 (a) Täthetsfunktionen är symmetrisk i x och y, så X och Y har samma fördelning. De har därmed lika väntevärden.

$\boxed{\text{Svar: (ii)}}$

(b) Två heltalsvärda slumpvariabler X och Y är oberoende omm

$$p_{X,Y}(k,\ell) = p_X(k)\,p_Y(\ell) \qquad \underline{\text{för alla}} \quad k,\ell \in \mathbb{Z}.$$

$\boxed{\text{Svar: (i)}}$

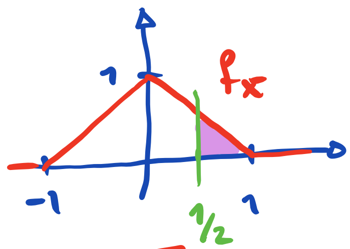
Ett rätt 2p
Två rätt 5p

2 (a) Då X kontinuerlig gäller

$$\mathbb{P}(X \geq 1/2) = \int_{1/2}^{\infty} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{1/2}^{1} (1-x)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \boxed{\frac{1}{8}}$$



2p

(b) Då täthet symmetrisk kring y-axeln är väntevärdet noll. Alternativt kan väntevärdet beräknas enligt

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x(1-|x|)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \boxed{0.}$$

Variansen ges av uttrycket $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$, där

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}$$

$$= -\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

3p

Därmed har vi $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] + 0 = \boxed{1/6}.$

3 Låt X ange antalet vinstlotter vid köp av 100 lotter.
Då gäller $X \sim Hyp(N, n, m)$ där

$$N = 2\,000\,000$$
$$n = 100$$
$$m = 429\,000$$

Då n är litet i förhållande till N så gäller approximativt
$$X \approx Bin(n, p)$$
där $p = m/N$. Då $np(1-p)$ stort kan normalapproximation användas, så att
$$\frac{X - E[X]}{\sqrt{Var(X)}} \approx N(0,1).$$

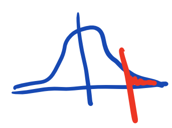
2p

Vi har ur formelblad
$$E[X] = np = 100 \cdot \frac{429}{2000} = 21{,}45$$
$$Var(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1} \approx 16{,}848$$

Vi får

3p

$$P(X \geq 30) \approx P\left(\frac{X - E[X]}{\sqrt{Var(X)}} \geq \frac{30 - 21{,}45}{\sqrt{16{,}848}}\right)$$
$$\approx 1 - \Phi(2{,}083)$$
$$\approx 1 - 0.9812 = \boxed{0.0188}$$


2.083

ur tabell

4 Koden genererar vektorer med slumptal från följande fördelningar:

A: Likf $[0,8]$ antal 10

B: $N(4,4)$ antal 1000

C: $\exp(1)$ antal 100

D: $Bin(8, 0.85)$ antal 10 000

2p

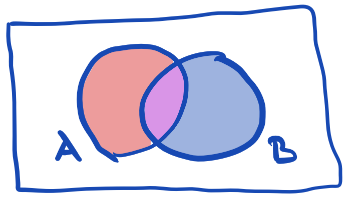
A och C kan uteslutas då dessa skulle ge ett platt resp. avtagande histogram. B har medelvärde 4, vilket stämmer med Fig 1. D har medelvärde $8 \cdot 0.85 = 6.8$, vilket stämmer med Fig 2. Formen på histogrammen överensstämmer även med normal- och binomialfördelningen.

3p

Svar: $\boxed{\text{Fig 1 : B} \quad \text{Fig 2 : D}}$

$\boxed{5}$ Drag en platta slumpvis och låt A ange händelsen att den har färgfel och B händelsen att den har bubblig glasyr. Enligt uppgift gäller

$$\mathbb{P}(A) = 0.05$$
$$\mathbb{P}(B) = 0.08$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.03$$



3p

(a) Efterfrågad sannolikhet ges av

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$= 0.05 + 0.08 - 0.03 = \boxed{0.01}$$

2p

(b) Om defekterna skulle uppstå oberoende av varandra så skulle de två händelserna A och B vara oberoende, dvs uppfylla

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

2p

Det är $\boxed{\text{inte}}$ fallet.

(c) Vi vill beräkna sannolikheten för unionen av de röda och blå händelserna i figuren ovan. Det kan göras på olika sätt. Tex gäller $\textcolor{red}{\bullet} = A \cap B^c$ samt

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$$

enl. lagen om total sannolikhet. Detta ger

$$\mathbb{P}(\textcolor{red}{\bullet}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.05 - 0.03 = 0.02.$$

3p

På samma sätt gäller $\textcolor{blue}{\bullet} = B \cap A^c$ och

$$\mathbb{P}(\textcolor{blue}{\bullet}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.08 - 0.03 = 0.05.$$

Då händelserna $\textcolor{red}{\bullet}$ och $\textcolor{blue}{\bullet}$ är disjunkta får vi

$$\mathbb{P}(\textcolor{red}{\bullet} \cup \textcolor{blue}{\bullet}) = \mathbb{P}(\textcolor{red}{\bullet}) + \mathbb{P}(\textcolor{blue}{\bullet}) = 0.02 + 0.05 = \boxed{0.07}.$$

6 (a) Då var hand kan anses lika sannolik så gäller

$$\mathbb{P}(\text{samma färg}) = \frac{\#\text{ händer i samma färg}}{\#\text{ händer totalt}}$$

2p

Det totala antalet händer är $\binom{52}{5}$.

Antalet händer med samtliga kort i samma färg är

$$\binom{4}{1}\binom{13}{5}$$

där den första faktorn anger antalet val av färg och andra anger antalet kombinationer av fem kort av de 13 av den färgen.

4p

Vi får

$$\mathbb{P}(\text{samma färg}) = \frac{4 \cdot \frac{13!}{5!\,8!}}{\frac{52!}{5!\,47!}} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \approx \boxed{0.00198}$$

(b) Även här gäller

$$\mathbb{P}(\text{kåk}) = \frac{\#\text{ händer med kåk}}{\#\text{ händer totalt}}$$

Antalet händer som ger kåk får till

$$\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2},$$

4p

där vi först valt valör för triss och tre kort ur den valören, och sedan valör för par och två kort ur den valören.

$$\mathbb{P}(\text{kåk}) = \frac{13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \cdot 5! \approx \boxed{0.00144}$$

7 Drag en person på måfå och låt

$F = \{\text{person frisk}\}$
$G = \{\text{sjuk, godartad}\}$
$E = \{\text{sjuk, elakartad}\}$

Notera att F, G, E utgör en partition av utfallsrummet och att

$$\mathbb{P}(F) = 0.99 \qquad \mathbb{P}(G) = 0.008 \qquad \mathbb{P}(E) = 0.002$$

Låt även

$+ = \{\text{test positivt}\}$

$- = \{\text{test negativt}\}$

5p

Det är givet att

$$\mathbb{P}(+\mid G) = \mathbb{P}(+\mid E) = 0.995$$

$$\mathbb{P}(-\mid F) = 0.97$$

Vi vill bestämma sannolikheten $\mathbb{P}(E\mid +)$. Bayes sats ger

$$\mathbb{P}(E\mid +) = \frac{\mathbb{P}(E\cap +)}{\mathbb{P}(+)} = \frac{\mathbb{P}(+\mid E)\,\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(+)}$$

Lagen om total sannolikhet ger vidare att

5p

$$\mathbb{P}(+) = \mathbb{P}(+\mid F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(+\mid G)\cdot\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(+\mid E)\mathbb{P}(E)$$

$$= 0.03\cdot 0.99 + 0.995\,(0.008+0.002) = 0.03965$$

Därmed

$$\mathbb{P}(E\mid +) = \frac{0.995\cdot 0.002}{0.03965} \approx \boxed{0.0502}$$

8 (a) Låt de faktiska vikterna av föremål A, B och C betecknas med m_A, m_B och m_C. Låt $X_1, \dots, X_{10}$ beteckna Adams tio vägningar av A. Enligt antagande gäller att de är $N(m_A, \sigma)$-fördelade, och kan vidare antas oberoende.

Då summan av oberoende normalfördelade är normalfördelad så är $\bar{X}$ normalfördelad med

$$\mathbb{E}[\bar{X}] = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}\mathbb{E}[X_k] = m_A$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{10}\mathrm{Var}(X_k) = \frac{\sigma^2}{10}$$

3p

Därmed är $\boxed{\bar{X} \sim N(m_A, \sigma^2/10).}$

(b) I likhet med resonemanget ovan gäller

$$\bar{Y}_{AB} \sim N(m_A + m_B,\ \sigma^2/10)$$
$$\bar{Y}_{AC} \sim N(m_A + m_C,\ \sigma^2/10)$$
$$\bar{Y}_{BC} \sim N(m_B + m_C,\ \sigma^2/10)$$

Då samtliga mätningar är oberoende är även Z normalfördelad med

4p

$$E[Z] = \frac{1}{2}\Big[E[\bar{Y}_{AB}] + E[\bar{Y}_{AC}] - E[\bar{Y}_{BC}]\Big] = m_A$$
$$Var(Z) = \frac{1}{4}\Big[Var(\bar{Y}_{AB}) + Var(\bar{Y}_{AC}) + Var(\bar{Y}_{BC})\Big] = \frac{3}{4}\cdot\frac{\sigma^2}{10}.$$

Dvs $\boxed{Z \sim N\left(m_A,\ \frac{3}{4}\cdot\sigma^2/10\right).}$

(c) Både Adam och Berit erhåller ett mätvärde med ett normalfördelat mätfel centrerat kring det samma värdet m_A. Spridningen (dvs. standardavvikelsen) i Adams mätfel är dock högre än i Beriths mätfel. Berit erhåller därmed sannolikt ett värde med mindre mätfel, och har således bättre precision. 3p