

MT3001 – Sannolikhetssteori I – tentamen

Datum Tisdag 28 oktober, 2025

Examinator Daniel Ahlberg

Hjälpmedel Formelblad, normalfördelningstabell och miniräknare. Samtliga hjälpmedel delas ut vid tentan.

Bedömning Tentamen är indelad i en basdel och en betygsdel, vilka består av 20 respektive 40 poäng. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även betygsdelen, som bestämmer betyget. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen:

	A	B	C	D	E
Basdel	14	14	14	14	14
Betygsdel	32	24	16	8	0

Uppgifter på basdelen kan ge upp till fem poäng var, och uppgifter på betygsdelen kan ge upp till tio poäng var. Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Basdel

Uppgift 1. Avgör vilka av följande funktioner som är täthetsfunktion för någon slumpvariabel.

- (i) $f(x) = x$ om $x \in [0, \sqrt{2}]$, och $f(x) = 0$ annars;
- (ii) $f(x) = \sqrt{x}$ om $x \geq 0$, och $f(x) = 0$ annars;
- (iii) $f(x) = 2x$ om $x \in [0, 1]$, och $f(x) = 0$ annars;
- (iv) $f(x) = 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

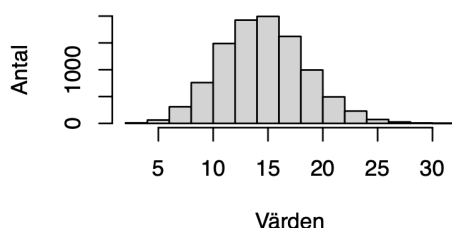
Uppgift 2. Låt (X, Y) vara en tvådimensionell slumpvektor med täthetsfunktion given av $f_{X,Y}(x, y) = x + y$ för $x \in [0, 1]$ och $y \in [0, 1]$. Bestäm väntevärdena av X och Y .

Uppgift 3. En vanlig kortlek innehåller 52 kort fördelade på de fyra färgerna hjärter, spader, ruter, klöver. I var färg finns kort i värdena 2, 3, ..., 10, knekt, dam, kung, ess. I spelet Black Jack så har korten 2 till 9 värde motsvarande deras valör, medan korten 10, knekt, dam och kung har värde 10, samt ess har värde 1 eller 11 (spelaren avgör). Två kort som tillsammans ger värde 21 kallas för *blackjack*. Bestäm sannolikheten att få blackjack då två kort dras från en välblandad kortlek.

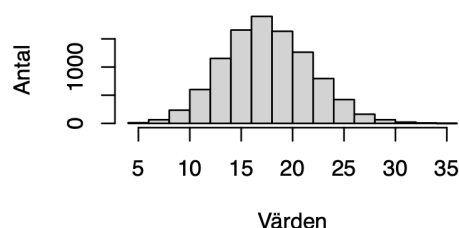
Uppgift 4. Studera nedanstående R-kod. Ange vilket histogram som koden genererar, samt motivera ditt svar.

```
set.seed(1)
X1 <- rpois(10000, 1)
X2 <- rpois(10000, 3)
X3 <- rpois(10000, 6)
X4 <- rpois(10000, 12)
hist(X1+X2)
```

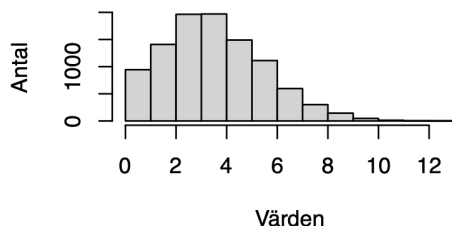
Histogram 1



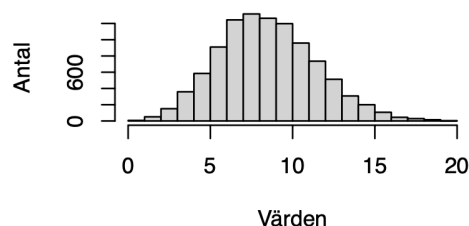
Histogram 2



Histogram 3



Histogram 4



Betygsdel

Uppgift 5. E-post servicen från ett visst företag använder ett spam-filter som analyserar förekomsten av vissa ord. Baserat på erfarenhet är 20% av inkomna e-brev spam. Ordet 'winner' förekommer i 40% av alla spam-brev, men enbart i 1% av icke-spam brev.

- Antag att du får ett e-brev som innehåller ordet 'winner'. Bestäm sannolikheten att det är ett spam-brev.
- Antag att ordet 'urgent' förekommer i 70% av alla spam-brev, och i 10% av alla icke-spam brev. Bestäm sannolikheten att ett e-brev är spam givet att det innehåller ordet 'urgent'.
- Diskutera huruvida orden 'winner' och 'urgent' är bra indikatorer för att ett e-brev är spam.

Kommentar: Ovanstående uppgift är föreslagen av ChatGPT.

Uppgift 6. En förvirrad groda hoppar fram och tillbaka längst en stig. Var sekund hoppar grodan 10 cm, antingen framåt eller bakåt, med lika sannolikhet. En timme senare börjar du och en vän söka efter grodan. Ni söker på så sätt att ni startar 10 meter, i motsatt riktning, från den punkt där grodan började sin irrfärd. Bestäm sannolikheten att ni finner grodan.

Uppgift 7. Tillverkaren av en elektrisk komponent betraktar två olika designval. I den ena designen består den elektriska komponenten av två delkomponenter kopplade i serie, och fungerar så länge de två delkomponenterna fungerar. I den andra designen består komponenten av två delkomponenter kopplade parallellt, och fungerar så länge någon av delkomponenterna fungerar. Oavsett design kan livslängderna för delkomponenterna antas vara oberoende och exponentialfördelade med väntevärde 1, mätt i enheten år.

- (a) Bestäm väntevärde och median för livslängden på komponenten enligt den första designen.
- (b) Bestäm väntevärde och median för livslängden på komponenten enligt den andra designen.

Uppgift 8. En urna innehåller 15 kulor, varav två röda, tre blåa och tio gröna. Drag tre kulor på måfå, utan återläggning.

- (a) Bestäm sannolikheten att få minst en röd kula.
- (b) Bestäm sannolikheten att alla kulor är blåa.
- (c) Bestäm sannolikheten att alla kulor har samma färg.