STOCKHOLMS UNIVERSITET,
MATEMATISKA INSTITUTIONEN,
Avd. Matematisk statistik

Lösningsförslag

Tentamen: Spelteori och matematisk ekonomi (MT3005), 2026-02-19

Uppgift 1

Optimeringsproblemet för i är

$$\max_{a_i' \in A_i} u_i(a_i', a_{-i}).$$

Om en handlingsplan $(a_1, ..., a_n)$ uppfyller

$$a_i \in \arg\max_{a_i' \in A_i} u_i(a_i', a_{-i}),$$

för alla $i \in \{1, ..., n\}$ så är handlingsplanen en Nashjämvikt.

Uppgift 2

(i) Vi skriver spelet i tabellform och markerar bästa responser:

	E	F
E	$(-1, 3^*)$	$(0, 1)$
F	$(0^*, 0^*)$	$(3^*, 0^*)$

Det följer att (F, E) och (F, F) är samtliga Nashjämvikter i rena strategier.

(ii) Låt p var sannolikheten att spelare 1 väljer E. Låt q var sannolikheten att spelare 2 väljer E.

Ifrån tabellen inses att F dominerar E strikt för spelare 1. Bästa-responsen för spelare 1 är alltså $p = 0$ för vilket givet $q \in [0, 1]$ som helst; för att (p, q) ska vara en NJ krävs alltså $p = 0$.

Ifrån tabellen inser vi att givet $p = 0$ (vilket motsvarar att spelare 1 spelar F) så är spelare 2 indifferent mellan E och F varvid varje $q \in [0, 1]$ är en bästa-respons på $p = 0$.

Vi drar slutsatsen att varje par (p, q), där $p = 0$ och $q \in [0, 1]$ är en NJ.

Uppgift 3

(i) Vi markerar de bästa responserna och får

	A	B	C
A	5*,0*	0,0*	1*,-1
B	1,3*	2*,0	1*,-1
C	0,1	-1,4*	-2,0

Den enda rena Nashjämvikten är alltså (A, A).

(ii) I tabellen ser vi att handling C aldrig kommer att väljas av någon spelare oavsett vad den andre spelaren väljer, dvs. varje bästa-respons ger att C ska väljas med sannolikhet 0. Spelet reduceras därmed till följande spel.

	A	B
A	5,0	0,0
B	1,3	2,0

Låt p vara sannolikheten att spelare 1 väljer A och q vara sannolikheten att spelare 2 väljer B. De (förväntade) värdena blir:

$$\begin{aligned} u_1(p,q) &= pq \cdot 5 + p(1-q) \cdot 0 + (1-p)q \cdot 1 + (1-p)(1-q) \cdot 2 \\ &= 2 - q + 2p(3q-1) \\ u_2(p,q) &= pq \cdot 0 + p(1-q) \cdot 0 + (1-p)q \cdot 3 + (1-p)(1-q) \cdot 0 \\ &= (1-p)q3. \end{aligned}$$

Detta motsvarar bästaresponsfunktionerna

$$BR_1(q) = \begin{cases} 0, & q < 1/3 \\ [0,1], & q = 1/3 \\ 1, & q > 1/3, \end{cases}$$

och

$$BR_2(p) = \begin{cases} 1, & p < 1 \\ [0,1], & p = 1. \end{cases}$$

Det inses med de vanliga argumenten att paren (p, q) som uppfyller

$$\begin{aligned} p &\in BR_1(q) \\ q &\in BR_2(p), \end{aligned} \tag{1}$$

är $(p, q) = (1, q)$, där $q \in [1/3, 1]$, dvs. samtliga sådana strategipar är exakt de Nashjämvikter som finns (för att inse detta noterar vi exempelvis att $p < 1$ inte kan vara en del av en lösning till (1)).

Uppgift 4

Ja, så är fallet.

Vi visar detta med motsägelsebevis. Intuitionen är att om spelare i ansätter en positiv sannolikhet p_2 till en viss handling, medan det finns en annan *bättre* handling (som i spelar med sannolikhet p_1), så tjänar spelaren på att avvika med en strategi motsvarar att sätta sannolikheten för den sämre handlingen till noll och att spela den bättre handlingen med sannolikheten $p_1 + p_2$.

För en blandad strategi $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ har vi den förväntade utbetalningen för spelare i enligt väntevärdet

$$\begin{aligned} U_i(\alpha) &= \sum_{a_1 \in A_1} \cdots \sum_{a_n \in A_n} \left(\prod_{j=1}^{n} \alpha_j(a_j) \right) u_i(a_1, \ldots, a_n) \\ &= \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) U_i(a_i, \alpha_{-i}). \end{aligned}$$

Låt nu α vara en Nash-jämvikt i blandade strategier (för n stycken spelare), där spelare i slumpar mellan (åtminstone) två olika handlingar som vi kallar a_i^1 och a_i^2 med sannolikheterna

$$p_1 := \alpha_i(a_i^1) > 0 \quad \text{och} \quad p_2 := \alpha_i(a_i^2) > 0.$$

Antag (för att nå en motsägelse) att spelaren inte är indifferent mellan dessa strategier, dvs.

$$U_i(a_i^1, \alpha_{-i}) > U_i(a_i^2, \alpha_{-i}).$$

(Motsatt olikhet ger även den en motsägelse på samma sätt som nedan). Vi skriver nu

$$U_i(\alpha) = p_1 U_i(a_i^1, \alpha_{-i}) + p_2 U_i(a_i^2, \alpha_{-i}) + \sum_{\text{övriga } a_i \in A_i} \alpha_i(a_i)\, U_i(a_i, \alpha_{-i}).$$

Baserat de två ovanstående ekvationerna ser vi direkt att $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \tilde{\alpha}_i, ..., \alpha_n)$, där $\tilde{\alpha}_i$ är en blandad strategi som sammanfaller med α_i förutom gällande att $\alpha_i(a_i^2) = 0$ och $\alpha_i(a_i^1) = p_1 + p_2$, så gäller att

$$\begin{aligned} U_i(\tilde{\alpha}) &= (p_1 + p_2) U_i(a_i^1, \alpha_{-i}) + 0 \cdot U_i(a_i^2, \alpha_{-i}) + \sum_{\text{övriga } a_i \in A_i} \alpha_i(a_i)\, U_i(a_i, \alpha_{-i}) \\ &> U_i(\alpha). \end{aligned}$$

Olikheten ovan visar att α inte kan vara en Nash-jämvikt varvid vi har erhållit en motsägelse, och vi kan dra slutsatsen att spelarna måste vara indifferenta mellan alla rena strategier som spelas med positiv sannolikhet i en blandad Nash-jämvikt.

Uppgift 5

Notera att spelet motsvarar att det är en fördel att ha en unik färg på sin produkt.

- Betrakta strategin (B, R, R), som ger värdena $(3, 0, 0)$. [1] Notera:

  (i) om spelare 1 avviker så erhålls strategin (R, R, R) och värdena $(1, 1, 1)$, dvs. spelare 1:s värde minskar till 1,

  (ii) om spelare 2 avviker så erhålls strategin (B, B, R) och värdena $(0, 0, 3)$, dvs. spelare 2:s värde blir även under avvikelse 0, och

[1] Vi använder vår vanliga konvention som exempelvis innebär att (B, R, R) betyder att spelare 1 använder B medan spelare 2 och 3 använder R, och värdena $(3, 0, 0)$ betyder att spelare 1 får värde 3 medan spelare 2 och 3 får värde 0.

(iii) om spelare 3 avviker så erhålls strategin (B, R, B) och värdena $(0, 3, 0)$, dvs. spelare 3:s värde blir även under avvikelse 0.

Det följer att (B, R, R) är en Nashjämvikt.

- På samma sätt som i punkten ovan inses enkelt att alla andra strategier där en spelare väljer en färg medan de andra två väljer den andra färgen är en Nashjämvikt.
- De kvarvarande strategierna är (R, R, R) och (B, B, B), som båda har värdena $(1, 1, 1)$. Det är enkelt att se att ingen av dessa är Nashjämvikter, eftersom varje spelare kan avvika och därmed öka sin vinst till 3.

Uppgift 6

(i) Ansatsen är att $(x_1, x_2) = (m, m)$, där $m = 0.5$ är en Nash-jämvikt (NJ), dvs båda går till val med valdeltagarnas politiska median-preferens och utfallet blir att kandidaterna kommer på delad första plats. Notera:

- Givet $(x_1, x_2) = (m, m)$ så blir $\Pi_1 = \Pi_2 = 1$.
- Om kandidat 1 (K1) avviker med $x_1 > x_2 = 0.5$ så får K1 färre än 50% av rösterna, varvid K1 förlorar och vi får $\Pi_1 = 0$.
- Om K1 avviker med $x_1 < x_2 = 0.5$ så förlorar K1 också, varvid $\Pi_1 = 0$ även i detta fall.

Det följer att $0.5 \in BR_1(0.5)$. På samma sätt inses att $0.5 \in BR_2(0.5)$. Det följer att $(x_1, x_2) = (0.5, 0.5)$ är en Nash-jämvikt.

(ii) Ansatsen är att $(x_1, x_2) = (0.7, 0.7)$ är en Nash-jämvikt (NJ), dvs. båda går till val med den möjliga policy som är närmast valdeltagarnas politiska median-preferens och utfallet blir att kandidaterna kommer på delad första plats. Notera:

- Givet $(x_1, x_2) = (0.7, 0.7)$ så blir $\Pi_1 = \Pi_2 = 1$.
- Om kandidat 1 (K1) avviker med $x_1 \in \{0, 1\}$ så får K1 0% av rösterna, och förlorar.
- Om K1 avviker med $x_1 = 0.2$ så får K1 45 % av rösterna; eftersom vi i detta fall har att alla till vänster om $(x_1 + x_2)/2 = 0.45$ röstar på K1, vilket motsvarar andelen 45% av rösterna. K1 förlorar alltså även vid denna avvikelse.

Det följer att $0.7 \in BR_1(0.7)$. På samma sätt inses att $0.7 \in BR_2(0.7)$. Det följer att $(x_1, x_2) = (0.7, 0.7)$ är en Nash-jämvikt.