

Lösningar

Tentamen i Sannolikhetslära och statistik för lärare, 7 januari 2026

Uppgift 1

- a) Falskt
- b) Falskt
- c) Sant
- d) Sant
- e) Falskt

Uppgift 2

a) Vi kallar $p_X(1) = c$. Då gäller tydligen $p_X(2) = c/2$ och $p_X(3) = c/4$. Det ska gälla att $1 = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = c(1 + 1/2 + 1/4) = c * 7/4$. Således måste $c = 4/7$, och vi får $p_X(1) = 4/7$, $p_X(2) = 2/7$ och $p_X(3) = 1/7$ ($p_X(k) = 0$ för övriga k).

b) Vi får $E(X) = 1 * p_X(1) + 2 * p_X(2) + 3 * p_X(3) = 11/7$. Vi får vidare att $E(X^2) = 1^2 * p_X(1) + 2^2 * p_X(2) + 3^2 * p_X(3) = 21/7 = 3$. Således blir $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3 - 121/49 = 26/49 \approx 0.53$. Slutligen blir standardavvikelsen $D(X) = \sqrt{V(X)} \approx 0.73$.

Uppgift 3

a) Det gäller att $f_Y(y) \geq 0$ för alla y , och $\int_0^3 f_Y(y) dy = (2/9) \int_0^3 y dy = (2/9)(9/2 - 0) = 1$, så kriterierna är uppfyllda. Tätheten är en rätt linje startandes i $f_Y(0) = 0$ och slutandes i $f_Y(3) = 6/9$

b) Eftersom tätheten växer så kommer det vara mer sannolikhet höger om mittpunkten 1.5, dvs $P(Y > 1.5) > 0.5$ och väntevärdet kommer vara större än 1.5, dvs $E(Y) > 1.5$.

c) $P(Y > 1.5) = \int_{1.5}^3 (2/9)y dy = (2/9)(9/2 - 1.5^2/2) = 0.75$. Och väntevärdet blir $E(Y) = \int_0^3 y(2/9)y dy = (2/9) \int_0^3 y^2 dy = (2/9)(3^3/3 - 0) = 2$.

Uppgift 4

a) Eftersom $Z_1, \dots, Z_{50}$ är likafördelade med $E(Z) = 2$ och $V(Z) = 1$ så blir $E(S) = 50E(Z) = 100$ och $V(S) = 50V(Z) = 50$, och därmed $D(S) = \sqrt{50} \approx 7.1$.

b) Tack vare centrala gränsvärdessatsen (många slumpvariabler blir tillsammans approximativt normalfördelade), så $S \sim N(E(S) = 100, D(S) = \sqrt{50})$.

c) Vi får

$$\begin{aligned} P(S > 110) &= 1 - P(S \leq 110) = 1 - P\left(\frac{S - 100}{\sqrt{50}} \leq \frac{110 - 100}{\sqrt{50}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{110 - 100}{\sqrt{50}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.41) = 1 - 0.921 = 0.079. \end{aligned}$$

Uppgift 5

a) Betrakta gissningarna sekventiellt och låt G_1 vara händelsen att första gissningen är rätt, och motsvarande för G_2 och G_3 . För att lösa uppgiften är det enklast att först betinga på hur ens första gissning går. Denna blir rätt med sannolikhet $1/3$.

Uppgift 6

a) Vi får $\bar{x} = 4.0$ och $s^2 = (1/(6-1)) \sum_i (x_i - 4)^2 = 0.2((-0.6)^2 + (-0.3)^2 + 0.3^2 + 0.7^2 + (-0.1)^2 + 0) = 0.208$, så $s = \sqrt{0.208} \approx 0.456$.

b) Väntevärdet μ skattas med $\bar{x} = 4.0$. Ett 95% konfidensintervall ges av $\bar{x} \pm t_{0.025} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4.0 \pm 1.96 * 0.5/\sqrt{6} = 4.0 \pm 0.40$.

c) Om σ är okänd så skattas den med $s = 0.456$ och motsvarande konfidensintervall ges av $\bar{x} \pm t_{0.025}(6-1) \frac{s}{\sqrt{n}} = 4.0 \pm 2.571 \frac{0.456}{\sqrt{6}} = 4.0 \pm 0.479$. Eftersom nollhypotesens värde ($\mu = 3.5 \text{ kg}$) ligger långt utanför intervallet så förkastas denna hypotes.