STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT1011
3 juni 2021

Lösningar till tentamen i Sannolikhetslära och statistik för lärare 3 juni 2021

Examinator: Jan-Olov Persson

Uppgift 1

Låt A vara händelsen "inbrott i villan" och B händelsen "inbrott i sommarstugan".

a) Händerlserna A och B är oberoende så $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.01 \cdot 0.03 = 0.0003$.

Eller: 1–0.99·0.97 = 0.0397

b) $PA \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.01 + 0.03 - 0.0003 = 0.0397$.

c) $PA \cup B) - P(A \cap B) = 0.0397 - 0.0003 = 0.0394$.

Uppgift 2

1.33, exakt! ***1.237376. OK***

a) Medelvärde ≈ 1.32, standardavvikelse ≈ 1.24

b) Nedre kvartil =0, median=1, övre kvartil=2, typvärde=1.

Alla värden i uppgift a och b har enhet: antal jordbävningar per månad.

Not. Endast svar räcker inte för poäng, beräkningar måste redovisas.

Uppgift 3

a) X är binomialfördelad, $X \sim Bin(n = 200, p = 0.02)$ med väntevärde $E(X) = 200 \cdot 0.02 = 4$.

Kum summor:

59	***120***	***171***	***191***	***196***	***198***	***199***	***200***
0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***

Så månad 100 i storleksordning har värdet 1,
nr 50 värde 0 och nr 150 värdet 2.

OBS att np(1-p) = 3.92 < 10

b) Eftersom $p = 0.02 < 0.1$ så kan approximation med Poissonfördelning göras. Approximativt gäller att $X \sim Po(\lambda)$ där $\lambda = E(X) = 200 \cdot 0.02 = 4$.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = \{mha\ tabell\ 2\} = 1 - 0.6288 = 0.3712$$

Exakt beräkning med binomialfördelning ger samma svar avrundat till fyra decimaler.

Uppgift 4

a) Låt X vara borrdjup till grundvatten. Då är $X \sim N(\mu = 35, \sigma = 3)$ och

$$P(X < 30) = \phi\left(\frac{30-35}{3}\right) \approx 1 - \phi(1.67) = 0.0475$$

b) Villkoret ger följande ekvation:

$$0.80 = P(35-a \leq X \leq 35+a) = \phi(a/3) - \phi(-a/3) = 2\phi(a/3) - 1 \Leftrightarrow \phi(a/3) = 0.90$$

vilket ger $a/3 = \phi^{-1}(0.90) \approx 1.28$ (tabell 3 baklänges) och $a = 3 \cdot 1.28 = 3.84$.
Svar: $a = 3.84$ meter.

c) Vi söker sannolikheten att borra 40 meter (35+5) betingat av att 35 meter har borrats.

$$P(X > 40 | X > 35) = \frac{P(X > 40 \cap X > 35}{P(X > 35} = \frac{P(X > 40)}{P(X > 35)} = \frac{1 - \phi((40-35)/3)}{1 - \phi((35-35)/3)} \approx 0.095$$

Uppgift 5

a) Låt X vara livslängden för en viss elskoter. Det gäller att $X \sim Exp(\beta = 4)$ och den sökta sannolikheten beräknas som

$$P(3 < X < 5) = \int_3^5 \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = \left[-e^{-x/4}\right]_3^5 = -e^{-5/4} + e^{-3/4} \approx 0.186$$

b) Låt X vara livslängden för en viss elskoter.

$$P(X > 3) = \int_3^\infty \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = e^{-3/4} \approx 0.472$$

Låt Y vara antal av de 1000 utställda vars livslängd överstiger 3 månader. Det gäller att $Y \sim Bin(n = 1000, p = 0.472)$ och approximativt att $Y \sim N(\mu, \sigma)$ med $\mu = 1000 \cdot 0.472 = 472$ och $\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0.472 \cdot (1 - 0.472)} = 15.8$.

$$P(Y > 500) = 1 - P(Y \leq 500) = 1 - \phi\left(\frac{500 - 472}{15.8}\right) = 1 - \phi(1.77) = 1 - 0.9616 \approx 4\%$$

P(Y≥500) väl?

Men JOP halvtalskorrigerar aldrig.

Uppgift 6

a) Värdet på μ är okänt och att påstå att $\mu = 397.9$ är inte korrekt. Att påstå att μ kan skattas med stickprovsmedelvärdet $\bar{x} = 397.9$ ($\hat{\mu} = 397.9$) är däremot korrekt.

b) Ett 95% konfidensintervall för μ beräknas med formeln

$$\bar{x} \pm t_{0.025}(n-1)s/\sqrt{n}$$

Med $\bar{x} = 397.9$, $s = 1.09$, $n = 6$ och $t_{0.025}(5) = 2.571$ blir intervallet: 397.9 ± 1.14 eller $(396.76\ ,\ 399.04)$. Eftersom konfidensintervallet innefattar det teoretiska värdet 397.0 så har vi inget statistiskt stöd för att motsäga det.

c) Ett 95% konfidensintervall för μ med känt σ blir: $\bar{x} \pm 1.96\sigma/\sqrt{n}$ och om längden på intervallet ska vara 0.02 får man ekvationen $2 \cdot 1.96\sigma/\sqrt{n} = 0.02$, som med $\sigma = 1.5$ har lösningen $n = 86436$.