STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT1011, MT102U, MT103U
TENTAMEN
9 januari 2023

Tentamen i Sannolikhetslära och statistik för lärare

9 januari 2023 kl. 14–19

Examinator: Gudrun Brattström, gudrun@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Bifogad formelsamling samt utdelad miniräknare.
Återlämning: Studentexpeditionen.

Varje korrekt löst uppgift ger 8 poäng. Resonemang ska vara tydliga och gå att följa. Delpoäng kan ges för en lösning där du visar att du har tänkt rätt men har gjort ett slarvfel på vägen. Observera att uppgifterna inte nödvändigtvis är ordnade efter växande svårighetsgrad.

Betygen A–E sätts enligt följande minimigränser:

	Betyg				
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
Poäng	44	38	32	28	24

Uppgift 1

Fyra elefanter väger 3789 kg, 2092 kg, 3517 kg respektive 4523 kg.

a) Beräkna medianen av elefanternas vikter. (1 p)

b) Beräkna medelvärdet av elefanternas vikter. (1 p)

c) Beräkna variansen av elefanternas vikter. (1 p)

d) Beräkna standardavvikelsen av elefanternas vikter. (1 p)

e) Beräkna variationskoefficienten av elefanternas vikter. (1 p)

f) Vad blir medianen, medelvärdet, variansen, standardavvikelsen och variationskoefficienten om vi uttrycker vikterna i ton (= 1000 kg) istället? (3 p)

Uppgift 2

Man mäter salthalten i vattnet utanför Byxelkrok på norra Öland 12 gånger, och får ett medelvärde på 6.863 promille med stickprovsstandardavvikelsen 0.866. Sedan gör man samma sak vid Tofta strand på Gotland, men där misslyckas två av mätningarna, varför man bara har 10 mätvärden. Dessa har medelvärdet 6.339 med stickprovsstandardavvikelsen 0.795. Låt oss anta att samtliga mätningar är normalfördelade och oberoende av varandra, med eventuellt olika väntevärden för Byxelkrok och Tofta strand, men med samma populationsstandardavvikelse σ för båda.

a) Skatta σ med hjälp av data. (3 p)

b) Beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för skillnaden i förväntad salthalt mellan Byxelkrok och Tofta strand. (3 p)

c) Testa på nivån 0.05 hypotesen att vattnet är lika salt utanför Byxelkrok som vid Tofta strand mot alternativet att det inte är det. Slutsatsen ska klart framgå. (2 p)

Uppgift 3

Slumpvariabeln X är Poissonfördelad med parametern $\lambda = 60$.

a) Vad är väntevärdet $E(X)$? (1 p)

b) Vad är standardavvikelsen $D(X)$? (2 p)

c) Beräkna med hjälp av lämplig approximation $P(50 \leq X \leq 65)$. (5 p)

Uppgift 4

En kontinuerlig slumpvariabel X har tätheten $f_X(x) = c(3-2x)$ för $-1 \leq x \leq 1$, där c är en konstant. För alla x utanför detta intervall är $f_X(x) = 0$.

a) Bestämt konstanten c så att $f_X(x)$ blir en täthet. (2 p)

b) Beräkna väntevärdet $E(X)$. (3 p)

c) Beräkna sannolikheten för att $0 \leq X \leq \frac{3}{2}$. (3 p)

Uppgift 5

Du tänker åka buss. Du vet att bussen går regelbundet en gång var tjugonde minut, men du vet inte vad klockan är, så det är rimligt att anta (givet den information du har) att den tid X du måste vänta på bussen är likformigt fördelad, $X \sim U(0, 20)$.

a) Vad är sannolikheten för att du måste vänta på bussen i minst 12 minuter? (4 p)

b) Emellertid står det någon och väntar på hållplatsen när du kommer dit, och den personen talar om för dig att hen redan har väntat i 5 minuter. Givet denna upplysning, vad är sannolikheten för att du kommer att behöva vänta på bussen i minst 12 minuter? (4 p)

Uppgift 6

Ett litet samhälle har 300 invånare, fördelade på 18 familjer, med ett varierande antal medlemmar. Man ordnar ett lotteri med ett pris som går till en av de 300 invånarna. Lotteriet genomförs i två steg: först lottar man bland de 18 familjerna genom att man lägger 18 papperslappar i en låda. En av lapparna är märkt med en svart prick. Man viker ihop lapparna så att den svarta pricken inte syns, blandar dem väl och låter en representant för var och en av familjerna dra en lapp. Priset kommer att tillfalla någon av medlemmarna i den familj vars representant drar lappen med en svart prick. För att bestämma vem i familjen det blir upprepar man proceduren, men nu bara för denna familj och med en lapp för varje medlem i familjen. Även nu finns det en lapp med en svart prick. Familjemedlemmarna drar varsin, och den som drar lappen med en svart prick har vunnit priset.

a) Familjen Hutchinson består av mamma, pappa och tre barn. Vad är sannolikheten för att någon i familjen Hutchinson vinner priset? (1 p)

b) Vad är sannolikheten för att Mrs. Hutchinson, mamman i familjen, vinner priset? (2 p)

c) Man skulle kunna tänka sig ett förenklat lotteri i bara ett steg, där man låter var och en av de 300 invånarna dra en hopvikt papperslapp ur en låda med 300 lappar, av vilka en har en svart prick. Som förut vinner den som drar den svarta pricken. Vad blir svaren på **a)** och **b)** nu? (2 p)

d) Antag att man avgör med slantsingling vilken sorts lotteri man ska anordna (ettstegs eller tvåstegs). Om vi i efterhand får veta att Mrs. Hutchinson har vunnit, vilken är då sannolikheten att det var ett tvåstegslotteri som ordnades? (3 p)

Lycka till!