STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT1011, MT102U, MT103U
TENTAMEN
9 januari 2023

Tentamenslösningar – Sannolikhetslära och statistik för lärare

9 januari 2023 kl. 14–19

Examinator: Gudrun Brattström, gudrun@math.su.se

Uppgift 1

a) Ordna data i efter storlek: 2092, $\underline{3517,\ 3789}$, 4523. Medianen är $(3517+3789)/2 = 3653$.

b) Medelvärdet är $(3789 + 2092 + 3517 + 4523)/4 = 3480.25$.

c) Variansen är

$$\frac{(3789-3480.25)^2 + (2092-3480.25)^2 + (3517-3480.25)^2 + (4523-3480.25)^2}{4-1} = 1\,037\,081\,.$$

d) Standardavvikelsen är $\sqrt{1\,037\,081} = 1018.4$.

e) Variationskoefficienten är $1018.4/3480.25 = 0.2926$, eller avrundat och i procent: 29%.

f) Medianen och medelvärdet har samma enhet som data, så vi får $3653/1000 = 3.653$ ton respektive $3.48025 \approx 3.480$ ton. Variansen har en kvadratisk skala, så uttryckt i ton^2 är den $1\,037\,081/1000^2 = 1.037081 \approx 1.037$ ton^2. Standardavvikelsen har återigen samma skala som data, så den blir 1.0184 ton Variationskoefficienten är dimensionslös och förblir 29%.

Uppgift 2

a) Vi skattar σ med den poolade standardavvikelsen (se formelsamlingen)

$$\begin{aligned} s_p &= \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(12-1)\cdot 0.865^2 + (10-1)\cdot 0.795^2}{12+10-2}} \\ &= \sqrt{0.6969} = 0.835\,. \end{aligned}$$

b) Ett 95%-igt konfidensintervall för skillnaden ges av

$$\begin{aligned}\overline{x} - \overline{y} \quad &\pm \quad t_{0.025}(n_1+n_2-2)s_p\sqrt{\tfrac{1}{n_1}+\tfrac{1}{n_1}} \\ &= \quad 6.863 - 6.339 \pm 2.086 \cdot 0.835 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{10}} = 0.524 \pm 0.746\,,\end{aligned}$$

eller $(-0.222, 1.270)$.

c) Detta intervall innehåller 0, varför vi inte kan förkasta nollhypotesen att det inte är någon skillnad mellan salthalterna. Med andra ord kan vi inte påstå att det finns en skillnad.

Uppgift 3

a) Väntevärdet är lika med parametern λ, så $E(X) = 60$.

b) Variansen $V(X)$ är också lika med parametern λ, så vi får standardavvikelsen är $\sqrt{V(X)} = \sqrt{60} = 7.746$.

c) Eftersom $\lambda = 60 > 15$ kan vi approximera X med $Y \sim N(60, \sqrt{60})$. Vi får då att

$$\begin{aligned}P(50 \le X \le 65) \quad &\approx \quad P(50 \le Y \le 65) = P\left(\frac{50-60}{\sqrt{60}} \le \frac{Y-60}{\sqrt{60}} \le \frac{65-60}{\sqrt{60}}\right) \\ &= \quad P(-1.29 \le Z \le 0.65) = \Phi(0.65) - \Phi(-1.29) \\ &= \quad \Phi(0.65) - (1 - \Phi(1.29)) = \Phi(0.65) + \Phi(1.29) - 1 \\ &= \quad 0.7422 + 0.9015 - 1 = 0.6437\,.\end{aligned}$$

där $Z = \frac{Y-60}{\sqrt{60}} \sim N(0,1)$, med fördelningsfunktion Φ.

Not: Med halvtalskorrektion fås istället $P(50 \le X \le 65) \approx 0.6735$, och exakt beräkning ger $P(50 \le X \le 65) = 0.6801$.

Uppgift 4

a) Vi integrerar $f_X(x)$:

$$\int_{-1}^{1} c \cdot (3-2x)dx = \left[c \cdot (3x-x^2)\right]_{-1}^{1} = c \cdot (3-1-(-3-1)) = 6c\,.$$

Alltså måste vi ha $c = \frac{1}{6}$ för att integralen ska bli $= 1$. Eftersom $3 - 2x \ge 3 - 2 \cdot 1 = 1 \ge 0$ i hela intervallet $[-1, 1]$ gäller att $f_X(x) = \frac{1}{6}(3-2x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$ är en täthet.

b) Väntevärdet ges av integralen

$$\int_{-1}^{1} x \cdot \tfrac{1}{6}(3-2x)dx = \int_{-1}^{1} \left(\tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{3}\right) dx = \left[\tfrac{x^2}{4} - \tfrac{x^3}{9}\right]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9} - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9}\right) = -\tfrac{2}{9}$$

c) Notera att $f_X(x) = 0$ när $1 < x \leq \frac{3}{2}$. Alltså är den sökta sannolikheten

$$\int_0^1 \tfrac{1}{6}(3-2x)dx = \tfrac{1}{6}\left[3x-x^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{6}\cdot(3-1-(0-0)) = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}\,.$$

Uppgift 5

a) Tätheten är $f_X(x) = \frac{1}{20}$ om $0 \leq x \leq 20$, och 0 annars. Alltså är

$$P(X \geq 12) = \int_{12}^{20} \tfrac{1}{20}dx = \frac{20-12}{20} = \frac{2}{5} = 0.4\,.$$

(Man kan också notera att den sökta sannolikheten är arean av en rektangel med sidorna $\frac{1}{20}$ och $20 - 12 = 8$. Arean är $\frac{1}{20} \cdot 8 = \frac{2}{5}$.)

b) Att det redan har gått fem minuter betyder att du vet att $X \leq 15$, så vad som söks en betingad sannolikhet:

$$\begin{aligned} P(X \geq 12|X \leq 15) &= \frac{P((X \geq 12) \cap (X \leq 15))}{P(X \leq 15)} = \frac{P(12 \leq X \leq 15)}{P(X \leq 15)} \\ &= \frac{\int_{12}^{15} \frac{1}{20}dx}{\int_0^{15} \frac{1}{20}dx} = \frac{3/20}{15/20} = \frac{1}{5} = 0.2\,. \end{aligned}$$

Uppgift 6

a) Familjerna väljs var och en med samma sannolikhet $= \frac{1}{18}$ i lotteriets första steg, så sannolikheten att just familjen Hutchinson blir utvald är $= \frac{1}{18}$.

b) Låt H vara händelsen att familjen Hutchinson blir utvald och M händelsen att Mrs. Hutchinson blir utvald, det vill säga hon vinner. Enligt multiplikationsprincipen gäller

$$P(M) = P(M \cap H) = P(M|H) \cdot P(H) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{90}\,.$$

(Mrs. Hutchinson kan ju bara bli utvald i andra steget om hennes familj blir utvald i det första.) Alternativt kan man rita ett träddiagram och komma till samma resultat.

c) Familjen Hutchinsons vinstchans enligt principen antal gynnsamma delat med totalt antal är $\frac{5}{300} = \frac{1}{60}$, medan Mrs. Hutchinsons vinstchans är den samma som alla andras, det vill säga $\frac{1}{300}$.

d) Låt T vara händelsen att tvåstegslotteriet ordnades; då blir komplementet T^* händelsen att ettstegslotteriet ordnades. Vad vi söker är den betingade sannolikheten $P(T|M)$. Ur

Bayes sats och **b)** och **c)** ovan får vi:

$$\begin{aligned}
P(T|M) &= \frac{P(M|T)\cdot P(T)}{P(M|T)\cdot P(T)+P(M|T^*)\cdot P(T^*)} = \frac{1/90\cdot 1/2}{1/90\cdot 1/2+1/300\cdot 1/2} \\
&= \frac{10}{10+3} = \frac{10}{13} \approx 0.77\,.
\end{aligned}$$