

Lösningsförslag

Tentamen: Spelteori och matematisk ekonomi (MT3005), 2026-01-07

Uppgift 1

(i) En blandad strategi innebär att en spelare inte väljer en enda handling, utan istället slumpmässigt väljer mellan flera möjliga handlingar enligt en bestämd sannolikhetsfördelning. En blandad strategi är med andra ord en sannolikhetsfördelning över den aktuella spelarens handlingsalternativ.

(ii) För vissa spel gäller att en Nashjämvikt inte existerar om endast rena strategier tillåts, medan en Nashjämvikt finnas om blandade strategier tillåts.

Läs mer i Osborne kap. 4.

Uppgift 2

(i) Vi markerar bästaresponserna och får:

	C	D
A	$8^*, 4^*$	$1^*, 0$
B	$0, 4^*$	$0, 0$

Vi drar slutsatsen att (A, C) är den enda Nashjämvikten i rena strategier.

(ii) Låt p vara sannolikheten att spelare 1 väljer A och q vara sannolikheten att spelare 2 väljer C . De (förväntade) värdena blir:

$$\begin{aligned}u_1(p, q) &= pq \cdot 8 + p(1 - q) \cdot 1 + (1 - p)q \cdot 0 + (1 - p)(1 - q) \cdot 0 \\&= 8pq + p(1 - q) = 7pq + p \\&= p(7q + 1), \\u_2(p, q) &= pq \cdot 4 + p(1 - q) \cdot 0 + (1 - p)q \cdot 4 + (1 - p)(1 - q) \cdot 0 \\&= 4pq + 4(1 - p)q = 4q.\end{aligned}$$

Detta motsvarar bästaresponsfunktionerna:

$$BR_1(q) = 1, \quad q \in [0, 1],$$

$$BR_2(p) = 1, \quad p \in [0, 1].$$

Det enda paret (p, q) sådant att

$$p \in BR_1(q), \quad q \in BR_2(p)$$

är således $(p, q) = (1, 1)$, och vi drar slutsatsen att detta är den enda Nashjämvikten.

Notera att $(p, q) = (1, 1)$ motsvarar den rena Nashjämvikten (A, C) .

Uppgift 3

Vi markerar bästaresponserna

	A	B
A	$3^*, 2$	$1, 4^*$
B	$2, 3$	$5^*, 5^*$

och drar slutsatsen att (B, B) är unik Nashjämvikt.

Analys av strikt dominerande handlingar. Vi använder kursbokens definition av strikt dominans (Osborne kap 2.9):

För Spelare 1

- Om spelare 2 spelar A : $u_1(A, A) = 3$, $u_1(B, A) = 2 \Rightarrow$ bästa respons = A
- Om spelare 2 spelar B : $u_1(A, B) = 1$, $u_1(B, B) = 5 \Rightarrow$ bästa respons = B

Slutsats: Ingen handling ger alltid högre payoff $\Rightarrow$ **det finns ingen handling som är strikt dominerande** för spelare 1.

För Spelare 2

- Om spelare 1 spelar A : $u_2(A, A) = 2$, $u_2(A, B) = 4 \Rightarrow$ bästa respons = B
- Om spelare 1 spelar B : $u_2(B, A) = 3$, $u_2(B, B) = 5 \Rightarrow$ bästa respons = B

Slutsats: Handling B ger alltid högre payoff $\Rightarrow$ **handling B dominerar strikt handling A** för spelare 2.

Uppgift 4

Versionen av spelet där Företag 2 är konkurrensinriktat (inkl. bästaresponser för Företag 2) är:

	E	I
E	$4, 4^*$	$0, 0$
I	$0, 0$	$3, 4^*$

Versionen av spelet där Företag 2 är försiktigt (inkl. bästaresponser för Företag 2) är:

	E	I
E	$4, 0$	$0, 10^*$
I	$0, 0$	$3, 4^*$

Vi erhåller följande (förväntade) värden för Företag 1 (inkl. bästaresponser för Företag 1):

	(E, E)	(E, I)	(I, E)	(I, I)
E	4^*	$0, 5(4 + 0) = 2^*$	$0, 5(0 + 4) = 2^*$	0
I	0	$0, 5(0 + 3) = 1, 5$	$0, 5(3 + 0) = 1, 5$	3^*

Vi identifierar samtliga Nashjämvikter genom att undersöka samtliga (rena) handlingsplaner:

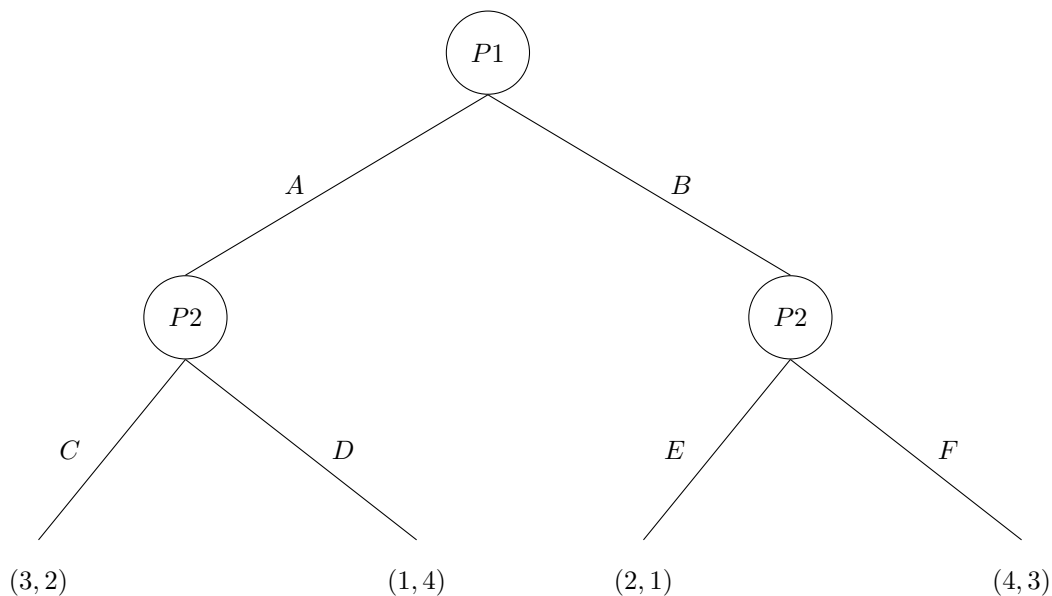
1. $(E, (E, E))$: Inte NJ, Företag 2 typ B vill avvika från E till I .
2. $(E, (E, I))$: NJ, ingen spelare vill avvika.
3. $(E, (I, E))$: Inte NJ, Företag 2 typ A vill avvika från I till E .
4. $(E, (I, I))$: Inte NJ, Företag 2 typ A vill avvika från I till E .
5. $(I, (E, E))$: Inte NJ, Företag 1 vill avvika från I till E .
6. $(I, (E, I))$: Inte NJ, Företag 1 vill avvika från I till E .
7. $(I, (I, E))$: Inte NJ, Företag 1 vill avvika från I till E .
8. $(I, (I, I))$: NJ, ingen spelare vill avvika.

Slutsats: de enda Nashjämvikterna (i rena strategier) är

$$(E, (E, I)) \text{ och } (I, (I, I))$$

Notera: en fullständig lösning ger inte bara Nashjämvikterna, utan även tydliga argument som visar att dessa är **samtliga** Nashjämvikter.

Uppgift 5



Vi representerar spelet i tabellform och motsvarande bästa-responser:

	(C, E)	(C, F)	(D, E)	(D, F)
A	$(3^*, 2)$	$(3, 2)$	$(1, 4^*)$	$(1, 4^*)$
B	$(2, 1)$	$(4^*, 3^*)$	$(2^*, 1)$	$(4^*, 3^*)$

Vi ser att Nashjämvikterna (i rena strategier) är: $(B, (C, F))$ och $(B, (D, F))$.

Använd baklängesinduktion för att hitta delspelsperfekta NJ:

- Efter A: P2 väljer D (för att maximera sin payoff)
- Efter B: P2 väljer F (för att maximera sin payoff)
- Således gäller: A ger payoff 1 till P1 och B ger payoff 4 till P1. Slutsats: P1 väljer B.

Vi drar slutsatsen att den enda delspelsperfekta NJ är: $(B, (D, F))$.

Notera: en fullständig lösning ger inte bara argument för att $(B, (C, F))$ inte är delspelsperfekt, utan även tydliga argument för att $(B, (D, F))$ är det.

Uppgift 6

(i)

$$\Pi_i(b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{om } b_i \geq b_j \text{ för alla } j \neq i \text{ och } b_i > b_k \text{ för alla } k < i, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Notera att det finns flera ekvivalenta sätt att formulera funktionen.

(ii) Handlingsplanen $(v_1, \dots, v_1)$ är en Nashjämvikt. För att inse detta noterar vi (med hjälp av formeln i (i) ovan):

- Givet den aktuella handlingsplanen så vinner spelare 1 och nyttan för samtliga spelare blir 0.
- Spelare 1 tjänar inte på att avvika: spelaren får negativ nytta vid höjning, och noll i nytta vid sänkning.
- Spelare $i \geq 2$ tjänar inte på att avvika: spelaren får negativ nytta vid höjning, och noll i nytta vid sänkning.

(iii)

$$\Pi_i(b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{om } b_i \geq r \text{ och } b_i \geq b_j \text{ för alla } j \neq i, \text{ och } b_i > b_k \text{ för alla } k < i, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Notera att det finns flera ekvivalenta sätt att formulera funktionen.

(iv) Givet handlingsplanen $(r, \dots, r)$ så vinner spelare 1. Spelare 1 erhåller nytta $v_1 - r > 0$ och alla andra spelare erhåller nytta 0. Är detta en Nashjämvikt? Vi får två fall:

- **Låt** $r < v_2$. I detta fall tjänar spelare 2 på att avvika genom att lägga ett bud $r' \in (r, v_2)$, eftersom detta gör att spelare 2 vinner och erhåller nyttan $v_2 - r' > 0$. I detta fall är alltså $(r, \dots, r)$ inte en Nashjämvikt.
- **Låt** $r \geq v_2$. I detta fall är $(r, \dots, r)$ en Nashjämvikt:
 - Spelare 1 tjänar inte på att avvika: spelaren får minskad nytta vid höjning, och noll i nytta vid sänkning.
 - Spelare $i \geq 2$ tjänar inte på att avvika: spelaren får negativ nytta vid höjning, och noll i nytta vid sänkning.