MT1011 tenta 2024-02-22 lösningar

1 (a) För en kontinuerlig variabel X gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1.$$

Vi får

$$1 = \int_0^2 c(2x-x^2)\,dx = c\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = c\left(4-\frac{8}{3}\right) = c\,\frac{4}{3}.$$ 3p

Därmed är $c = \frac{3}{4}$.

(b) Då X är kontinuerlig gäller

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = c\int_0^2 (2x^2-x^3)\,dx$$
$$= c\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = c\left(\frac{16}{3}-4\right) = c\,\frac{4}{3} = 1.$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = c\int_0^2 (2x^3-x^4)\,dx$$
$$= c\left[\frac{2}{4}x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = c\left(8-\frac{32}{5}\right) = c\,\frac{8}{5} = \frac{6}{5}$$ 4p

Därmed $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{6}{5} - 1^2 = \frac{1}{5}$.

(c) Vi får

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = \int_1^{\infty} f_X(x)\,dx = c\int_1^2 (2x-x^2)\,dx$$
$$= c\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = c\left(\left(4-\frac{8}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right)$$ 3p
$$= c\,\frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

2 Välj en kund på måfå, och låt

$M = \{\text{kund bär mössa}\}$ $\quad S = \{\text{kund skjål}\}$.

Vi har givet att

$\mathbb{P}(S) = 0.01$

$\mathbb{P}(M \mid S) = 0.90$ 4p

$\mathbb{P}(M \mid S^c) = 0.10$

(a) Lagen om total sannolikhet ger

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(M|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(M|S^c)\mathbb{P}(S^c)$$
$$= 0.9 \cdot 0.01 + 0.1 \cdot 0.99 = 0.108$$

3p

(b) Bayes sats ger

$$\mathbb{P}(S|M) = \frac{\mathbb{P}(S \cap M)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{\mathbb{P}(M|S) \cdot \mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{0.9 \cdot 0.01}{0.108} \approx 0.083$$

3p

$\boxed{3}$ (a) Viktminskningen mellan individer kan antas oberoende, och vi gör antagandet att den följer en $N(\mu, \sigma)$-fördelning. (Viktminskningen är differensen av två mätningar, så vi har att göra med stickprov i par.)

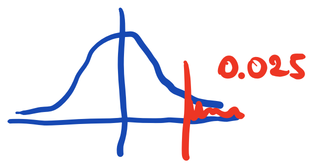
2p

Vi vill ta fram ett 95% KI för μ. Vi har att

$$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \text{ fördelad},$$

där $n=17$. Ett 95% KI ges av

$$\bar{x} \pm t_{0.025}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$



2p

Vi har

$$\bar{x} \approx 2.394$$
$$s = \sqrt{\tfrac{1}{16}\left(\Sigma x_i^2 - 17\bar{x}^2\right)} \approx 2.776$$
$$t_{0.025}(16) = 2.120 \quad \text{(ur tabell)}$$

vilket ger följande KI för μ:

2p

$$2.394 \pm 2.120 \cdot \frac{2.776}{\sqrt{17}} = 2.394 \pm 1.427$$

dvs. $(0.967, 3.821)$.

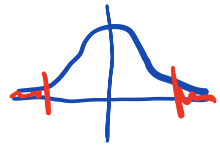
(b) Vi vill testa huruvida bantningsmetoden medför genomsnittlig viktminskning, och ställer upp följande hypotes:

$$H_0: \mu = 0$$
$$H_1: \mu \neq 0$$

2p

Notera att μ är väntevärdet för den normalfördelning som stickprovet antas följa. Vi sätter upp vårt test baserat på statistikan

$$T = \frac{\bar{X}}{s/\sqrt{n}}$$



vilken under H_0 kommer vara $t(n-1)$-fördelad. H_0 förkastas till fördel för H_1 om $|T| \geq t_{0.025}(16) \approx 2.120$, på signifikans-nivå 5%. Detta är ekvivalent med att värdet under H_0, dvs $\mu = 0$, ej ingår i det beräknade 95% KI.

2p

Då vårt KI i (a) ej innehåller 0 så kan H_0 förkastas.

$\boxed{4}$ (a) Då kort delas ut utan återläggning så kommer

$$X = \#\text{ hjärter}$$

att vara $\mathrm{Hyp}(52, 5, \frac{1}{4})$, då 13 av 52 kort är hjärter.

Vi får

$$P(X=0) = \frac{\binom{13}{0}\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{39!\ 5!47!}{5!34!\ 52!} = \frac{39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35}{52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48} \approx 0.222$$

4p

(b) Vi vill nu beräkna

$$P(X=5) = \frac{\binom{13}{5}\binom{39}{0}}{\binom{52}{5}} = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48} \approx 0.000495$$

3p

(c) Då vi vill ha samtliga kort i samma färg får vi

$$\begin{aligned} P(\text{samma färg}) &= P(\text{alla klöver}) + P(\text{alla spader}) \\ &\quad + P(\text{alla ruter}) + P(\text{alla hjärter}) \\ &= 4\cdot P(X=5) \approx 0.00198 \end{aligned}$$

3p

$\boxed{5}$ (a) Antalet barn X i ett hushåll har sannolikhetsfunktion

$p_X(0) = 0.20 \quad p_X(1) = 0.45 \quad p_X(2) = 0.25 \quad p_X(3) = 0.1.$

Detta ger

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 1} k \cdot p_X(k) = 0.45 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.1 = 1.25.$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k \geq 1} k^2 p_X(k) = 0.45 + 4 \cdot 0.25 + 9 \cdot 0.1 = 2.35.$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 2.35 - 1.25^2 = 0.7875.$$

4p

(b) Låt $X_1, X_2, \ldots, X_{3000}$ ange antalet barn i de 3000 hushåll som planeras. Enl. centrala gränsvärdessatsen kommer

$$Z = \frac{1}{\sqrt{3000}} \sum_{k=1}^{3000} \frac{X_k - 1.25}{\sqrt{0.7875}}$$

2p

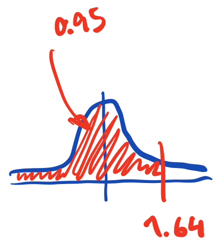
vara approx $N(0,1)$-fördelad.

Vi söker m så att

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{3000} X_k \leq m \right) = 0.95.$$

Detta ger

$$\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{m - 1.25 \cdot 3000}{\sqrt{0.7875}\sqrt{3000}} \right) = 0.95.$$



Enligt tabell gäller $\Phi(1.64) \approx 0.95$.

Det ger

$$1.64 \approx \frac{m - 1.25 \cdot 3000}{\sqrt{0.7875} \cdot \sqrt{3000}}$$

4p

dvs

$$m \approx 1.25 \cdot 3000 + 1.64\sqrt{0.7875} \cdot \sqrt{3000} \approx 3829,7.$$

De bör alltså planera 3830 skolplatser.

$\boxed{6}$ (a) Vi beräknar ett 95% KI för skillnaden mellan de två andelarna. De två stickproven betraktas därmed som oberoende, samt att stickprovsandelarna

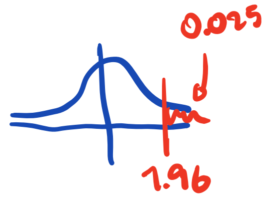
$$\hat{p}_1 \sim \mathrm{Bin}(1000, p_1),$$

$$\hat{p}_2 \sim \mathrm{Bin}(1000, p_2).$$

Från formelsamling erhåller vi ett 95% KI för p_1-p_2 av

$$\hat{p}_1-\hat{p}_2 \pm \lambda_{0.025}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{1000}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{1000}}$$

där $\lambda_{0.025}\approx 1.96$ ur tabell. Beräkning ger



$$0.02 \pm 0.044,$$

dvs $(-0.024, 0.064)$.

4p

(b) Från resultatet i (a) finns det inte skäl att tro att de två andelarna skiljer sig då värdet 0 ingår i intervallet. Hade värdet 0 ej ingått i intervallet hade det tytt på att undersökningarna gjordes på olika populationer, eller att urvalet har systematiska fel. 3p

(c) Låt A_1 resp. A_2 ange händelserna att undersökning ett resp. två ger en majoritet för. Då opinionsläget är jämt gäller

$$\mathbb{P}(A_1)=\mathbb{P}(A_2)\approx\frac{1}{2}.$$

Vi vill beräkna

$$\mathbb{P}\left([A_1\cap A_2^c]\cup[A_1^c\cap A_2]\right)=\mathbb{P}(A_1\cap A_2^c)+\mathbb{P}(A_1^c\cap A_2).$$

Då undersökningarna kan betraktas som oberoende ger ovan 3p

$$2\cdot\mathbb{P}(A_1\cap A_2^c)=2\cdot\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2^c)\approx 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$