Taras Bodnar
Department of Mathematics
Stockholm University
E-Mail: taras.bodnar@math.su.se

Theory of Statistical Inference

Re-exam, 2019/08/23

The only allowed aid is a pocket calculator provided by the department. The solution should preferably be given in English. The answers to the task should be clearly formulated and structured. All non-trivial steps need to be commented. The answers of the text questions should cover the corresponding material presented during lectures.

The post exam review will take place on Monday, September 2, 2019 from 12:00 to 13:00 in room 329 (house 6).

The grades will be given due to the following table

Grade	A	B	C	D	E	F
Points	100-90	89-80	79-70	69-60	59-50	< 50
Percent	100-90%	89-80%	79-70%	69-60%	59-50%	$< 50\%$

Problem 1 [16P]

Let X have probability density function

$$f(x) = \begin{cases} 4\frac{x(\theta^2 - x^2)}{\theta^4}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

with $\theta > 0$.

(a) Prove that X has the following distribution function **[5P]**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2\frac{x^2}{\theta^2} - \frac{x^4}{\theta^4}, & 0 < x < \theta, \\ 1, & x \geq \theta. \end{cases}$$

(b) Show that $Z = X/\theta$ is a pivot. **[3P]**

(c) Use the pivot from part (b) to find a 90% lower one-sided confidence interval for θ. **[8P]**

Problem 2 [21P]

Suppose that $X_{1:n_1} = (X_1, ..., X_{n_1})^T$ and $Y_{1:n_2} = (Y_1, ..., Y_{n_2})^T$ are independent random samples, that is $X_1, ..., X_{n_1}, Y_1, ..., Y_{n_2}$ are mutually independent, from normal distributions with respective unknown means μ_1 and μ_2 and variances σ_1^2 and σ_2^2.

(a) Derive the expression of the log-likelihood function when $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ and find the maximum likelihood estimators for μ_1, μ_2, σ_1^2, and σ_2^2. **[6P]**

(b) Derive the expression of the log-likelihood function when $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ and find the maximum likelihood estimators for μ_1, μ_2, and σ^2. **[6P]**

(c) Find the likelihood ratio statistic for $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ against the alternative $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Present the expression of the test statistic in the most simplified form. **[6P]**

(d) Find an approximate critical region for the test in part (c) if n_1 and n_2 are large and the significance level of the test is $\alpha = 0.05$. **[3P]**

Problem 3 [20P]

Let $X_{1:n} = (X_1, ..., X_n)^T$ be an i.i.d. sample of a Weibull distributed random variable X, i.e.,

$$X_1, ..., X_n \overset{iid}{\sim} \text{Wei}(\alpha, \beta)$$

with the density of X given by

$$f(x) = \beta\alpha x^{\alpha-1} \exp\left(-\beta x^{\alpha}\right), \quad \alpha, \beta > 0\,.$$

(a) Derive the expression of the log-likelihood function. **[2P]**

(b) Calculate the score vector $U(\boldsymbol{\theta})$ with $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^T$. **[3P]**

(c) Compute the observed Fisher information matrix. **[4P]**

(d) Let $\hat{\alpha}_{MLE}$ denote the maximum likelihood estimator for α. Construct the two-sided 95% Wald confidence interval for α using the results of part (c). Present the limits of the constructed confidence intervals in terms of $X_{1:n}$. **[2P]**

(e) Derive the expression of the profile log-likelihood function for α. **[5P]**

(f) In this part of Problem 3 we assume that $\alpha = 5$. Provide the minimal sufficient statistic for β and explain your answer. **[4P]**

Problem 4 [18P]

Let $X_{1:n} = (X_1, ..., X_n)^T$ denote a random sample from a normal distribution with mean μ and variance $\sigma^2 = 1$.

(a) Show that the conjugate prior for μ is given by a normal distribution. **[2P]**

(b) Assuming that the conjugate prior from part (a) has mean m_0 and variance s_0^2, determine the parameters in the corresponding posterior distribution. **[5P]**

(c) Compute the posterior mean of μ and the posterior variance of μ when the conjugate prior is used. **[1P]**

(d) Find the expression of the Jeffreys' prior for μ and compute the corresponding posterior distribution. **[6P]**

(e) Calculate the posterior mean when the Jeffreys' prior is used and compare it to the expression of the MLE estimator for μ obtained in the frequentist statistics. **[4P]**

Problem 5 [10P]

Define an unbiased estimator, an asymptotically unbiased estimator, a consistent estimator. What is the mean square error of an estimator? Is a one-to-one transformation of an unbiased estimator always an unbiased estimator of the correspondingly transformed parameter? Provide an example.

Problem 6 [15P]

Formulate the statement of the Cramér-Rao lower bound and prove it.

Taras Bodnar
Department of Mathematics
Stockholm University
E-Mail: taras.bodnar@math.su.se

Statistisk Inferensteori

Omtentamen, 2019/08/23

Det enda tillåtna hjälpmedlet är en miniräknare, som tillhandahålls av institutionen. Lösningarna på problemen skall helst skrivas på engelska och vara väl strukturerade med tydligt angivna svar. Alla icke-triviala steg i lösningarna skall motiveras. För full poäng på text-frågorna skall svaren täcka motsvarande material som presenterats under föreläsningarna.

Tentamensåterlämningen kommer äga rum på Måndag 2 September mellan 12:00 och 13:00 i rum 329 (hus 6).

Betygssättningen sker enligt följande tabell:

Betyg	A	B	C	D	E	F
Poäng	100-90	89-80	79-70	69-60	59-50	< 50
Procent	100-90%	89-80%	79-70%	69-60%	59-50%	$< 50\%$

Problem 1 [16P]

Låt X ha täthet

$$f(x) = \begin{cases} 4\frac{x(\theta^2 - x^2)}{\theta^4}, & 0 < x < \theta, \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

där $\theta > 0$.

(a) Visa att X har följande fördelningsfunktion [**5P**]

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2\frac{x^2}{\theta^2} - \frac{x^4}{\theta^4}, & 0 < x < \theta, \\ 1, & x \geq \theta. \end{cases}$$

(b) Visa att $Z = X/\theta$ är en pivotvariabel. [**3P**]

(c) Använd pivotvariaveln från (b) för att bestämma ett 90% ensidigt nedåt begränsat konfidensintervall för θ. [**8P**]

Problem 2 [21P]

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ och $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ vara två oberoende normalfördelade stickprov vars medelvärden ges av μ_1 respektive μ_2 och varianser av σ_1^2 respektive σ_2^2. Alla fyra parametrar är okända.

(a) Härled log-likelihood-funktionen om $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, och hitta maximum-likelihood-skattarna av μ_1, μ_2, σ_1^2, och σ_2^2. [**6P**]

(b) Härled log-likelihood-funktionen om $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ och hitta maximum-likelihood-skattarna av μ_1, μ_2, och σ^2. [**6P**]

(c) Bestäm teststatistikan för likelihood-ratio-testet av $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ mot $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Ange ditt svar på maximalt förenklad form. [**6P**]

(d) Bestäm ett approximativt kritiskt område för testet i c) med signifikansnivå $\alpha = 0.05$, givet att n_1 och n_2 är stora. [**3P**]

Problem 3 [20P]

Låt $X_{1:n} = (X_1, ..., X_n)^T$ vara ett i.i.d. Weibullfördelat stickprov, det vill säga

$$X_1, ..., X_n \overset{iid}{\sim} \text{Wei}(\alpha, \beta)$$

med täthet

$$f(x) = \beta\alpha x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha), \quad \alpha, \beta > 0.$$

(a) Bestäm log-likelihood-funktionen $l(\alpha, \beta)$. [**2P**]

(b) Bestäm score-vektorn $U(\boldsymbol{\theta})$ där $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^T$. [**3P**]

(c) Bestäm Fishers observerade informationsmatris. [**4P**]

(d) Låt $\hat{\alpha}_{MLE}$ vara maximum-likelihood-skattaren av α. Använd del c) för att konstruera ett 95% Wald-intervall för α. [**2P**]

(e) Bestäm profil-log-likelihood-funktionen $l_p(\alpha)$. **[5P]**

(f) I den här delfrågan antar vi att $\alpha = 5$. Ange den minimlt tillräckliga statistikan för β och motivera ditt svar. **[4P]**

Problem 4 [18P]

Låt $X_{1:n} = (X_1, ..., X_n)^T$ vara ett normalfördelat slumpmässigt stickprov med väntevärde μ och varians $\sigma^2 = 1$.

(a) Visa att den konjugerade priorn för μ ges av en normalfördelning. **[2P]**

(b) Låt a_0 och s_0^2 beteckna väntevärdet respektive variansen av den konjugerade priorn från (a), och hitta parametrarna i den motsvarande aposteriorifördelningen som uttryck av a_0 och s_0^2. **[5P]**

(c) Bestäm aposteriorivärdet och aposteriorivariansen av μ om apriorifördelningen ges av den konjugerade priorn. **[1P]**

(d) Härled Jeffreys' prior för μ och bestäm motsvarande aposteriorifördelning. **[6P]**

(e) Bestäm aposteriorivärdet av μ om apriorifördelningen ges av Jeffreys' prior och jämför det med ML-skattaren för μ från det frekventistiska ramverket. **[4P]**

Problem 5 [10P]

Definiera följande begrepp: *väntevärdesriktig skattare, asymptotiskt väntevärdesriktig skattare, konsistent skattare.* Förklara vad som avses med *medelkvadratfelet* för en skattare. Gäller det att en "one-to-one"-transformation av en väntevärdesriktig skattare alltid ger en väntevärdesriktig skattare av den motsvarande transformerade parametern? Illustrera ditt svar med ett exempel eller motexempel.

Problem 6 [15P]

Formulera och bevisa Cramér-Raos olikhet.