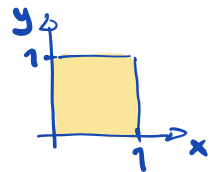


Basdel

- [1] En täthetsfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är icke-negativ och integrerar till 1. Detta stämmer för funktionerna i (i) och (iii), men ej för funktionerna i (ii) och (iv), vars integral ger oändligheten. 5p

- [2] (X, Y) är en kontinuerlig slumpvektor med täthet $f_{X,Y}(x,y) = x+y$ för $x,y \in [0,1]$.



På grund av symmetri har X och Y samma fördelning, och därmed även samma väntevärde. 2p

Marginalfördelningen blir

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 (x+y) dy = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 \\ &= x + \frac{1}{2} \quad \text{för } x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Därmed

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}. \end{aligned} \quad \text{3p}$$

Alltså $E[X] = E[Y] = 7/12$.

- [3] Drag två kort från en välblandad kortlek. Händelsen "blackjack" motsvaras av att ha fått ett ess samt ett kort med värde 10. I var drag är varje återstående kort lika sannolikt att bli draget, då kortlek välblandad.

Låt $A = \{\text{Första kort ess}\}$ och $B = \{\text{Första kort värde 10}\}$.

Lagen om total sannolikhet ger, där $C = (A \cup B)^c$,

$$\begin{aligned} P(\text{blackjack}) &= P(\text{blackjack} | A) P(A) \\ &\quad + P(\text{blackjack} | B) P(B) \\ &\quad + P(\text{blackjack} | C) P(C) \end{aligned}$$

Då alla utfall lika sannolika gäller

$$P(A) = \frac{\# \text{ ess}}{\# \text{ kort}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(B) = \frac{\# \{10, \text{knekt, dam, kung}\}}{\# \text{ kort}} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

$$P(bj | A) = \frac{16}{51}$$

$$P(bj | B) = \frac{4}{51}$$

$$P(bj | C) = 0.$$

5p

Vi får

$$P(\text{blackjack}) = \frac{16}{51} \cdot \frac{1}{13} + \frac{4}{51} \cdot \frac{4}{13} + 0 = \frac{32}{51 \cdot 13}.$$

4

Vardera av vektorerna X_1, X_2, X_3 och X_4 innehåller oberoende observationer från en Poisson-fördelning med olika parametervärden. Vektorn som skapas av summan av X_1 och X_2 oberoende observationer där var observation är summan av två oberoende observationer från en Poisson-fördelning.

För en Poisson-fördelning ges dess väntevärde av parametern, och då två slumpvariabler adderas så är väntevärdet av summan samma som summan av väntevärdena. Observationerna i $X_1 + X_2$ kommer därmed från en fördelning med väntevärde 4. (Faktiskt en $\text{Poi}(4)$ -fördelning.) Detta motsvaras av Histogram 3 då väntevärde motsvarar fördelningens jämvikt, vilken för histogrammet bör ligga kring värdet 4.

5p

Betygsedel

5 Vi inför följande notation:

$$S = \{\text{brev spam}\}$$

$$W = \{\text{brev innehåller ordet "winner"}\}$$

Enligt uppgift gäller för ett godtyckligt inkommande e-brev

$$P(S) = 0.2$$

$$P(W|S) = 0.4$$

$$P(W|S^c) = 0.01$$

3p

- (a) Vi vill beräkna sannolikheten $P(S|W)$. Med Bayes sats och lag om total sannolikhet får vi

$$\begin{aligned} P(S|W) &= \frac{P(W|S)P(S)}{P(W)} = \frac{P(W|S)P(S)}{P(W|S)P(S) + P(W|S^c)P(S^c)} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.4 \cdot 0.2 + 0.01 \cdot 0.8} = \frac{80}{88} = \frac{10}{11} \approx 0.909 \end{aligned}$$

3p

- (b) Låt $U = \{\text{brev innehåller "urgent"}\}$. Då gäller

$$P(U|S) = 0.7$$

$$P(U|S^c) = 0.1$$

som tidigare för vi

$$\begin{aligned} P(S|U) &= \frac{P(U|S)P(S)}{P(U|S)P(S) + P(U|S^c)P(S^c)} \\ &= \frac{0.7 \cdot 0.2}{0.7 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11} \approx 0.636 \end{aligned}$$

2p

- (c) Förekomsten av ordet "winner" höjer sannolikheten att ett e-brev är spam från 0.2 till 0.9, och kan då anses ge en god indikation på spam. Ordet "urgent" höjer även den sannolikheten för spam något, från 0.2 till 0.6, men är en sämre indikator än "winner".

2p

6

Vi kan representera stegen som grodan hoppar längs med den reella tallinjen. I var steg hoppar grodan ± 10 cm. Låt

$$X_k = \begin{cases} 10 & \text{med samma } 1/2 \\ -10 & \text{--- " --- } 1/2 \end{cases}$$

representera grodans hopp i steg k , och anta att $X_1, X_2, \dots$ är oberoende. Grodans position, mätt i cm från utgångspositionen, ges då efter n sekunder av

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

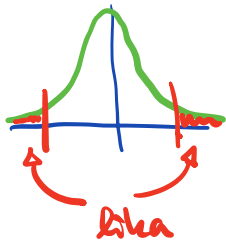
Då det går 3600 sekunder på en timma och 100 cm på en meter, så söker vi

$$\mathbb{P}(|S_{3600}| \leq 1000).$$

5p

Vi har $\mathbb{E}[X_k] = 0$ och $\text{D}(X_k) = \sqrt{\text{Var}(X_k)} = \sqrt{10^2} = 10$. Centrala gränsvärdesatsen ger därmed att

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_{3600}| \leq 1000) &= \mathbb{P}(-1000 \leq S_{3600} \leq 1000) \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{1000}{10\sqrt{3600}} \leq \frac{S_{3600}}{10\sqrt{3600}} \leq \frac{1000}{10\sqrt{3600}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{1000}{600}\right) - \Phi\left(\frac{-1000}{600}\right) \\ &= 2\Phi(5/3) - 1. \end{aligned}$$



Då $5/3 \approx 1.67$ får vi från tabell att $\Phi(1.67) \approx 0.9525$ och därmed att

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{finna grodan}) &\approx 2\Phi(1.67) - 1 \\ &\approx 2 \cdot 0.9525 - 1 \\ &= 0.905. \end{aligned}$$

5p

7

Två designval (i) 

(ii) 

Låt X och Y ange livslängd på de två delkomponenterna.
Enligt antagande gäller $X, Y \sim \text{exp}(1)$ och oberoende.

(a) Livslängd enligt design (i) ges av

$$T = \min\{X, Y\}.$$

Vi har

$$\begin{aligned} F_T(x) &= 1 - P(T > x) = 1 - P(X > x)P(Y > x) \\ &= 1 - e^{-x} \cdot e^{-x} = 1 - e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$F_X(x) = F_Y(x) = 1 - e^{-x}$$

Vi ser att $T \sim \text{exp}(2)$ och därmed har $E[T] = \frac{1}{2}$.

Vi finner median av T som det värde m så att

$$\begin{aligned} F_T(m) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-2m} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \cdot \ln 2. \end{aligned}$$

5p

(b) Livslängd med design (ii) ges av

$$U = \max\{X, Y\}.$$

Vi har

$$\begin{aligned} F_U(x) &= P(U \leq x) = P(X \leq x)P(Y \leq x) \\ &= (1 - e^{-x})^2. \end{aligned}$$

Median för U ges av m så att

$$\begin{aligned} F_U(m) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-m} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow m = \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \end{aligned}$$

5p

Täthet för U ges av derivering

$$f_U(x) = F'_U(x) = 2(1 - e^{-x})e^{-x} = 2(e^{-x} - e^{-2x}).$$

Därmed

$$\begin{aligned} E[U] &= \int_0^\infty x f_U(x) dx = 2 \int_0^\infty x e^{-x} dx - \int_0^\infty x 2e^{-2x} dx \\ &= 2E[X] - E[T] = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

8] Då kulorna dras på måfå är alla möjliga utfall lika sannolika. Vi får att följande formel gäller:

$$P(A) = \frac{\# \text{ gynnsamma}}{\# \text{ totalt}}.$$

2p

- (a) Det är möjligt att notera att antalet röda kulor som dras följer en hypergeometrisk fördelning, då utan återläggning. Hur ser helst

$$\begin{aligned} P(\text{minst en röd}) &= 1 - P(\text{ingen röd}) \\ &= 1 - \frac{\binom{2}{0} \binom{13}{3}}{\binom{15}{3}} \quad \leftarrow \text{antal val utan röda} \\ &\quad \leftarrow \text{antal val totalt} \\ &= 1 - \frac{15 \cdot 12 \cdot 11}{15 \cdot 14 \cdot 13} \approx 0.371 \end{aligned}$$

3p

(b)
$$P(\text{alla blåa}) = \frac{\binom{2}{0} \binom{3}{3} \binom{10}{0}}{\binom{15}{3}} = \frac{3}{15 \cdot 14 \cdot 13} \approx 0.00110$$

2p

- (c) Då det bara finns två röda så kan ej tre röda dras. Vi får därför att

$$\begin{aligned} P(\text{alla lika}) &= P(\text{alla blåa}) + P(\text{alla gröna}) \\ &= \frac{\binom{3}{3}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} \\ &= \frac{3}{15 \cdot 14 \cdot 13} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{15 \cdot 14 \cdot 13} \approx 0.265 \end{aligned}$$

3p