STOCKHOLMS UNIVERSITET,
MATEMATISKA INSTITUTIONEN,
Avd. Matematisk statistik

Lösningsförslag

Tentamen: Spelteori och matematisk ekonomi (MT3005), 2025-01-14

Problem 1

(A) Spelare. Spelarfunktion. Preferenser. Terminala historier.
(B) Optimeringsproblemet är

$$\max_{a \in A} u_1(a, a_3).$$

Problem 2

(i) Vi markerar de bästa responserna och får

	C	D
A	$8^*, 4^*$	$1^*, 0$
B	$0,4^*$	$0,0$

Vi drar slutsatsen att (A, C) är den enda Nashjämvikten i rena strategier.

(ii) Låt p vara sanolikheten att spelare 1 väljer A och q vara sanolikheten att spelare 2 väljer C. De (förväntade) värdena blir:

$$\begin{aligned} u_1(p,q) &= pq \cdot 8 + p(1-q) \cdot 1 + (1-p)q \cdot 0 + (1-p)(1-q) \cdot 0 = 7pq + p \\ &= p(7q+1) \\ u_2(p,q) &= pq \cdot 4 + p(1-q) \cdot 0 + (1-p)q \cdot 4 + (1-p)(1-q) \cdot 0 \\ &= 4q. \end{aligned}$$

Detta motsvarar bästaresponsfunktionerna

$$BR_1(q) = 1, \;\; q \in [0,1],$$

och

$$BR_2(p) = 1, \;\; p \in [0,1].$$

Det enda paret (p, q) sådant att

$$\begin{aligned} p &\in BR_1(q) \\ q &\in BR_2(p), \end{aligned}$$

är således $(p, q) = (1, 1)$, och vi drar slutsatsen att detta är den enda Nashjämvikten. Notera att $(p, q) = (1, 1)$ motsvarar den rena Nashjämvikten (A, C) (dvs. den vi tidigare hittat).

Problem 3

(i)

$$\Pi_i(b_1, ..., b_n) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{om } b_i \geq b_j \text{ för alla } i \neq j, \text{ och } b_i > b_k \text{ för alla } k < i \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

(Notera att det finns flera ekvivalenta sätt formulera funktionen).

(ii) Ja, handlingsplanen $(b, b, ..., b)$ med $b = v_1$ är en Nashjämvikt. Låt oss visa detta. Med $b = v_1$ erhålls:

Vi har $\Pi_1(b, b, ..., b) = v_1 - b = v_1 - v_1 = 0$ och $\Pi_i(b, b, ..., b) = 0$ för alla $i \geq 2$.

Låt oss analysera vad som händer om spelare 1 avviker:

- om $b_1 > b = v_1 \Rightarrow \Pi_1 = v_1 - b_1 < 0$,
- om $b_1 < b = v_1 \Rightarrow \Pi_1 = 0$ (spelare 1 vinner ej auktionen).

Det följer att spelare 1 inte har någon anledning att avvika.

Låt oss analysera vad som händer om spelare $i \geq 2$ avviker:

- om $b_i > b = v_1 \Rightarrow \Pi_i = v_i - b_i < v_i - v_1 < 0$,
- om $b_i < b = v_1 \Rightarrow \Pi_i = 0$ (spelare i vinner ej auktionen).

Det följer att spelare 2 inte har någon anledning att avvika.

Ovanstående beräkningar visar att $(b, b, ..., b)$ med $b = v_1$ är en Nashjämvikt.

(iii) Nej, alla Nashjämvikter är sådana att spelare 1 vinner. Detta inses genom följande argument:

Betrakta en handlingsplan $(b_1, ..., b_n)$. Låt b_i vara högsta budet och låt $b_1 < b_i$, vilket krävs för att spelare 1 **inte** ska vinna. (Om flera har lagt högsta budet låter vi spelare i vara budgivaren med högst värdering bland dem, det vill säga spelare i är den som vinner auktionen). Då gäller:

- I fallet $b_i > v_2$, har vi $\Pi_i = v_i - b_i < v_i - v_2 \leq 0$; det vill säga i detta fall tjänar spelare i på att avvika genom att exempelvis sätta $b_i = 0$ (vilket ger $\Pi_i = 0$.
- I fallet $b_i \leq v_2$ har vi följande observationer: Enligt föreslagen handlingsplan har vi $\Pi_1 = 0$ (spelare 1 vinner ej). Om spelare 1 avviker genom att sätta $b_1 = v_2$, så vinner spelare 1 och erhåller $\Pi_1 = v_1 - v_2 > 0$; det vill säga i detta fall tjänar spelare 1 på att avvika.

Observationerna ovan motsvarar att i alla fall gäller att någon spelare vill avvika givet att handlingsplanen $(b_1, ..., b_n)$ är sådan att spelare 1 inte vinner, varvid en sådan handlingsplan inte kan vara en Nashjämvikt.

Problem 4

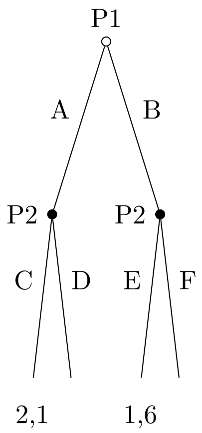
(i) Vi erhåller följande tabell för spelet där vi även markerat alla bästa responser. I tabellen ser vi alltså att (A,CE), (A,CF), (A,DE), och (A,DF), är samtliga NJ:er (i rena strategier).

	CE	CF	DE	DF
A	2*,1*	2*,1*	4*,1*	4*,1*
B	1,6*	0,0	1,6*	0,0

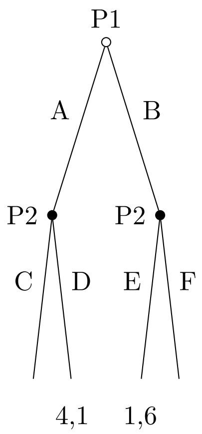
(ii) Vi letar nu efter samtliga delspelsperfekta Nashjämvikter:

- I det första delspelet av längd 1 (vilket motsvarar att P2 väljer antingen C eller D) gäller att både C och D är optimala.
- I det andra delspelet av längd 1 (vilket motsvarar att P2 väljer antingen E eller F) gäller att E är optimalt.

Motsvarande delspel av längd 2 ges av



och



Den optimala handlingen (för P1) blir således A i båda versionerna av spelet. Det följer att de delspelsperfekta Nashjämvikterna är (A,CE) och (A,DE).

Problem 5

(i) Vi erhåller

	C	D
C	2,2	0,5*
D	5*,0	1*,1*

och ser att (D, D) är unik Nashjämvikt.

(ii) Detta motsvarar ett ändligt upprepat fångarnas dilemma. Uppgiften kan lösas på flera olika sätt. Här gör vi det genom att visa att den unika delspelsperfekta Nashjämvikten är att båda spelarna väljer D i varje period (oavsett historia). Detta inses genom baklänges-induktion:

- Vid T så är delspelet helt enkelt spelet i frågan (i) som (enligt svaret ovan) har unik Nashjämvikt (D, D), oavsett historia.
- Vid $T-1$. Vilka handlingar som väljs påverkar endast spelet vid $T-1$ (detta följer av punkten ovan: notera särskilt "oavsett historia" där). Det följer att den unika Nashjämvikten för delspelet vid $T-1$ motsvarar att (D, D) väljs vid $T-1$, oavsett historia.
- Vid $T-2$ gör vi observationer analoga med dem ovan.
- Vid $T-3$ kan vi igen göra observationer analoga med dem ovan, och samma sak gäller ännu tidigare tidpunkter.

Observationerna ovan implicerar att strategi-planen som motsvarar att båda spelarna väljer D i varje period (oavsett historia) är en unik delspelsperfekt Nashjämvikt.

Problem 6

Version A av spelet är:

	E	F
E	4,4*	0,0
F	0,0	3,4*

där vi markerat bästaresponserna för spelare 2 (typ A).

Version B av spelet är:

	E	F
E	4,0	0,10*
F	0,0	3*,4*

där vi markerat bästaresponserna för spelare 2 (typ B).

Vi erhåller följande (förväntade) värden för spelare 1:

	(E,E)	(E,F)	(F,E)	(F,F)
E	4*	0,5(4+0)=2*	0,5(0+4)=2*	0
F	0	0,5(3+0)=1,5	0,5(0+3)=1,5	3*

(där vi markerat bästaresponserna för spelare 1).

Vi identifierar samtliga Nashjämvikter genom att undersöka samtliga (rena) handlingsplaner:

1. $(E, (E, E))$ är inte en Nashjämvikt, eftersom spelare 2 typ B vill avvika.
2. $(E, (E, F))$ är en Nashjämvikt, eftersom varken spelare 1, spelare 2 typ A, eller spelare 2 typ B vill avvika.
3. $(E, (F, E))$ är inte en Nashjämvikt, eftersom (exempelvis) spelare 2-typ A vill avvika.

4. $(E,(F,F))$ är inte en Nashjämvikt (använd argument liknande ovan för att inse detta).
5. $(F,(E,E)$ är inte en Nashjämvikt (använd argument liknande ovan).
6. $(F,(E,F))$ är inte en Nashjämvikt (använd argument liknande ovan).
7. $(F,(F,E))$ är inte en Nashjämvikt (använd argument liknande ovan).
8. $(F,(F,F))$ är en Nashjämvikt (använd argument liknande ovan).