

MT1011 – Sannolikhetslära och statistik för lärare – tentamen

Datum 8 januari, 2024

Examinator Daniel Ahlberg

Hjälpmedel Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.

Bedömning Tentamen består av sex uppgifter som kan ge tio poäng vardera.

Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen:

A	B	C	D	E
54	48	42	36	30

Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Uppgift 1. I ett medicinskt försök ingår 50 personer, varav 20 är rökare. Av dessa väljs 25 personer ut slumpmässigt för att testa ett preparat mot högt blodtryck, medan resterande personer får placebo.

- (a) Låt X ange antalet rökare i gruppen som får testa läkemedlet. Bestäm väntevärde och varians av X .
- (b) Beräkna sannolikheten att samtliga rökare hamnar i samma grupp (dvs antingen i gruppen som får läkemedel eller i gruppen som får placebo).

Uppgift 2. I en urna ligger en röd och nio blå kulor. Drag slumpmässigt kulorna en efter en, utan återläggning, tills samtliga tio kulor blivit dragna. Bestäm sannolikheten för följande händelser:

- (a) Den röda kulan blir dragen sist.
- (b) Den röda kulan blir dragen varken först eller sist.
- (c) De två först dragna kulorna har olika färg.

Uppgift 3. Låt X vara en kontinuerlig slumpvariabel med täthetsfunktion givet av $f_X(x) = c(1 - x^2)$ för $-1 < x < 1$, och $f_X(x) = 0$ annars.

- (a) Bestäm c så att ovanstående är en täthet.
- (b) Bestäm väntevärde och varians av X .
- (c) Låt \bar{X} ange medelvärdet av 50 oberoende slumpvariabler med samma fördelning som X . Beräkna approximativt $\mathbb{P}(\bar{X} > 1/5)$.

Uppgift 4. För att undersöka effekten av kalkning av försurade sjöar mättes pH-värdet i åtta jämnstora sjöar. Mätningarna gjordes precis före kalkning, samt ett år efter kalkning. Differenserna kan antas följa en normalfördelning.

pH före kalkning	5.2	5.8	4.3	5.2	4.6	4.7	5.8	5.5
pH efter kalkning	5.6	6.3	4.9	5.8	5.5	5.7	6.1	5.4

- Bestäm ett 95%-igt konfidensintervall för skillnaden i pH före och efter kalkning.
- Testa på signifikansnivån 5% huruvida skillnaden är signifikant.

Uppgift 5. En viss sjukdom uppskattas finnas hos 0.1% av individerna i en population. Ett diagnostiskt test, vilket resulterar i ett positivt eller negativt svar, har utvecklats för att detektera sjukdomen. Testets *sensitivitet* (sannolikhet att en sjuk individ får ett positivt svar) är 99.5% och dess *specificitet* (sannolikheten att en frisk person får ett negativt svar) är 97.0%. En individ väljs slumpmässigt från populationen och testas med det beskrivna testet.

- Vad är sannolikheten att individen får ett positivt testresultat?
- Vad är sannolikheten att individen är sjuk, givet att testresultatet visar positivt?

Uppgift 6. Låt X_1, X_2, \dots, X_n vara ett stickprov från en $N(\mu, \sigma^2)$ -fördelning. Avgör om följande påståenden är korrekta eller ej. Motivera ditt svar.

- Stickprovsmedelvärdet \bar{X} är på nytt $N(\mu, \sigma^2)$ -fördelat.
- Ökad stickprovsstorlek medför i regel ett smalare konfidensintervall för μ .
- Ökad konfidensnivå medför i regel ett smalare konfidensintervall för μ .
- p -värdet för ett hypotestest anger sannolikheten att nollhypotesen H_0 är sann.
- Hypotesen $H_0 : \mu = 0$ kan förkastas på signifikansnivån 5% till fördel för mothypotesen $H_1 : \mu \neq 0$ om ett 95%-igt konfidensintervall för μ ej innehåller värdet 0.