

Lösningar

Tentamen i Sannolikhetslära och statistik för lärare, 17 augusti 2026

Uppgift 1

- a) Sant
- b) Falskt
- c) Sant
- d) Sant
- e) Sant

Uppgift 2

a) De möjliga utfallen är $\Omega = \{1, 2, \dots, 100\}$

b) För att få vinsten i dragning k måste man ha fått nitlott de $k - 1$ första dragen, och vid dragning j finns $100 - (j - 1)$ lotter totalt varav alla utom en är nitlott. För $k \in \Omega$ gäller således

$$p_X(k) = P(X = k) = \frac{99}{100} \cdot \frac{98}{99} \cdots \frac{99 - (k - 2)}{100 - (k - 2)} \cdot \frac{1}{100 - (k - 1)} = \frac{1}{100}.$$

c) Det är alltså samma sannolikhet för alla möjliga utfall. Det är således likformig sannolikhetsfördelning på talen 1 till 100. Väntevärdet ges av $E(X) = \sum_k k p_X(k) = \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} k = (1 + 2 + \cdots + 100)/100 = 100 \cdot 101/2 \cdot 100 = 50.5$. (Att det inte blir exakt 50 beror på att 0 inte är ett möjligt utfall).

Uppgift 3

a) Det måste gälla att $\int_0^5 f_Y(y)dy = 1$. Men $\int_0^5 cydy = [cy^2/2]_0^5 = 12.5c$. Således måste $c = 1/12.5 = 0.08$.

b) En växande rät linje som startar i (0,0) och slutar i (5,0.4).

c) Eftersom tätheten ligger mellan 0 och 5, och tätheten är växande, dvs mer sannolikhet ju större värde, så måste $P(Y > 2.5)$ vara mer än 0.5, och $E(Y)$ måste vara större än 2.5.

d) $P(Y > 2.5) = \int_{2.5}^5 0.08ydy = [0.08(y^2/2)]_{2.5}^5 = 1 - 0.25 = 0.75$. Och $E(Y) = \int_0^5 y * 0.08ydy = \dots = 3.33$

Uppgift 4

Låt X ange medeltemperaturen en enskild dag. Då gäller alltså $X \sim N(\mu = 17, \sigma = 3)$.

a)

$$P(X < 14) = P\left(\frac{X - 17}{3} < \frac{14 - 17}{3}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.841 = 0.159,$$

där $\Phi(1.00)$ avläses från normalfördelningstabellen.

b)

$$P(X > 23) = P\left(\frac{X - 17}{3} > \frac{23 - 17}{3}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.977 = 0.023,$$

där $\Phi(2.00)$ avläses från normalfördelningstabellen.

c) Låt X_1 resp X_2 vara medeltemperaturen de två aktuella dygnen. Då är dessa oberoende med fördelningen ovan. Således gäller

$$P(X_1 > 20, X_2 > 20) = P(X_1 > 20)P(X_2 > 20) = p(X > 20)^2$$

Och $P(X > 20) = 1 - \Phi(2) = 0.1587$, så svaret blir $0.1587^2 = 0.0252$

Uppgift 5

a) Låt Z ange vikten för en enskild chokladkaka. Då gäller alltså att $Z \sim N(\mu = 102, \sigma = 1)$. Vi får direkt att $P(X < 100) = P((X - 102)/1 < (100 - 102)/1) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$.

b) Det gäller att $Y = Z_1 + \dots + Z_{10}$, där $Z_1, \dots$ är vikten på oberoende chokladkakor. Summan av normalfördelningar är normalfördelad, så det återstår att beräkna väntevärde och standardavvikelse. $E(Y) = 10E(Z) = 1020g$. Eftersom chokladkakorna har oberoende vikt

så blir variansen på summan $V(Y) = V(Z_1 + \dots + Z_{10}) = 10V(z) = 10$. Standardavvekslen blir således $D(Z) = \sqrt{10}$. Och vi får således att $Z \sim N(\mu = 1020g, \sigma = 3.33)$.

c)

$$P(Z < 1000) = P\left(\frac{Z - 1020}{3.33} < \frac{1000 - 1020}{3.33}\right) = \Phi(-6.32) = 1 - \Phi(6.30) = 1 - 1 = 0$$

Sannolikheten är alltså inte exakt 0, men kanske 10^{-8} eller så.

d) I både a) och c) är vi intresserade av en avvikelse på 2% från väntevärdet. I a) gäller det en enskild observation, och i c) medelvärdet (eller summan). Stora talens lag säger då att avvikelser på en given procent blir allt mindre ju fler observationer man tar medelvärdet av. Eller mer konkret. En enskild chokladkaka kan råka väga klart mindre än sitt väntevärde, men att medelvärdet av 10 chokladkakor ska ha samma avvikelse är mycket mindre. Eller som det visar sig, försumbar.

Uppgift 6

a) Vi får $\bar{x} = 4.0$ och $s^2 = (1/(6-1)) \sum_i (x_i - 4.0)^2 = 0.2((-0.6)^2 + (-0.3)^2 + 0.3^2 + 0.7^2 + (-0.1)^2 + 0) = 0.208$, så $s = \sqrt{2.08} \approx 0.456$.

b) Väntevärdet μ skattas med $\bar{x} = 4.0$. Ett 95% konfidensintervall ges av $\bar{x} \pm \lambda - 0.025 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4.0 \pm 1.96 * 0.5/\sqrt{6} = 4.0 \pm 0.40$.

c) Om σ är okänd så skattas den med $s = 0.456$ och motsvarande konfidensintervall ges av $\bar{x} \pm t_{0.025}(6-1) \frac{s}{\sqrt{n}} = 4.0 \pm 2.571 \frac{0.456}{\sqrt{6}} = 4.0 \pm 0.479$. Eftersom nollhypotesens värde ($\mu = 3.5kg$) ligger långt utanför intervallet så förkastas denna hypotes.