

- [1] (a) Låt X ange antalet sexor under samtliga 10 kast. Då är $X \sim \text{Bin}(10, 1/6)$. Vi har

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx \boxed{0.838}$$

4p

- (b) Låt Y ange antalet sexor med blå tärningen och Z antalet sexor med röd tärningen. Då är Y och Z oberoende $\text{Bin}(5, 1/6)$ -fördelade.

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= P(Z \geq 1) = 1 - P(Z=0) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.598 \end{aligned}$$

6p

Detta ger

$$P(Y \geq 1, Z \geq 1) = P(Y \geq 1) P(Z \geq 1) \approx 0.598^2 \approx \boxed{0.358}$$

- [2] Låt X ange antalet vinster vid köp av 100. Då är $X \sim \text{Hyp}(N, n, p)$ där $N=2000000$, $n=100$ och $p=429/2000$. Vi använder normalapproximation, vilket kan göras då $np(1-p) \frac{N-n}{N-1} > 10$. Vi får att

$$\frac{X - E[X]}{\sqrt{\text{Var}(X)}} \approx N(0,1).$$

5p

Från formelblad gäller

$$E[X] = np = \frac{100 \cdot 429}{2000} = 21,45$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1} \approx 16,848$$

Vi får

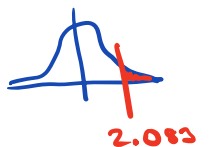
$$P(X \geq 30) \approx P\left(\frac{X - E[X]}{\sqrt{\text{Var}(X)}} \geq \frac{30 - 21,45}{\sqrt{16,848}}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi(2,083)$$

$$\approx 1 - 0.9812 = \boxed{0.0188}$$

← or tabell

5p



- 3 (a) VP har 3000 hushåll. Låt X ange antalet matbröd som ett givet hushåll köper en viss dag. Då gäller

$$P_X(0) = 0.4 \quad P_X(1) = 0.35 \quad P_X(2) = 0.15 \quad P_X(3) = 0.1$$

vilket ger

$$E[X] = 1 \cdot 0.35 + 2 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.1 = 0.95$$

$$E[X^2] = 0.35 + 4 \cdot 0.15 + 9 \cdot 0.1 = 1.85$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 0.9475$$

- (b) För $k=1, 2, \dots, 3000$ låt X_k ange antalet köpta matbröd för hushåll k . Enligt uppgift kan variablerna antas oberoende. Centrala gränsvärdesatsen ger att behovet av matbröd $Y = \sum_{k=1}^{3000} X_k$ en given söndag uppfyller

$$\frac{Y - 3000 \cdot E[X]}{\sqrt{3000 \cdot \text{Var}(X)}} \text{ approx } N(0,1) \text{-fördelat.}$$

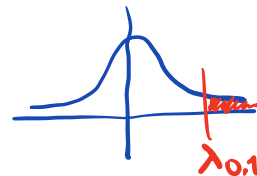
Mer specifikt för vi

$$\begin{aligned} P(Y \leq m) &= P\left(\frac{Y - 3000 \cdot E[X]}{\sqrt{3000 \cdot \text{Var}(X)}} \leq \frac{m - 3000 \cdot E[X]}{\sqrt{3000 \cdot \text{Var}(X)}} \right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{m - 3000 \cdot E[X]}{\sqrt{3000 \cdot \text{Var}(X)}} \right) \end{aligned}$$

VP vill bestämma det minsta m så att $P(Y \leq m) \geq 0.9$. Ur tabell för vi $\Phi(\lambda_{0.1}) = 0.9$ där $\lambda_{0.1} \approx 1.2816$.

Detta ger

$$\begin{aligned} m &\geq \lambda_{0.1} \cdot \sqrt{3000 \cdot \text{Var}(X)} + 3000 E[X] \\ &\approx 2918.32 \end{aligned}$$



Svar: 2919 matbröd behövs.

- 4 Drag en randomiserad slumpmässigt ur populationen. Låt
- $S = \{ \text{random sjuk} \}$
 - $+$ = $\{ \text{test positivt} \}$
 - $-$ = $\{ \text{test negativt} \}$.

Givet ur uppgiften är

$$P(S) = 0.001$$

$$P(+|S) = 0.995$$

$$P(-|S^c) = 0.970.$$

4p

- (a) Lagen om total sannolikhet ger

$$\begin{aligned} P(+) &= P(+|S)P(S) + P(+|S^c) \cdot P(S^c) \\ &= 0.995 \cdot 0.001 + 0.030 \cdot 0.999 \approx 0.0310 \end{aligned}$$

3p

- (b) Bayes sats ger

$$\begin{aligned} P(S|+) &= \frac{P(S \cap +)}{P(+)} = \frac{P(+|S) \cdot P(S)}{P(+)} \\ &\approx \frac{0.995 \cdot 0.001}{0.0310} \approx 0.0321 \end{aligned}$$

3p

- 5 (a) Var observation är medelvärdet av 20 mätvärden. Även om mätvärdena i sig inte följer en normalfördelning så är det enligt centrala gränsvärdesatsen rimligt att anta att medelvärdena är approximativt normalfördelade.

2p

- (b) Då lerkuberna kommer från olika partier lerblandning, och det är tänkbart att sammansättningen i lerblandningen kan påverka utfallet, så bör vi betrakta stickproven som beroende och beräkna konfidensintervall enligt stickprov-i-par.

2p

- (C) Vi betraktar differenserna mellan medelvärdena och beräknar ett konfidenstervall för differensen mellan medelvärdena enligt "stichprov- t -par".

Vi betecknar 1500 observationerna $X_1, \dots, X_5$ och 2000 observationerna $Y_1, \dots, Y_5$ och bildar differenserna

$$\Delta_i = Y_i - X_i.$$

Enligt antaganden konverger därmed

$$\frac{\bar{\Delta} - (\mu_Y - \mu_X)}{s/\sqrt{5}} \approx t(4)\text{-fördelat},$$

där

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{5}(\Delta_1 + \dots + \Delta_5) = \frac{1}{5}(0.4 + 0.2 + 0.2 + 0.9 + 1.0) = 0.54$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (\Delta_i - \bar{\Delta})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 0.592} \approx 0.385$$

Ur tabell får vi $t_{0.025}(4) \approx 2.776$, och ett 95% konfidenstervall för $\mu_Y - \mu_X$ ges då av

6p

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} \pm t_{0.025}(4) \cdot \frac{s}{\sqrt{5}} &\approx 0.54 \pm 2.776 \cdot \frac{0.385}{\sqrt{5}} \\ &\approx 0.54 \pm 0.478, \end{aligned}$$

alternativt uttryckt som $(0.06, 1.02)$.

- [6] (a) Då var hand kan anses lika sannolika så gäller

$$P(\text{samma färg}) = \frac{\# \text{ händer? samma färg}}{\# \text{ händer totalt}}$$

2p

Det totala antalet händer är $\binom{52}{5}$.

Antalet händer med samtliga kort? samma färg är

$$\binom{4}{1} \binom{13}{5}$$

där den första faktorn anger antalet val av färg och andre anger antalet kombinationer av fem kort av de 13 av den färgen.

Vi får

$$P(\text{ samma färg}) = \frac{4 \cdot \frac{13!}{5!8!}}{\frac{52!}{5!47!}} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \approx \boxed{0.00198}$$

4p

(b) Även här gäller

$$P(\text{ käk}) = \frac{\# \text{ händer med käk}}{\# \text{ händer totalt}}$$

Antalet händer som ger käk på 5H

$$\binom{13}{1} \binom{4}{3} \binom{12}{1} \binom{4}{2},$$

där vi först valt valör för trias och tre kort ur den valören,
och sedan valör för par och två kort ur den valören.

$$P(\text{ käk}) = \frac{13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \cdot 5! \approx \boxed{0.00144}$$

4p