STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT1011, MT102U, MT103U
TENTAMEN
17 augusti 2023

Tentamenslösningar – Sannolikhetslära och statistik för lärare

17 augusti 2023 kl. 8–13

Examinator: Gudrun Brattström, gudrun@math.su.se

Uppgift 1

a) Sortera data i storleksordning: $\{-15, -1, \underline{2, 6}, 9, 16\}$. Medianen är medelvärdet av de två mittersta värdena, alltså $\frac{2+6}{2} = 4$.

b) Variationsbredden är differensen mellan det största och det minsta värdet, alltså

$$16 - (-15) = 31\,.$$

c) Medelvärdet är

$$\frac{2-15-1+9+16+6}{6} = \frac{17}{6} = 2.833\,.$$

d) Standardavvikelsen är

$$\sqrt{\frac{\left(2-\frac{17}{6}\right)^2 + \left(-15-\frac{17}{6}\right)^2 + \left(-1-\frac{17}{6}\right)^2 + \left(9-\frac{17}{6}\right)^2 + \left(16-\frac{17}{6}\right)^2 + \left(6-\frac{17}{6}\right)^2}{6-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.694+318.028+14.694+38.028+173.361+10.028}{5}} = \sqrt{110.967} = 10.53\,.$$

Uppgift 2

a) Båda populationerna är mycket stora, så vi kan anta att vi har två oberoende binomialfördelningar. Andelen nöjda patienter med protes av rostfritt stå är $\hat{p_1} = \frac{49}{68}$ och andelen nöjda patienter med titan är $\hat{p_2} = \frac{55}{70}$. Vi har

$$\begin{aligned} n_1\hat{p_1}(1-\hat{p_1}) &= 68 \cdot \tfrac{49}{68} \cdot \tfrac{19}{68} = \tfrac{931}{68} = 13.7 > 10 \\ n_2\hat{p_2}(1-\hat{p_2}) &= 70 \cdot \tfrac{55}{70} \cdot \tfrac{15}{70} = \tfrac{825}{70} = 11.8 > 10 \end{aligned}$$

Alltså kan formelsamlingens approximativa konfidensintervall användas. I binomialfallet har det formen

$$\begin{aligned} I_{p_1-p_2} &= \hat{p_1} - \hat{p_2} \pm \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p_1}(1-\hat{p_1})}{n_1} + \frac{\hat{p_2}(1-\hat{p_2})}{n_2}} \\ &= \frac{49}{68} - \frac{55}{70} \pm \lambda_{0.975}\sqrt{\frac{\frac{49}{68}(1-\frac{49}{68})}{68} + \frac{\frac{55}{70}(1-\frac{55}{70})}{70}} \\ &= -0.065 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.2013}{68} + \frac{0.1684}{70}} \\ &= -0.065 \pm 1.96 \cdot \sqrt{0.005366} = -0.065 \pm 0.144\,. \end{aligned}$$

Alternativt kan intervallet skrivas som $(-0.209, 0.078)$.

b) Eftersom intervallet av konfidensgrad $1 - 0.05 = 0.95$ innehåller 0, är skillnaden inte signifikant, det vill säga vi kan inte dra slutsatsen att andelen nöjda patienter skiljer sig mellan titan- och rostfritt stålpopulationerna.

Uppgift 3

a) För att f_X ska vara en täthet krävs att arean under kurvan är $= 1$, det vill säga att

$$1 = \int_0^3 c(x+1)dx = c\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^3 = c\left(\frac{9}{2} + 3 - 0 - 0\right) = c \cdot \frac{15}{2}\,.$$

Alltså måste $c = \frac{2}{15}$. Dessutom måste en täthet vara ≥ 0, vilket är uppfyllt eftersom $\frac{2}{15}(x+1) \geq \frac{2}{15} \cdot 1 > 0$ i hela intervallet $0 \leq x \leq 3$.

b) Vi har att

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_0^3 \frac{2}{15}(x^2+x)dx = \frac{2}{15}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{2}{15}\left(\frac{27}{3}+\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{5} = 1.8\,.$$

c) Eftersom $f_X(x) = 0$ för alla $x < 0$ gäller

$$P(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)dx = \int_0^1 \frac{2}{15}(x+1)dx = \frac{2}{15}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 = \frac{2}{15}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{5} = 0.2\,.$$

Uppgift 4

a) Kalla händelsen att en person i butiken stjäl från hyllorna (det vill säga är en tjuv) för T och händelsen att en person har mössa för M. Vad vi vet är att $P(M|T) = 0.9$, $P(M|T^*) = 0.2$ samt att $P(T) = 0.01$. Vi söker $P(T|M)$. Bayes sats ger att

$$\begin{aligned} P(T|M) &= \frac{P(M|T)P(T)}{P(M|T)P(T) + P(M|T^*)P(T^*)} \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.01}{0.9 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot (1-0.01)} = \frac{0.009}{0.009 + 0.198} = 0.0435\,. \end{aligned}$$

b) Enligt lagen om total sannolikhet har vi att

$$P(M) = P(M|T)P(T) + P(M|T^*)P(T^*) = 0.009 + 0.198 = 0.207\,.$$

c) Eftersom $P(M|T) = 0.9$ medan enligt **b)** $P(M) = 0.207 \neq 0.9$, så är händelserna inte oberoende. Man kan också använda definitionen av oberoende, och konstatera att $P(T \cap M) = P(M|T)P(T) = 0.9 \cdot 0.01 = 0.009$, medan $P(M) \cdot P(T) = 0.207 \cdot 0.01 = 0.00207 \neq 0.009$.

Uppgift 5

a) Om vi låter X vara antalet krona, så gäller

$$P(X>2) = P(X=3)+P(X=4) = \binom{4}{3}\cdot 0.54^3\cdot 0.46+\binom{4}{4}\cdot 0.54^4 = 4\cdot 0.0724+1\cdot 0.0850 = 0.375\,.$$

b) Låt Y vara antalet krona när vi kastar myntet 100 gånger. Eftersom $100 \cdot 0.54 \cdot 0.46 = 24.84 > 10$ kan vi använda normalapproximation: Y är ungefärligen normalfördelad med väntevärde $100 \cdot 0.54 = 54$ och standardavvikelse $\sqrt{100 \cdot 0.54 \cdot 0.46} = \sqrt{24.84} = 4.984$. Alltså gäller att

$$\begin{aligned} P(Y \geq 51) &= P\left(\frac{Y-54}{\sqrt{24.84}} \geq \frac{51-54}{\sqrt{24.84}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{51-54}{\sqrt{24.84}}\right) \\ &= 1 - \Phi(-0.60) = 1 - (1 - \Phi(0.60)) = \Phi(0.60) = 0.7257\,. \end{aligned}$$

Om man istället approximerar $P(Y > 50)$ så fås resultatet 0.7881. Halvtalskorrektion, det vill säga man approximerar $P(Y \geq 50.5)$, ger 0.7580.

Not: En exakt beräkning (på dator) av binomialsannolikheterna skulle ge 0.7591.

Uppgift 6

a) Beteckna vikten av plastfolielådan med X. Vi standardiserar:

$$\begin{aligned}
P(26<X<27) &= P\left(\frac{26-26.70}{0.39}<\frac{X-26.70}{0.39}<\frac{27-26.70}{0.39}\right)\\
&= P\left(\frac{X-26.70}{0.39}<\frac{27-26.70}{0.39}\right)-P\left(\frac{X-26.70}{0.39}<\frac{26-26.70}{0.39}\right)\\
&= P\left(\frac{X-26.70}{0.39}<0.77\right)-P\left(\frac{X-26.70}{0.39}<-1.79\right)\\
&= \Phi(0.77)-\Phi(-1.79)=\Phi(0.77)-(1-\Phi(1.79))\\
&= \Phi(0.77)+\Phi(1.79)-1=0.7794+0.9633-1=0.7427\,.
\end{aligned}$$

b) Beteckna skrivpapperslådans vikt med Y. Vi har att

$$E(Y+X)=E(Y)+E(X)=25.15+26.70=51.85\,,$$

och, eftersom vikterna är oberoende,

$$V(Y+X)=V(Y)+V(X)=0.42^2+0.39^2=0.3285\,.$$

Standardavvikelsen av $Y+X$ är därför $\sqrt{0.3285}=0.5731$. Standardisera:

$$\begin{aligned}
P(Y+X>52) &= P\left(\frac{Y+X-51.85}{\sqrt{0.3285}}>\frac{52-51.85}{\sqrt{0.3285}}\right)\\
&= P\left(\frac{Y+X-51.85}{0.5731}>0.26\right)=1-\Phi(0.26)=1-0.6026=0.3974\,.
\end{aligned}$$

c) Vi kan uttrycka olikheten i termer av skillnaden mellan lådornas vikter, på grund av ekvivalensen $X>Y \Leftrightarrow X-Y>0$. Vi har att

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)=26.70-25.15=1.55\,,$$

och, eftersom vikterna är oberoende,

$$V(X-Y)=V(X)+(-1)^2V(Y)=V(X)+V(Y)=0.3285\,.$$

Standardavvikelsen av $X-Y$ är därför $\sqrt{0.3285}=0.5731$. Alltså gäller

$$\begin{aligned}
P(X>Y) &= P(X-Y>0)=P\left(\frac{X-Y-1.55}{\sqrt{0.3285}}>\frac{-1.55}{\sqrt{0.3285}}\right)\\
&= P\left(\frac{X-Y-1.55}{0.5731}>-2.70\right)=1-\Phi(-2.70)=1-(1-\Phi(2.70))\\
&= \Phi(2.70)=0.9965\,.
\end{aligned}$$