STOCKHOLMS UNIVERSITET,
MATEMATISKA INSTITUTIONEN,
Avd. Matematisk statistik

Lösningsförslag

Tentamen: Spelteori och matematisk ekonomi (MT3005), 2024-01-08

Problem 1

(A) Notera att flera olika men essentiellt ekvivalenta definitioner kan vara acceptabla. Jmfr. sid 22, 23 eller 36 i *An introduction to game theory* av Osborne.

(B) En blandad strategi (i ett strategiskt spel) för spelare i är en sannolikhetsfördelning över en spelare i:s möjliga handlingar; jmfr. s 107 i *An introduction to game theory* av Osborne.

Problem 2

Vi markerar bästa responser med * (jmfr. Osborne s. 37) enligt

	C	D
C	6*,5*	0,0
D	0,1	1*,2*

och drar slutsatsen att (C, C) och (D, D) är samtliga Nashjämvikter i rena strategier.

Problem 3

(1) Man kan besvara den första delen av uppgiften antingen enligt nedan, eller genom att göra beräkningarna i andra delen (se **(2)** nedan) och notera att man där erhåller samtliga två rena Nashjämvikter.

Vi skriver ut spelet i tabellform och markerar bästa responser

	E	F
E	0,0	1*,5*
F	5*,1*	0,0

Det följer att (E, F) (dvs. spelare 1 väljer E och spelare 2 väljer F) och (F, E) är samtliga Nashjämvikter i rena strategier.

(2) Låt p vara sannolikheten att spelare 1 väljer E, och låt q vara sannolikheten att spelare 2 väljer E. Det följer att

$$\begin{aligned} u_1(p, q) &= pq \cdot 0 + p(1-q) \cdot 1 + (1-p)q \cdot 5 + (1-p)(1-q) \cdot 0 \\ &= p(1-6q) + 5q. \end{aligned}$$

På samma sätt erhålls

$$u_2(p, q) = q(1-6p) + 5p.$$

Detta motsvarar bästaresponsfunktionerna

$$BR_1(q) = \begin{cases} 1, & q < 1/6 \\ [0,1], & q = 1/6 \\ 0, & q > 1/6, \end{cases}$$

och

$$BR_2(p) = \begin{cases} 1, & p < 1/6 \\ [0,1], & p = 1/6 \\ 0, & p > 1/6. \end{cases}$$

Det följer att de enda paren (p, q) sådana att följande villkor håller

$$\begin{aligned} p &\in BR_1(q) \\ q &\in BR_2(p), \end{aligned}$$

är $(p,q) = (0,1)$, $(p,q) = (1,0)$ och $(p,q) = (1/6, 1/6)$ (man kan exempelvis rita en figur för att inse detta, jmfr sid 113 i Osbourne, men det inses även enkelt direkt av bästaresponsfunktionerna); varvid vi drar slutsatsen att dessa är tre Nashjämvikter (och att inga andra finns).

Notera att $(p,q) = (0,1)$ och $(p,q) = (1,0)$ motsvarar Nashjämvikter i rena strategier (dvs. de vi hittat i **(1)** ovan).

Problem 4

(A) c motsvarar kostnaden för att producera en enhet av varan. $P(q)$ motsvarar marknadspriset för varan givet att det finns q enheter av varan på marknaden.

(B) Med enkla beräkningar skriver vi vinst/förlust-funktionen för P1 som

$$\Pi_1(q_1, q_2) = \begin{cases} q_1(\alpha - c - q_1 - q_2), & q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -cq_1, & q_1 + q_2 > \alpha. \end{cases}$$

Låt oss identifiera bästaresponsfunktionen $b_1(q_2)$ för P1. Notera först att maximering av $f(q_1) := q_1(\alpha - c - q_1 - q_2), q_1 \geq 0$, motsvarar punkten,

$$q_1' = \frac{\alpha - c - q_2}{2},$$

om $\alpha - c - q_2 > 0$ (villkor **A**), och

$$q_1' = 0,$$

om $\alpha - c - q_2 \leq 0$; för att se detta löser vi $f'(q_1) = 0$ vilket ger oss maxpunkten om derivatan är lika med noll för ett positivt q_1-värde, och i annat fall erhålls maxpunkten av ändpunkten 0.

Notera att $q_1' + q_2 = \frac{\alpha - c - q_2}{2} + q_2 = \frac{\alpha - c + q_2}{2}$. Det följer att $q_1' + q_2 \leq \alpha$ om $q_2 \leq \alpha - c$, vilket vi noterar håller om villkor **A** är uppfyllt.

Ovanstående ger bästaresponsfunktionen

$$b_1(q_2) = \begin{cases} \frac{\alpha - c - q_2}{2}, & \alpha - c - q_2 \geq 0 \\ 0, & \alpha - c - q_2 < 0. \end{cases}$$

På samma sätt hittar vi bästaresponsfunktionen för P2

$$b_2(q_1) = \begin{cases} \frac{\alpha - c - q_1}{2}, & \alpha - c - q_1 \geq 0 \\ 0, & \alpha - c - q_1 < 0. \end{cases}$$

Låt oss identifiera en Nashjämvikt. Med en lämplig standardmetod löser vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{\alpha - c - q_1}{2} \\ q_1 &= \frac{\alpha - c - q_2}{2} \end{aligned}$$

och erhåller

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{\alpha - c}{3}, \frac{\alpha - c}{3} \right).$$

För denna handlingsplan är det nu enkelt att verifiera att

$$\begin{aligned} q_1^* &= b_1(q_2^*) \\ q_2^* &= b_1(q_2^*), \end{aligned}$$

och vi drar alltså slutsatsen att (q_1^*, q_2^*) är en Nashjämvikt.

Företags 1:s vinst blir:

$$\begin{aligned} \Pi_1(q_1^*, q_2^*) &= q_1^*(\alpha - c - q_1^* - q_2^*) \\ &= \frac{\alpha - c}{3}(\alpha - c - \frac{\alpha - c}{3} - \frac{\alpha - c}{3}) \\ &= \frac{(\alpha - c)^2}{9}. \end{aligned}$$

På samma sätt erhålls

$$\Pi_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{(\alpha - c)^2}{9}.$$

Den sammanlagt producerade kvantiteten blir

$$q_1^* + q_2^* = \frac{\alpha - c}{3} + \frac{\alpha - c}{3} = \frac{2}{3}(\alpha - c).$$

Problem 5

Första frågan. Vi markerar bästa responser med * (jmfr. Osborne s. 37) enligt

	G	H
G	6*,5*	1*,0
H	0,1*	0,0

och vi drar slutsatsen att (G, G) är unik Nashjämvikt om vi endast tillåter rena strategier.

Andra frågan. Låt p vara sanolikheten att $P1$ (spelare 1) väljer G och q vara sanolikheten att $P2$ (spelare 2) väljer G. De (förväntade) värdena blir:

$$\begin{aligned} u_1(p,q) &= pq \cdot 6 + p(1-q) \cdot 1 + (1-p)q \cdot 0 + (1-p)(1-q) \cdot 0 = 5pq + p \\ u_2(p,q) &= pq \cdot 5 + p(1-q) \cdot 0 + (1-p)q \cdot 1 + (1-p)(1-q) \cdot 0 = 4pq + q. \end{aligned}$$

Det följer att bästa responsfunktionerna ges av $BR_1(q) = 1$ för alla $q \in [0,1]$ och $BR_2(p) = 1$ för alla $p \in [0,1]$; och således är alla Nashjämvikter rena, varvid den funna Nashjämvikten (G,G) är unik.

Problem 6

(A) Vi erhåller

$$\mathit{\Pi}_1(b_1, b_2) = \begin{cases} 10 - b_2, & b_1 \geq b_2 \\ -b_1, & b_1 < b_2 \end{cases}$$

$$\mathit{\Pi}_2(b_1, b_2) = \begin{cases} 5 - b_1, & b_2 > b_1 \\ -b_2, & b_2 \leq b_1. \end{cases}$$

(B) Första frågan. Betrakta $(b_1, b_2) = (1,1)$. Vi har att $\mathit{\Pi}_2(1,1) = -b_2 = -1$. Vi har även exempelvis att $\mathit{\Pi}_2(1,0) = 0$, och $P2$ vill alltså att avvika ifrån handlingsplanen $(b_1, b_2) = (1,1)$ (exempelvis ger $b_2 = 15$ ett högre värde), varvid $(b_1, b_2) = (1,1)$ inte är en Nashjämvikt.

Andra frågan. Betrakta $(b_1, b_2) = (0,10)$. Vi har $\mathit{\Pi}_1(0,10) = -b_1 = 0$ och $\mathit{\Pi}_2(0,10) = 5 - b_1 = 5 - 0 = 5$.

Låt oss analysera vad som händer om spelare 1 avviker:

- om $b_1 \in (0,10) \Rightarrow \mathit{\Pi}_1(b_1, 10) = -b_1 < 0$,
- om $b_1 \in [10, \infty) \Rightarrow \mathit{\Pi}_1(b_1, 10) = 10 - b_2 = 0$.

Det följer att spelare 1 inte har någon anledning att avvikka ifrån $(b_1, b_2) = (0,10)$.

Låt oss analysera vad som änder om spelare 2 avviker:

- om $b_2 = 0 \Rightarrow \mathit{\Pi}_2(0, b_2) = -b_2 = 0$,
- om $b_2 > 0 \Rightarrow \mathit{\Pi}_2(0, b_2) = 5 - b_1 = 5 - 0 = 5$.

Det följer att spelare 2 inte har någon anledning att avvikka ifrån $(b_1, b_2) = (0,10)$.

Ovanstående beräkningar visar att $(b_1, b_2) = (0,10)$ är en Nashjämvikt.

Tredje frågan. Med argument analoga med ovanstående kan vi visa att även exempelvis $(b_1, b_2) = (0,11)$ är en Nashjämvikt (mer generellt är alla $(b_1, b_2) = (0, b_2)$ där $b_2 \geq v_1 = 10$ Nashjämvikter). Det följer alltså att det inte finns en unik Nashjämvikt för detta spel.