

Lösningar

Tentamen i Sannolikhetslära och statistik för lärare, 7 januari 2026

Uppgift 1

- a) Sant
- b) Falskt
- c) Sant
- d) Sant
- e) Sant

Uppgift 2

a) Nettot blir 50 kr mindre än återbetalat belopp, så $p_X(-50) = 0.889$, $p_X(50) = 0.1$, $p_X(950) = 0.01$, $p_X(9950) = 0.001$.

b) Det är aningen lättare att beräkna väntevärde, varians och standardavvikelse för beloppet man får tillbaka Y . Nettot blir sedan $Y - 50$. $E(Y) = 0 \cdot 0.889 + 100 \cdot 0.1 + 1000 \cdot 0.01 + 10\,000 \cdot 0.001 = 30$. $E(Y^2) = 0 \cdot 0.889 + 100^2 \cdot 0.1 + 1000^2 \cdot 0.01 + 10\,000^2 \cdot 0.001 = 111\,000$. Vi får då att $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 110\,100$. Standardavvikelsen blir således $D(Y) = \sqrt{110\,100} \approx 332$. Det efterfrågade väntevärdet blir således $E(Y - 50) = -20kr$. Varians och standardavvikelse blir som för Y eftersom $V(Y - 50) = V(Y)$.

Uppgift 3

a) Eftersom G är motsatsen till F gäller $P(G) = 1 - P(F) = 0.9$. och $P(A|G) = P(A \cup G)/P(G) = P(A)/P(G) = 0.2/0.9 = 0.22$.

b) Sannolikheten att ingen har F är detsamma som att alla har G vilket har sannolikheten $(P(G))^5 = 0.9^5 = 0.59$.

c) Vi söker sannolikheten att alla ska ha A givet att ingen hade F, dvs sannolikheten att alla har A givet att alla har G. Denna sannolikhet blir $(P(A|G))^5 = (0.2/0.9)^5 = 0.00054$.

Uppgift 4

a) Det måste gälla att $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$. I vårt fall betyder detta att $1 = \int_0^1 cx^2dx = [cx^3/3]_0^1 = c/3$ vilket gör att $c = 3$. Täthetsfunktionen är således en andragradskurva startandes i 0 för $x = 0$ och växandes upp till 3 vid slutpunkten $x = 1$.

b) $P(X \leq 0.5) = \int_0^{0.5} 3x^2dx = [x^3]_0^{0.5} = 1/8 = 0.125$.

c) $E(X) = \int_0^1 x \cdot 3x^2dx = [3x^4/4]_0^1 = 3/4 = 0.75$. $E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2dx = [3x^5/5]_0^1 = 3/5 = 0.6$ och $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0.6 - (3/4)^2 = 0.0375$. Standardavvikelsen blir således $D(X) = \sqrt{0.0375} = 0.194$.

Uppgift 5

a) Det gäller att $E(Y) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p = 0.3$. På samma sätt blir $E(Y^2) = p$, så $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = p(1 - p) = 0.21$ och $D(X) = \sqrt{0.21} = 0.458$. Eftersom $X = \sum_{i=1}^{100} Y_i$ för oberoende och likafördelade variabler så gäller $E(X) = 100 \cdot p = 30$ och $V(X) = 100p(1 - p) = 21$ och $D(X) = \sqrt{21} = 4.58$.

b) Enligt centrala gränsvärdessatsen är X approximativt $N(30, \text{std avv} = 4.58)$.

c) Med hjälp av centrala gränsvärdessatsen får vi

$$P(X > 40) = 1 - P(X \leq 40) = 1 - P\left(\frac{X - 30}{4.58} \leq \frac{40 - 30}{4.58}\right) \approx 1 - \Phi(2.18) = 1 - 0.9854 = 0.0146.$$

Approximationen blir ännu lite bättre med s.k. halvatalskorrektion: Det gäller ju att $P(X > 40) = P(X > 40.99)$ och detsamma för alla decimaltal mellan 40.0 och 40.999. Således rimligt att approximera med mittvärdet $P(X > 40.5)$ och sedan som ovan och man får $1 - \Phi(2.29) = 1 - 0.989 = 0.011$.

Uppgift 6

a) Vi får $\bar{x} = 9.13$ och $s_x^2 = 0.935$ respektive $\bar{y} = 11, 18$ och $s_y^2 = 1.13$.

b) Punktskattningen för $\mu_y - \mu_x$ ges av $\bar{y} - \bar{x} = 11.18 - 9.13 = 2.05$. Denna skattning har en varians $V(\bar{Y} - \bar{X}) = V(Y)/6 + V(X)/5 = 1/6 + 1/5 = 0.367$ och standardavvikelse $\sqrt{0.367} = 0.606$. Ett 95% konfidensintervall för $\mu_y - \mu_x$ blir således $\bar{y} - \bar{x} \pm 1.96 \cdot 0.606 =$

$2.05 \pm 1.19 = [0.86, 3.24]$. Eftersom att konfidensintervallet inte täcker in talet 0 så föreligger en statistiskt säkerställd skillnad på medelvikterna: svart trumpetsvamp väger i genomsnitt mer än gul.

c) Vår punktskattning av $\mu_y - \mu_x$ är samma som ovan, dvs $\bar{y} - \bar{x} = 11.18 - 9.13 = 2.05$. Denna skattning har varians $V(\bar{Y} - \bar{X}) = V(Y)/6 + V(X)/5 = \sigma^2(1/6 + 1/5)$. Dock måste vi nu skatta vår okända σ vilket vi gör med den polade stickprovs-standardavvikelsen som blir

$$s_p = \sqrt{\frac{(6-1)s_x^2 + (5-1)s_y^2}{5+6-2}} = 1.022.$$

Vi får då använda t -fördelningen med $6 + 5 - 2 = 9$ frihetsgrader. Konfidensintervallet blir

$$\bar{y} - \bar{x} \pm t_{0.025}(9) \cdot 1.022 \sqrt{1/6 + 1/5} = 2.05 \pm 1.40 = [0.65, 3.45].$$

Således ett bredare intervall än i b), men fortfarande ligger 0 (svarandes mot samma medelvikt) utanför konfidensintervallet, så även under dessa svagare antagande så förkastar vi nollhypotesen: svart trumpetsvamp har en signifikant högre genomsnittsvikt än gul.