

Tentamen i Sannolikhetslära och statistik för lärare

20 februari 2023 kl. 14–19

Examinator: Gudrun Brattström, gudrun@math.su.se

Tillåtna hjälpmedel: Bifogad formelsamling samt utdelad miniräknare.

Återlämning: Studentexpeditionen.

Varje korrekt löst uppgift ger 8 poäng. Resonemang ska vara tydliga och gå att följa. Delpoäng kan ges för en lösning där du visar att du har tänkt rätt men har gjort ett slarvfel på vägen. Observera att uppgifterna inte nödvändigtvis är ordnade efter växande svårighetsgrad.

Betygen A–E sätts enligt följande minimigränser:

	Betyg				
	A	B	C	D	E
Poäng	44	38	32	28	24

Uppgift 1

En kontinuerlig slumpvariabel X är likformigt fördelad, $X \sim U[-4, 5]$.

a) Beräkna $P(X > 0)$. (2 p)

b) Bestäm väntevärde och varians för X . (2 p)

c) Antag att vi istället har 50 oberoende slumpvariabler X_i , alla likformigt fördelade, $X_i \sim U[-4, 5]$, $i = 1, 2, \dots, 50$. Beräkna approximativt $P(\bar{X} > 0)$, där \bar{X} är medelvärdet av de 50 variablerna. (4 p)

Uppgift 2

Då och då påstås det att en djurart är ”biologiskt odödlig”. Detta betyder inte att den aldrig dör, bara att dess celler i viss mening inte åldras. Bland annat har detta hävdats beträffande den klykstjärtade stormsvalan (*Hydrobates leucorhous*, en liten havslevande fågel). Man skulle kunna tolka biologisk odödlighet som att fågelns livslängd är exponentialfördelad. Medellivslängden (dvs populationsmedelvärdet) för klykstjärtade stormsvalor är 25 år, enligt engelskspråkiga Wikipedia.

- Skriv ner täthetsfunktionen för $X =$ en slumpmässigt vald klykstjärtad stormsvalas livslängd. (2 p)
- Vad är sannolikheten för att en slumpmässigt vald klykstjärtad stormsvala lever längre än 30 år? (3 p)
- Givet att en klykstjärtad stormsvala redan har levat i 30 år, vad är sannolikheten att den därefter lever i 10 år till? (3 p)

Uppgift 3

Man vill veta om den vuxna befolkningen i två städer oroar sig för det ekonomiska läget under det kommande året. I A-stad bor totalt 1132 personer och i B-stad 2510 personer. I båda städerna frågade man 200 personer. I A-stad var det 124 av de tillfrågade som oroade sig, och i B-stad 101.

- Bilda ett approximativt 95%-igt konfidensintervall för skillnaden mellan andelen som oroar sig i A-stad respektive B-stad. (5 p)
- Är skillnaden signifikant? Testa på nivån 5%! (3 p)

Uppgift 4

Ett företag tillverkar spik. Spikarnas vikt är normalfördelad med väntevärde 6.57 g (gram) och standardavvikelsen 0.081 g.

- Givet denna information, vad är sannolikheten för att en slumpmässigt vald spik väger under 6.5 g? (2 p)
- Vad är sannolikheten för att tio slumpvis valda spikar tillsammans väger under 65 g? (3 p)
- Vi plockar slumpmässigt spikar, en och en, ur företagets produktion (som antas vara stor). Vi väger varje spik, och fortsätter tills vi har hittat en spik som väger under 6.5 g. Vad är väntevärdet av det antal spikar vi behöver väga? (3 p)

Uppgift 5

En diskret slumpvariabel X kan anta värdena 0, 1, 2, 3, 4, med sannolikhetsfunktionen

$$p_X(0) = 0.3$$

$$p_X(1) = 0.2$$

$$p_X(2) = 0.2$$

$$p_X(3) = 0.2$$

$$p_X(4) = 0.1$$

- a) Vad är sannolikheten för att X är ett udda tal? (2 p)
- b) Finn väntevärdet av X . (3 p)
- c) Är händelserna " X är udda" och " $X < 2$ " oberoende? Motivering krävs! (3 p)

Uppgift 6

- a) En påse innehåller fem vita kulor och en röd. Du drar två kulor ur påsen, utan återläggning. Vad är sannolikheten för att en kula är röd och en vit? (4 p)
- b) Nu har du två påsar, den från a)-uppgiften med fem vita kulor och en röd, och en ny påse som innehåller tre vita och tre röda kulor. Påsarna ser likadana ut. Du väljer först en påse genom att singla slant (utan att titta i påsen), och drar sedan som förut två kulor ur den. Vad blir nu sannolikheten för att en kula är röd och en vit? (4 p)

Lycka till!