STOCKHOLMS UNIVERSITET,
MATEMATISKA INSTITUTIONEN,
Avd. Matematisk statistik

Lösningsförslag

Tentamen: Spelteori och matematisk ekonomi (MT3005), 2025-02-27

Problem 1

(A) Se exempelvis kursboken (Osborne) runt sidorna 165-166.

(B) Antag att $p_i \in [0,1]$ för alla $i = 1, ..., m$ och att $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Låt p_1 vara sannolikheten att spelaren väljer alternativ a_1; låt p_2 vara sannolikheten att spelaren väljer alternativ a_2, och så vidare. I detta fall motsvarar $(p_1, ..., p_m)$ en blandad strategi över $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Se även Osborne, exempelvis kapitel 4.3.

Problem 2

Vi markerar bästaresponser för spelare 2:

Spel givet att spelare 2 är av typ A:

	E	F
E	9,9*	0,0
F	0,0	3,3*

Spel givet att spelare 2 är av typ B:

	E	F
E	9,9	0,18*
F	0,0	3,3*

Vi erhåller följande (förväntade) värden med motsvarande bästaresponser för spelare 1:

	(E,E)	(E,F)	(F,E)	(F,F)
E	9*	0,5(9+0)=4,5*	0,5(0+9)=4,5*	0
F	0	0,5(3+0)=1,5	0,5(0+3)=1,5	3*

Vi identifierar samtliga Nashjämvikter genom att undersöka samtliga (rena) handlingsplaner:

1. $(E,(E,E))$ är inte en Nashjämvikt, eftersom spelare 2 typ B vill avvika.
2. $(E,(E,F))$ är en Nashjämvikt, eftersom varken spelare 1, spelare 2 typ A, eller spelare 2 typ B vill avvika.
3. $(E,(F,E))$ är inte en Nashjämvikt, eftersom (exempelvis) spelare 2-typ A vill avvika.
4. $(E,(F,F))$ är inte en Nashjämvikt (använd argument liknande ovan för att inse detta).
5. $(F,(E,E)$ är inte en Nashjämvikt (använd argument liknande ovan).
6. $(F,(E,F))$ är inte en Nashjämvikt (använd argument liknande ovan).

7. $(F, (F, E))$ är inte en Nashjämvikt (använd argument liknande ovan).

8. $(F, (F, F))$ är en Nashjämvikt (använd argument liknande ovan).

Problem 3

Vi markerar de bästa responserna och får

	A	B
A	$7^*, 1^*$	0,0
B	4,0	$1^*, 8^*$

Vi drar slutsatsen att (A, A) och (B, B) är de enda Nashjämvikterna i rena strategier. Låt p vara sanolikheten att spelare 1 väljer A och q vara sanolikheten att spelare 2 väljer B. De (förväntade) värdena blir:

$$\begin{aligned}
u_1(p, q) &= pq \cdot 7 + p(1-q) \cdot 0 + (1-p)q \cdot 4 + (1-p)(1-q) \cdot 1 = 4pq + 1 - p + 3q \\
&= p(4q - 1) + 1 + 3q \\
u_2(p, q) &= pq \cdot 1 + p(1-q) \cdot 0 + (1-p)q \cdot 0 + (1-p)(1-q) \cdot 8 = 9pq + 8 - 8p - 8q \\
&= q(9p - 8) + 8 - 8p.
\end{aligned}$$

Detta motsvarar bästaresponsfunktionerna

$$BR_1(q) = \begin{cases} 0, & q < 1/4 \\ [0, 1], & q = 1/4 \\ 1, & q > 1/4, \end{cases}$$

och

$$BR_2(p) = \begin{cases} 0, & p < 8/9 \\ [0, 1], & p = 8/9 \\ 1, & p > 8/9, \end{cases}$$

vilket innebär att paren (p, q) som sådana att

$$\begin{aligned}
p &\in BR_1(q) \\
q &\in BR_2(p),
\end{aligned}$$

är $(p, q) = (1, 1)$, $(p, q) = (0, 0)$ och $(p, q) = (8/9, 1/4)$, vilka således är samtliga Nashjämvikter. Notera att $(p, q) = (0, 0)$ och $(p, q) = (1, 1)$ motsvarar de rena Nashjämvikterna (A, A) och (B, B), som vi identifierade ovan.

Problem 4

(i) Spelet kan i tabellform skrivas som

	Sten	*Sax*	*Påse*
Sten	$0, 0$	$1, -1$	$-1, 1$
Sax	$-1, 1$	$0, 0$	$1, -1$
Påse	$1, -1$	$-1, 1$	$0, 0$

(ii) En blandad strategi för spelare 1 kan definieras enligt:

- Låt $p_1 \in [0,1]$, $p_2 \in [0,1]$ och $1 - p_1 - p_2 \in [0,1]$.
- Låt p_1 vara sannolikheten att spelare 1 väljer sten.
- Låt p_2 vara sannolikheten att spelare 1 väljer sax.
- Låt $1 - p_1 - p_2$ vara sannolikheten att spelare 1 väljer påse.

En blandad strategi för spelare 2 kan definieras på precis samma sätt med notationen $q_i, i = 1, 2$. Det förväntade värdet för spelare 1 blir

$$
\begin{aligned}
&u_1(p_1, p_2, q_1, q_2) \\
&= p_1 q_1 \cdot 0 + p_1 q_2 \cdot 1 + p_1(1 - q_1 - q_2) \cdot (-1) \\
&+ p_2 q_1 \cdot (-1) + p_2 q_2 \cdot 0 + p_2(1 - q_1 - q_2) \cdot 1 \\
&+ (1 - p_1 - p_2) q_1 \cdot 1 + (1 - p_1 - p_2) q_2 \cdot (-1) + (1 - p_1 - p_2)(1 - q_1 - q_2) \cdot 0 \\
&= p_1 q_2 \cdot 1 + p_1(1 - q_1 - q_2) \cdot (-1) \\
&+ p_2 q_1 \cdot (-1) + p_2(1 - q_1 - q_2) \cdot 1 \\
&+ (1 - p_1 - p_2) q_1 \cdot 1 + (1 - p_1 - p_2) q_2 \cdot (-1).
\end{aligned}
$$

Förenkling och motsvarande observationer för spelare 2 ger

$$
\begin{aligned}
u_1(p_1, p_2, q_1, q_2) &= p_1(3q_2 - 1) + p_2(1 - 3q_1) + q_1 - q_2 \\
u_2(p_1, p_2, q_1, q_2) &= q_1(3p_2 - 1) + q_2(1 - 3p_1) + p_1 - p_2.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Det följer direkt ifrån (1) att om $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 1/3$ så har ingen av spelarna anledning att avvika (eftersom exempelvis $u_1(p_1, p_2, 1/3, 1/3) = 0$ för alla möjliga p_1, p_2) varvid motsvarande strategiplan är en Nashjämvikt.

Problem 5

Nedan markerar bästa-responserna med * och ser att (C, A), (B, B) och (C, B) är samtliga Nashjämvikter:

	A	B	C
A	$1, 1$	$4, 7^*$	$2^*, 5$
B	$1, 2$	$7^*, 7^*$	$2^*, 1$
C	$2^*, 2^*$	$7^*, 2^*$	$0, 0$

Spelet motsvarar att $u_1(A, B) = 4 \neq u_2(B, A) = 2$. Detta innebär att spelet inte är symmetriskt (per definition, jämför s. 51 i Osborne).

Problem 6

(i) Vi betraktar handlingsplanen $(b_1, b_2, ..., b_n) = (v_1, v_2, ..., v_n)$. Givet denna erhåller spelare 1 varan, vilket innebär att värdet för alla andra spelare blir $\Pi_i = 0$ $(i \geq 2)$.

Om spelare 2 avviker och lägger ett bud $b_2 > v_1$ så vinner spelare 2 auktionen, och erhåller—eftersom vinnaren betalar det fjärde högsta budet $b_4 = v_4 < v_2$—värdet $\Pi_2 = v_2 - b_4 = v_2 - v_4 > 0$. Det följer att spelare 2 har anledning att avvika från den föreslagna handlingsplanen varvid denna inte är en Nashjämvikt. (Notera att motsvarande analys kan göras för spelare 3).

(ii) Betrakta $(b_1, b_2, ..., b_n)$ där $b_i = v_1, i = 1, ..., n$ (dvs. alla lägger ett bud motsvarande den högsta värdering v_1). Vi har då:

- $\Pi_1 = v_1 - b_4 = v_1 - v_1 = 0$,
- $\Pi_i = 0$ för alla $i \geq 2$ (vinner ej).

Låt oss analysera vad som händer om spelare 1 avviker:

- om $b_1 > v_1 \Rightarrow \Pi_1 = v_1 - b_4 = v_1 - v_1 = 0$,
- om $b_1 < v_1 \Rightarrow \Pi_1 = 0$ (vinner ej).

Det följer att spelare 1 inte har någon anledning att avvika.

Låt oss analysera vad som änder om en spelare $i \geq 2$ avviker:

- om $b_i > v_1 \Rightarrow \Pi_i = v_i - v_1 < 0$ (spelare i vinner och får betala det fjärde högsta budet vilket är v_1),
- om $b_i < v_1 \Rightarrow \Pi_i = 0$ (vinner ej).

Det följer att spelare i inte har någon anledning att avvika.

Ovanstående observationer visar att den aktuella handlingsplanen är en Nashjämvikt.