

Lösningar tenta 260211 - sannolikhets teori I

- 1 X anger värdet av två dragna marker, utan återläggning.
 X kan anta värden 2, 3, 4, 5, beroende på val av marker.
Var val är lika sannolikt, vilket ger:

$$P(A) = \frac{\# \text{ gynnsamma}}{\# \text{ totalt}}$$

$$\text{Antal val ges av } \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36.$$

$$P(X=2) = P(\text{två marker värde 1}) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned} P(X=3) &= P(\text{en värde 1, en värde 2}) \\ &= \frac{\binom{6}{1}\binom{2}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=4) &= P(\text{två värde två}) + P(\text{en värde 1, en värde 3}) \\ &= \frac{\binom{2}{2} + \binom{6}{1}\binom{1}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{1+6}{36} = \frac{7}{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=5) &= P(\text{en värde 2, en värde 3}) \\ &= \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

5p

Väntevärdet ges nu av

$$E[X] = \frac{1}{36} (2 \cdot 15 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 2) = \frac{104}{36} = \boxed{\frac{26}{9}}$$

[2]

Låt $X_1, X_2, \dots, X_{75}$ ange vikt på de äpplen som packas i en viss påse. Enl. uppgift gäller

$$X_k \sim N(140, 30^2).$$

De samman av oberoende normalfördelade på nytt är normalfördelade gäller för $Y = X_1 + \dots + X_{75}$ att

$$Y \sim N(140 \cdot 75, 30^2 \cdot 75).$$

2p

Dåra

$$P(Y \leq 10000) = P\left(\underbrace{\frac{Y - 140 \cdot 75}{30 \cdot \sqrt{75}}}_{\sim N(0,1)} \leq \underbrace{\frac{10000 - 140 \cdot 75}{30 \cdot \sqrt{75}}}_{\approx -1.92}\right) \approx \Phi(-1.92)$$

Tabell ger $\Phi(-1.92) = 1 - \Phi(1.92) \approx 1 - 0.9726 = 0.0274$ 3p

Svar: 0.0274.

[3]

Låt X, Y ange livslängd för delkomponenter. Dessa är oberoende $\exp(1)$ -fördelade. Låt $Z = \min\{X, Y\}$, vilken då anger kretsens livslängd.

$$P(Z > t) = \overset{\text{oberoende}}{P(X > t)P(Y > t)} = e^{-t} \cdot e^{-t} = e^{-2t} \quad t > 0.$$

Vi ser att Z är på nytt $\exp$ -fördelad med väntevärde $1/2$.

5p

[4]

Koden genererar N slumptal från en binomialfördelning med parametrar n och p . Väntevärde för dessa är $n \cdot p = 2$. Dessa slumptal genererar sedan en vektor m som på position k anger medelvärdet av de k första slumptaken. Dessa konvergerar enligt Stora talens lag mot dess medelvärde som är 2. Detta upprättas i Figur 1, som är svaret.

5p

5 (a) Drag en avokado på måfå. Låt

$H = \{ \text{avokado ätbar} \}$

$A = \{ \text{från land A} \}$

$B = \{ \text{från land B} \}$

Från uppgift gäller

$$P(A) = 0.4$$

$$P(H|A) = 0.8$$

$$P(B) = 0.6$$

$$P(H|B) = 0.8$$

5p

Vi får från lagen om total sannolikhet

$$P(H) = P(H|A)P(A) + P(H|B)P(B) = \boxed{0.8}.$$

(b) Bayes sats ger

$$P(A|H) = \frac{P(H|A)P(A)}{P(H)} = \frac{0.8}{0.8} P(A) = \boxed{0.4}. \quad 2p$$

(c) Undersökningen som nyligen utförts visar att inköparen har fel - andelen ätbara avokado är lika från de två ursprungsländerna. Dock har land B en större marknadsandel, vilket gör att bland ätbara avokado är det en högre andel som kommer från land B, vilket svarar på (b) visar. Inköparen har sannolikt träffat fler ätbara från land B och felaktigt fått intrycket att andelen ätbara där är högre. 3p

6 (a) vi bestämmer

$$\begin{aligned}F_M(x) &= P(M \leq x) = 1 - P(M > x) \\&= 1 - P(X > x, Y > x) \\&= 1 - P(X > x)P(Y > x) = 1 - (1-x)^2 = \boxed{2x - x^2}.\end{aligned}$$

$$P(X > x) = \int_x^1 dz = 1 - x$$

$$\begin{aligned}F_M(x) &= P(M \leq x) = P(X \leq x, Y \leq x) \\&= P(X \leq x)P(Y \leq x) = \boxed{x^2}.\end{aligned}$$

3p

Ovanstående gäller för $x \in [0, 1]$.

(b) För att bestämma väntevärde tar vi fram tätheten genom derivering. För $x \in [0, 1]$ gäller

$$f_M(x) = F'_M(x) = 2 - 2x$$

$$f_M(x) = F'_M(x) = 2x$$

3p

vilket ger

$$E[M] = \int_0^1 x(2 - 2x)dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$E[M] = \int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

(c) Sätt $A = \{M \leq 0.7\}$ och $B = \{M \leq 0.7\}$. Vi vill då beräkna $P(A \cap B^c)$. Vi har

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c).$$

Da $M \leq M$ gäller $B \subseteq A$, så $A \cap B = B$ och

$$\begin{aligned}P(A \cap B^c) &= P(A) - P(B) \\&= P(M \leq 0.7) - P(M \leq 0.7) \\&= F_M(0.7) - F_M(0.7)\end{aligned}$$

4p

$$= 2 \cdot 0.7 - 0.7^2 - 0.7^2 = \boxed{0.42}$$

7 (a) Antalet barn X i ett hushåll har sannolikhetsfunktion

$$P_X(0) = 0.20 \quad P_X(1) = 0.45 \quad P_X(2) = 0.25 \quad P_X(3) = 0.1.$$

Detta ger

$$E[X] = \sum_{k=1} k \cdot P_X(k) = 0.45 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.1 = 1.25.$$

$$E[X^2] = \sum_{k=1} k^2 P_X(k) = 0.45 + 4 \cdot 0.25 + 9 \cdot 0.1 = 2.35.$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 2.35 - 1.25^2 = 0.7875.$$

4p

(b) Låt $X_1, X_2, \dots, X_{3000}$ ange antalet barn i de 3000 hushåll som planeras. Enl. centrala gränsvärdesatsen kommer

$$Z = \frac{1}{\sqrt{3000}} \sum_{k=1}^{3000} \frac{X_k - 1.25}{\sqrt{0.7875}}$$

2p

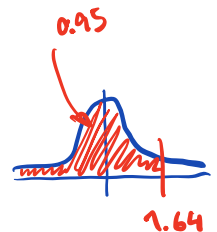
vara approx $N(0,1)$ -fördelad.

Vi söker m så att

$$P\left(\sum_{k=1}^{3000} X_k \leq m\right) = 0.95.$$

Detta ger

$$P\left(Z \leq \frac{m - 1.25 \cdot 3000}{\sqrt{0.7875} \sqrt{3000}}\right) = 0.95.$$



Enligt tabell gäller $\Phi(1.64) \approx 0.95$.

Det ger

$$1.64 \approx \frac{m - 1.25 \cdot 3000}{\sqrt{0.7875} \cdot \sqrt{3000}}$$

4p

dvs

$$m \approx 1.25 \cdot 3000 + 1.64 \sqrt{0.7875} \cdot \sqrt{3000} \approx 3829.7.$$

De bör alltså planera 3830 skolplatser.

8 (a) Markerna och deras kostnad är fördelade enligt

kostnad	3	2	1	0
antal	1	2	4	2

Eftersom endast en mark har kostnad 3 så kan kostnaden av tre marken ej överstiga 7. Det minsta värdet K kan anta är därför 4, vilket sker om de fyra första dragen resulterar i en, två resp. en mark av kostnad 3, 2 resp. 1.

Notera även att om de sju första dragen resulterar i 1, 4 resp 2 marken av kostnad 2, 1 resp 0 så uppnår kostnaden till 7, samt att kostnaden i nästa drag nödvändigtvis överstiger 7. Det högsta värde K kan anta är därmed 8. 3p

Genom att variera vilken mark som dras ser vi att K kan anta samtliga värden 4, 5, 6, 7, 8 med positiv sannolikhet.

(b) Notera att $Y_4 > 7$ om och endast om de fyra första dragen resulterar i en, två resp en mark av kostnad 3, 2 resp 1. Detta sker med sannolikhet

$$P(Y_4 > 7) = \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{4}} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{2}{63}$$

Notera sedan att $Y_7 \leq 5$ kan ej inträffa då
Vårje val av sju marker ger minst kostnad 6.

$Y_7 = 6$ motsvarar precis utfallet 0, 1, 4, 2
av marker med kostnad 3, 2, 1, 0. Därmed

$$P(Y_7 = 6) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{4}\binom{2}{2}}{\binom{9}{4}} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{63}$$

$Y_7 = 7$ inträffar för utfallen 1, 0, 4, 2 samt
0, 2, 3, 2 av marker med kostnad 3, 2, 1, 0.

Därmed

$$P(Y_7 = 7) = \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{0}\binom{4}{4}\binom{2}{2} + \binom{1}{0}\binom{2}{2}\binom{4}{3}\binom{2}{2}}{\binom{9}{4}}$$

$$= (1+4) \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{2 \cdot 63}$$

Alltså

$$P(Y_7 \leq 7) = \boxed{\frac{7}{126}}$$

(c) Då K ej kan anta värden ≤ 3 gäller

$$P(K=4) = P(K \leq 4) = P(Y_4 > 7) = \boxed{\frac{2}{63}}.$$

Då K ej kan anta värden ≥ 9 gäller

$$P(K=8) = P(K \geq 8) = P(Y_7 \leq 7) = \boxed{\frac{7}{126}}.$$