

MT3001 – Sannolikhetssteori I – tentamen

Datum Torsdag 4 december, 2025

Examinator Daniel Ahlberg

Hjälpmedel Formelblad, normalfördelningstabell och miniräknare. Samtliga hjälpmedel delas ut vid tentan.

Bedömning Tentamen är indelad i en basdel och en betygsdel, vilka består av 20 respektive 40 poäng. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även betygsdelen, som bestämmer betyget. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen:

	A	B	C	D	E
Basdel	14	14	14	14	14
Betygsdel	32	24	16	8	0

Uppgifter på basdelen kan ge upp till fem poäng var, och uppgifter på betygsdelen kan ge upp till tio poäng var. Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Basdel

Uppgift 1. Låt A, B, C vara parvis disjunkta händelser, där $\mathbb{P}(A) = 0.2$, $\mathbb{P}(B) = 0.35$ och $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 0.9$.

- (a) Beräkna sannolikheten $\mathbb{P}(C)$.
- (b) Antag vidare att D är en händelse sådan att $D \subseteq A \cup B \cup C$, samt $\mathbb{P}(D \cap A) = 0.1$, $\mathbb{P}(D \cap B) = 0.15$ och $D \cap C = \emptyset$. Bestäm $\mathbb{P}(D)$.

Uppgift 2. Låt X och Y vara oberoende och likformigt fördelade slumpvariabler på intervallet $[0, 1]$. Låt $m = \min\{X, Y\}$ samt $M = \max\{X, Y\}$.

- (a) Bestäm fördelningsfunktionen för m respektive M .
- (b) Beräkna sannolikheten $\mathbb{P}(m \leq 0.5 < M)$.

Uppgift 3. Låt $X_1, X_2, \dots$ vara en följd av oberoende och likafördelade slumpvariabler med väntevärde 10 och varians 4. Definiera stickprovsmedelvärdet för de n första observationerna som $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

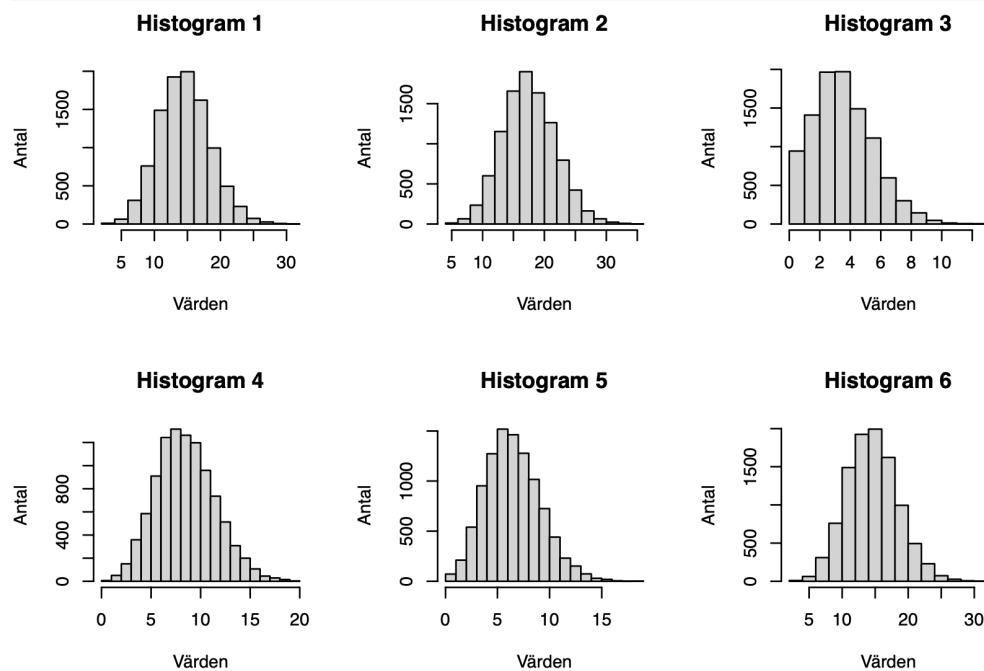
- (a) Formulera centrala gränsvärdessatsen i termer av $\bar{X}_n$.
- (b) Beräkna approximativt sannolikheten $\mathbb{P}(\bar{X}_{100} \leq 9.5)$.

Uppgift 4. Studera nedanstående R-kod. Ange vilket histogram som variabeln `sample` ger upphov till, samt motivera ditt svar.

```
X_1 <- rpois(10000, 1)
X_2 <- rpois(10000, 2)
X_3 <- rpois(10000, 4)
X_4 <- rpois(10000, 8)

get_sample <- function(integer){
  if (integer == 2){return(X_1 + X_2)}
  if (integer == 3){return(X_2 + X_3)}
  else {return(X_3 + X_4)}
}

sample <- get_sample(3)
```



Betygsdel

Uppgift 5. Inom en viss branch finns två utbildningsprogram A och B. En rekryterare är av uppfattningen att andelen högpresterande studenter är högre inom program B än inom program A. En nyligen utförd undersökning visar i själva verket att 80% av studenterna är högpresterande inom båda programmen. Dock kommer 60% av alla nyexaminerade studenter från program B.

- Betrakta en nyexaminerad student utvald på måfå. Bestäm sannolikheten att hen är högpresterande.
- Givet att den valda studenten är högpresterande, bestäm den betingade sannolikheten att hen kommer från program A.
- Diskutera huruvida rekryterarens uppfattning är felaktig, och vad det i så fall skulle kunna bero på.

Uppgift 6. Låt A ange den region i planet som innesluts av kvadraten med hörn i punkterna $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ samt $(0,-1)$. Låt (X,Y) vara en slumpvektor vars fördelning är likformigt fördelad på A .

- (a) Bestäm den simultana täthetsfunktionen för (X,Y) .
- (b) Bestäm väntevärde och varians för X .
- (c) Bestäm kovariansen mellan X och Y .

Uppgift 7. En vanlig kortlek består av 52 kort fördelade på fyra färger och 13 valörer. (Samma 13 valörer återkommer i var och en av de fyra färgerna.) Drag fem kort från en välblandad kortlek.

- (a) Beräkna sannolikheten att du får precis ett par, dvs två kort i samma valör och övriga kort av andra valörer.
- (b) Bestäm sannolikheten att du får "dubbelpar eller bättre", dvs två olika valörer med minst två kort i vardera valör.
- (c) Givet att du får dubbelpar eller bättre, räkna ut den betingade sannolikheten för att du får tre kort i samma valör.

Uppgift 8. Låt $X_1, X_2, \dots$ vara oberoende och likafördelade slumpvariabler med väntevärde μ och varians σ^2 . För $n \geq 1$ låt

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{X_k - \mu}{\sigma}.$$

- (a) Avgör vilka av följande påståenden som är sanna. Motivera ditt svar.
 - (i) För stora n , oavsett fördelning på X_k variablerna, så kommer Z_n vara approximativt normalfördelad.
 - (ii) Då X_k variablerna följer en symmetrisk fördelning så kommer Z_n vara exakt normalfördelad då n är stort.
- (b) Givet heltal n och m , betrakta två histogram där det ena är genererat från m oberoende observationer fördelade som Z_n , och det andra är genererat från m oberoende observationer från en standard normalfördelning. På vilket sätt påverkar n och m likheten mellan de två histogrammen?