STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 5003
TENTAMEN
25 augusti 2020

Tentamen i Statistisk inferensteori
25 augusti 2020, kl. 9-14

Examinator: Chun-Biu Li, cbli@math.su.se.
Återlämning: Tillkännages via e-post.

Resonemang skall vara tydliga och lätta att följa. Varje korrekt och fullständigt löst uppgift ger 10 poäng. För betyg A-E krävs 20 poäng på Del 1, samt att följande gränser uppnås på Del 2:

A	B	C	D	E
25	19	13	7	0

Del 1

Låt $X_i,\ i = 1, \ldots, n$ beteckna oberoende stokastiska variabler med täthetsfunktioner $f(x_i|\theta) = 2\theta x_i \exp(-\theta x_i^2),\ x_i > 0$, där $\theta \in (0, \infty)$. Vi observerar $x = (x_1, \ldots, x_n)$, en realisering av $X = (X_1, \ldots, X_n)$ för något okänt värde på θ. För fördelningen gäller att $E(X_i) = \sqrt{\pi/(4\theta)}$ och $E(X_i^2) = 1/\theta$.

Uppgift 1

a) Vad kallas en stickprovsvariabel t med egenskapen att fördelningen för $X|t(X) = t(x)$ inte beror på θ? (2p)

b) Visa att $t(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ besitter egenskapen i a). (4p)

c) Bestäm maximum-likelihood skattaren av $\phi = 1/\theta$ och visa att den är väntevärdesriktig. (4p)

Uppgift 2

a) Låt apriorifördelningen för θ vara en $Exp(\lambda)$ fördelning med täthetsfunktion $f(\theta|\lambda) = \lambda \exp(-\lambda\theta)$ för ett givet värde på λ. Visa att aposteriorifördelningen för θ kan skrivas på formen $f(\theta|x) \propto \theta^a \exp(-b\theta)$ och bestäm a och b. (5p)

b) Beskriv hur man kan använda parametrisk Bootstrap för att konstruera ett 95% konfidensintervall för θ. Din beskrivning skall vara så detaljerad att en programmerare kan följa den utan att göra egna härledningar av resultat. Du kan anta att programmeringsspråket kan simulera oberoende slumptal från fördelningen för X_i givet ett värde på θ. (5p)

Uppgift 3

a) Låt $\hat{\phi}$ vara maximum-likelihood skattaren i 1c), bestäm gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} nVar(\hat{\phi})$. (5p)

b) Bestäm ett 95% konfidensintervall för θ baserat på score-funktionen. (5p)

Del 2

Uppgift 4

Låt $f(x|\theta)$ betäckna täthetsfunktionen till exponentialfördelningen med parameter θ, där $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}\exp[-x/\theta]$ om $x \geq 0$ och $f(x|\theta) = 0$ annars. Vi har två mängder med realiseringar av oberoende slumpvariabler, $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ där varje element är ett stickprov från en exponentialfördelning med parameter θ_1, och $\{X'_1, X'_2, \cdots, X'_m\}$ där varje element är ett stickprov från en exponentialfördelning med parameter θ_2. Anta att $n = 55$ och att $m = 80$. Anta vidare att stickprovens medelvärden är $\bar{X} = 0.88$ respektive $\bar{X}' = 1.07$.
Utför ett statistiskt hypotestest med nollhypotesen H_0: $\theta_1 = \theta_2$ och alternativhypotesen H_A: $\theta_1 \neq \theta_2$, använd likelihood ratio testet med signifikansnivån 5%. (10p)

Uppgift 5

a) Låt θ beteckna sannolikheten att en fabriksprodukt är defekt, där $0 \leq \theta \leq 1$. I ett slumpmässigt urval av 30 produkter visade det sig att 3 var defekta. Anta att sannolikheten att en produkt är defekt är oberoende av de andra produkterna. Använd Jeffrey's prior för att hitta posteriorfördelningen av θ. (5p)

b) I uppgift 5a) var storleken på urvalet givet. Vi använder nu en annan urvalsmetod där vi forsätter ta produkter tills vi har sett 3 defekta. Det visar sig att den 30e produkten vi tar är den tredje och sista defekta. Använd återigen Jeffrey's prior för att hitta posteriorfördelningen av θ. (5p)

Uppgift 6

Låt $\mathbf{X}_{1:n}$ bestå av n oberoende observationer från en bivariat normalfördelning med väntevärdesvektor $\mu = 0$ och kovariansmatris $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4\alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, där $\alpha > 0$.

a) Bestäm ML-skattarna $\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}$ och $\hat{\beta}_{\mathrm{ML}}$. (5p)

b) Bestäm profil-likelihood-funktionen $L_p(\beta)$ och estimated-likelihood-funktionen $L_e(\beta)$. (4p)

c) Beskriv, i termer av resultaten från a) och b), hur man kan utföra ett generalized-likelihood-ratio-test av hypotesen H_0: $\beta = 0$ på nivån 5%. (1p)

Lycka till!