

- 1 Den fördelning som uppstår vid dragning utan återläggning är den hypergeometrisk. Dvs. att X är hypergeometriskt fördelad med parametrar $N=45$, $n=5$ och $p = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

Sannolikhetsfunktionen för X ges av

$$P_X(k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{för } k=0,1,\dots,n.$$

3p

(a) Vi får

$$P(X=1) = P_X(1) = \frac{\binom{15}{1} \binom{30}{4}}{\binom{45}{5}} = \frac{15 \cdot \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}}}{\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 5}} \approx \boxed{0.336}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - P_X(0)$$

$$= 1 - \frac{\binom{15}{0} \binom{30}{5}}{\binom{45}{5}} = 1 - \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41} \approx \boxed{0.883}$$

4p

(b) Enligt formelblad ges väntevärde och varians för X av

$$E[X] = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

3p

$$\text{Var}(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1} = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{40}{44} = \frac{5 \cdot 20}{9 \cdot 11} = \boxed{\frac{100}{99}}$$

- 2 Betrakta en slumpvis vald präs och låt $X_1, X_2, \dots, X_{75}$ beteckna vikten på äpplena i präsen. Vikterna kan antas oberoende. Därmed gäller att summan $Y = X_1 + \dots + X_{75}$ uppfyller

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{75} E[X_k] = 75 \cdot 140,$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{k=1}^{75} \text{Var}(X_k) = 75 \cdot 30^2.$$

4p

Enligt centrala gränsvärdesatsen gäller approximativt

$$\frac{Y - E[Y]}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} \approx N(0,1).$$

Därmed får vi

$$P(Y < 10000) = P\left(\frac{Y - 75 \cdot 140}{30 \cdot \sqrt{75}} < \frac{10000 - 75 \cdot 140}{30 \sqrt{75}}\right)$$

$$\approx \Phi(-1.92) = 1 - \Phi(1.92) \approx 1 - 0.9726$$

$$= \boxed{0.0274}$$

6p

3 (a) Då X är kontinuerlig gäller

$$P(X \geq 1/2) = \int_{1/2}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{1/2}^1 (1 - |x|) dx$$

$$= \int_{1/2}^1 (1 - x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{1/2}^1 = (1 - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{8}) = \boxed{\frac{1}{8}} \quad 3p$$

(b) För en kontinuerlig slumpvariabel X bestäms väntevärde enligt formeln

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 x(1 - |x|) dx = \int_{-1}^0 x(1 + x) dx + \int_0^1 x(1 - x) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= -(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \boxed{0} \quad 3p$$

Att väntevärdet blir noll kan även ses direkt pga symmetri.

Variansen ges av uttrycket $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$, där

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 x^2 (1 - |x|) dx = \int_{-1}^0 x^2 (1 + x) dx + \int_0^1 x^2 (1 - x) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

$$= -(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad 4p$$

Därmed har vi $\text{Var}(X) = E[X^2] - 0 = \boxed{1/6}$.

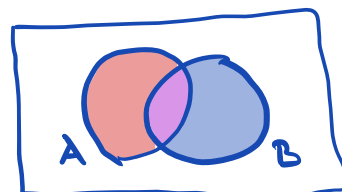
4

Drag en platta slumpvis och låt A ange händelsen att den har färgfel och B händelsen att den har bubblig glassyr. Enligt uppgift gäller

$$P(A) = 0.05$$

$$P(B) = 0.08$$

$$P(A \cap B) = 0.03$$



3p

(a) Efterfrågad sannolikhet ges av

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.05 + 0.08 - 0.03 = \boxed{0.10} \end{aligned}$$

2p

(b) Om defekterna skulle uppstå oberoende av varandra så skulle de två händelserna A och B vara oberoende, dvs uppfylla

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

2p

Det är inte fallet.

(c) Vi vill beräkna sannolikheten för unionen av de röda och blå händelserna i figuren ovan. Det kan göras på olika sätt. Tex gäller $\bullet = A \cap B^c$ samt

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

enl. lagen om total sannolikhet. Detta ger

$$P(\bullet) = P(A) - P(A \cap B) = 0.05 - 0.03 = 0.02.$$

På samma sätt gäller $\bullet = B \cap A^c$ och

$$P(\bullet) = P(B) - P(A \cap B) = 0.08 - 0.03 = 0.05.$$

3p

Då händelserna $\bullet$ och $\bullet$ är disjunkta får vi

$$P(\bullet \cup \bullet) = P(\bullet) + P(\bullet) = 0.02 + 0.05 = \boxed{0.07}.$$

5 (a) Det rör sig om en situation där mätningar utförts två gånger för var individ. Det finns därför ett beroende mellan mätningar för samma individ, men det rimligen ej mellan olika individer. Materialet bör därför analyseras som stickprov i par. 2p

Låt $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ resp. $Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}$ beteckna monteringstid, för ledande resp. konkurrerande producent, för de 10 individerna. Differenserna $D_i = Y_i - X_i$, för $i=1, \dots, 10$, kan därför hanteras som ett stickprov. Vi gör antagandet att differenserna följer en normalfördelning med parameter μ och σ .

Låt $\bar{D} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} D_i$, och $S = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (D_i - \bar{D})^2}$. Ett 95% konfidensintervall för μ ges därmed av

$$\bar{D} \pm t_{0.025}(9) \cdot \frac{S}{\sqrt{10}}$$

där $t_{0.025}(9) \approx 2.262$ är kvantil för $t(9)$ -fördelningen. 3p
Beräkning ges

$$\bar{D} = -4.8$$

$$S \approx 7.25$$

och därmed intervallet -4.8 ± 5.19 dvs $(-9.99, 0.39)$.

(b) Vi ställer upp hypotesen

$$H_0: \mu = 0$$

$$H_1: \mu \neq 0 \quad (\text{All. } H_1: \mu < 0)$$

Vid hypotestest vid signifikansnivå 5% förkastas H_0 om och endast om motsvarande 95% konfidensintervall ej inkluderar värdet på μ som stipuleras av H_0 . 3p

I detta fall innehåller beräknat KI värdet 0, så H_0 kan ej förkastas på signifikansnivå 5%.

- (c) Då de två bokhyllorna beskrivs som likartade så kan det tänkas att en individ vid andra monteringen genomför den snabbare. Lottning av ordningen kan därför vara ett sätt att undvika systematiska fel i försökskonstruktionen. 2p

- 6 (a) Låt de faktiska vikterna av föremål A, B och C betecknas med m_A , m_B och m_C . Låt $X_1, \dots, X_{10}$ beteckna Adams tio vägningar av A. Enligt antagande gäller att de är $N(m_A, \sigma)$ -fördelade, och kan vidare antas oberoende. 3p
Därmed är $\bar{X} \sim N(m_A, \sigma/\sqrt{10})$.

- (b) I likhet med resonemanget ovan gäller

$$\bar{Y}_{AB} \sim N(m_A + m_B, \sigma/\sqrt{10})$$

$$\bar{Y}_{AC} \sim N(m_A + m_C, \sigma/\sqrt{10})$$

$$\bar{Y}_{BC} \sim N(m_B + m_C, \sigma/\sqrt{10})$$

Då samtliga mätningar är oberoende är även Z normalfördelad med 4p

$$E[Z] = \frac{1}{2} [E[\bar{Y}_{AB}] + E[\bar{Y}_{AC}] - E[\bar{Y}_{BC}]] = m_A$$

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{4} [\text{Var}(\bar{Y}_{AB}) + \text{Var}(\bar{Y}_{AC}) + \text{Var}(\bar{Y}_{BC})] = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma^2}{10}.$$

Dvs $Z \sim N(m_A, \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma^2}{10}})$.

- (c) Då $\bar{X}$ samt Z är normalfördelade med känd varians ges felmarginalen motsvarande 95% konfidensnivå av

$$\lambda_{0.025} \cdot D(\bar{X}) \approx 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} \approx 0.930 \text{ gram}$$

$$\lambda_{0.025} \cdot D(Z) \approx 1.96 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} \approx 0.805 \text{ gram} \quad \text{3p}$$

Berit uppnår därmed bättre precision med sin mätmetod.