Stockholms universitet

# Volatilitetsmodellering - en studie av GARCH-modeller på olika typer av CDS-indexdata.

Adam Bergkvist

Kandidatuppsats i matematisk statistik
Bachelor Thesis in Mathematical Statistics

Kandidatuppsats 2018:3
Matematisk statistik
Juni 2018

www.math.su.se

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm

Matematisk statistik
Stockholms universitet
Kandidatuppsats **2018:3**
http://www.math.su.se/matstat

# Volatilitetsmodellering - en studie av GARCH-modeller på olika typer av CDS-indexdata.

Adam Bergkvist*

Juni 2018

**Sammanfattning**

I det här arbetet undersöks tidsseriemodeller som i statistiska sammanhang ofta appliceras på data som inte har en konstant variation med tiden. Detta är ofta fallet när man studerar finansiella tidsserier varför denna uppsats syftar till att analysera avkastningen på fyra Credit Default Swap-index. Vi undersöker modeller från GARCH-familjen och tittar specifikt på anpassning av GARCH(1,1), GARCH(2,1) och GARCH(2,2) under normal- och t-fördelningsantagande för den stokastiska feltermen $\varepsilon_t$ till denna typ av data. Därefter utvärderas den framtagna modellens förmåga att generera endagsskattningar av riskmåttet Value-at-Risk(VaR).

Huvudresultaten i arbetet visar att GARCH(1,1) under t-fördelningsantagande för feltermen $\varepsilon_t$ ger bäst anpassning till Credit Default Swap-indexdata av typen investment grade. Det visade sig även att endast ett av de fyra indexen kunde modelleras med GARCH(1,1) där det konstaterades att indexdata av typen speculative grade inte lämpades i detta syfte. Undersökning av modellernas förmåga att skatta Value-at-Risk med en konfidensgrad på 95 % gjordes genom en backtesting-procedur där modellerna anpassades på olika långa intervall av historisk data. Av resultatet framgick att skattningarna av VaR blev bättre med modellanpassningar på kortare intervall av data från investment grade-indexet. Vidare kunde det konstateras att GARCH(1,1) under båda fördelningsantagandena visade tendenser till systematisk överestimering av det studerade riskmåttet.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.
E-post: adam_bergkvist93@hotmail.com. Handledare: Filip Lindskog och Mathias Millberg Lindholm.

**Abstract**

In this thesis we examine time series models that are commonly used in statistics when data is not assumed to have a constant variability over time. This is often seen in financial data why the aim of this paper is to analyze the daily returns of four Credit Default Swap indices. We explore models from the GARCH family and look more closely at GARCH(1,1), GARCH(2,1) and GARCH(2,2) under the assumption of a normal and (Student's) t-distribution for the innovation $\varepsilon_t$ to this type of data. We then evaluate the one-day-ahead forecasting performance of the fitted models regarding a risk measure called Value-at-Risk.

The main results from this thesis show that GARCH(1,1) with t-distributed innovations $\varepsilon_t$ is best suited to model the volatility in data from Credit Default Swap indices of the type investment grade. We also concluded that only one of the four indices passed the model checking procedure of GARCH(1,1) in which we observed that speculative grade data were not appropriate for this purpose. The forecasting evaluation was made according to a backtesting process where the models were fitted on different lengths of historical data. The results showed us that the estimation of VaR with a 95 % confidence level became better with models fitted on shorter intervals of investment grade data. Furthermore we could conclude that GARCH(1,1) under both distribution assumptions showed us tendencies of a systematic overestimation of VaR.

# Innehåll


**1 Inledning** **4**

**2 Teori** **5**
2.1 Credit Default Swaps . . . . . 5
2.2 Tidsserier och stationäritet . . . . . 6
2.3 Volatilitet . . . . . 7
2.4 Tidsseriemodeller . . . . . 7
2.4.1 AR . . . . . 8
2.4.2 Betingade heteroskedastiska modeller . . . . . 8
2.5 Parameterskattning . . . . . 9
2.6 Autokorrelation, ACF och PACF . . . . . 10
2.7 Skevhet och Kurtosis . . . . . 11
2.8 Statistiska tester . . . . . 12
2.8.1 T-test . . . . . 12
2.8.2 Ljung-Box-test . . . . . 12
2.8.3 Jarque-Bera-test . . . . . 12
2.9 Modellselektion . . . . . 13
2.9.1 AIC och BIC . . . . . 13
2.10 Value-at-Risk . . . . . 13
2.11 Backtesting . . . . . 14

**3 Metod** **16**
3.1 Analys av data . . . . . 16
3.2 Modellering . . . . . 18
3.2.1 Modellering av väntevärdesstrukturen . . . . . 18
3.2.2 Undersökning av residualernas fördelning . . . . . 19
3.2.3 Undersökning av betingad heteroskedasticitet . . . . . 21
3.2.4 GARCH-modellering . . . . . 22

**4 Resultat** **25**

**5 Diskussion och slutsats** **28**
5.0.1 Vidare studier . . . . . 31

**6 Referenser** **32**

**7 Appendix** **33**
7.1 Sannolikhetsfördelningar . . . . . 33
7.1.1 Normalfördelning . . . . . 33
7.1.2 (Student's) t-fördelning . . . . . 33
7.1.3 Bernoulli- och binomialfördelning. . . . . 33
7.2 Rugarch i R . . . . . 34
7.3 Bilder . . . . . 35

# 1 Inledning

Tidsserieanalys är ett område inom statistik som utgår från metoder för att analysera datamängder med observationer mätta över tid, exempelvis det dagliga slutpriset på en aktie för de fem senaste åren eller den dagliga medeltemperaturen i Stockholm de senaste tio åren. Tidsseriemetoder syftar till att modellera statistiska egenskaper och karaktäristiska drag hos den observerade datan som kan vara användbara för att försöka förutspå framtida värden.

Tidsseriemodeller har blivit populära inom många områden och vanligt förekommande inom prognostisering, exempelvis väderleksprognoser, och inom ekonometrisk analys för att prediktera volatilitet inom finans. I det här arbetet kommer vi att fokusera på det senare och tillämpa de klassiska GARCH-modellerna för att undersöka anpassning av sådana modeller och förmågan att prediktera framtida risker.

I många sammanhang då statistiska modeller används förutsätter man att variationen i data inte förändras med tiden. När man studerar den finansiella marknaden observerar man ofta att så inte är fallet, utan data tenderar att ha en förändrad variation över tid. Svängningar som observeras brukar man referera till som volatilitet. Många studier har gjorts för att ta fram modeller vars syfte är att förutspå hur stora svängningarna kommer att vara i framtiden. Till de vanligaste av dessa hör GARCH-modeller som flitigt använts inom tidsserieanalys i ett försök till att förutspå framtida sväningar på finansiella avkastningsserier. Dessa modeller är betingat heteroskedastiska vilket innebär att de tar hänsyn till tidigare värden och varians i en tidsserie.

Syftet med det här arbetet är därför att undersöka ett urval av dessa modeller, närmare bestämt GARCH(1,1), GARCH(2,1) och GARCH(2,2). Av dessa kommer vi avgöra vilken som ger bäst anpassning för att beskriva volatiliteten i data för fyra Credit Default Swap-index. Vi kommer därefter utvärdera den framtagna modellens förmåga att skatta ett riskmått som inom finansiell riskhantering kallas Value-at-Risk.

# 2 Teori

I denna sektion kommer den bakomliggande teorin för arbetet att presenteras. Huvuddelen av resultaten är taget ur Ruey S. Tsays bok *Analysis of Financial Time Series* [1], men även andra referenser förekommer. Om inget anges kan resultaten antas vara tagna ur Tsay.

## 2.1 Credit Default Swaps

Vi börjar med att ge en kort bakgrund till varför Credit Default Swaps(CDS) har blivit populära. Sedan finanskrisen 2007-2008 har många företag börjat finansiera sig på obligationsmarknaden, då banker blivit mer restriktiva med utlåning av kapital. Detta har inneburit att bolag ställer ut obligationer, ett räntebärande skuldebrev, som sedan handlas på en marknad. Under dessa förhållanden uppkommer alltid en risk för att emittenten, som ställer ut obligationen, inte lyckas fullfölja sina åtaganden vilket resulterar i något som kallas kreditrisk. En viktig komponent i kreditrisk är default risk, vilket innebär risken för en betalningsinställelse, exempelvis en konkurs. Därför har det konstruerats finansiella instrument, så kallade Credit Default Swaps som gör det möjligt för investerare att försäkra sig mot risken för att en default inträffar.

För att kvantifiera risken för defualt på en obligation bedöms kreditvärdigheten av olika kreditvärderingsinstitut. Bland de vanligaste tillhör Moody's och Standard & Poor's. Dessa betygsätter både bolag och länders kreditvärdighet där en hög ranking betyder god kreditvärdighet och låg kreditrisk medan en låg ranking innebär sämre kreditvärdighet och hög kreditrisk. Man brukar kategorisera dessa i investment grades och speculative grades. Nedan visas betygsskalan som Moody's använder för att rangordna kreditrisken.

| Betyg | **Investment Grades** |
|---|---|
| Aaa | Högst kreditvärdighet, minimal kreditrisk. |
| Aa | Hög kreditvärdighet, väldigt låg kreditrisk. |
| A | Anses ha låg kreditrisk. |
| Baa | Anses ha måttlig kreditrisk. |
| | **Speculative Grades** |
| Ba | Anses ha väsentlig kreditrisk. |
| B | Anses ha hög kreditrisk. |
| Caa | Anses ha väldigt hög kreditrisk. |
| Ca | Anses vara väldigt nära konkurs, eller i konkurs. |
| C | Det lägsta betyget för obligationer, troligtvis i konkurs. |

Tabell 1: *Moody's betygsskala för kreditrisken hos obligationer.*

I ett CDS-kontrakt finns det två parter, där köparen av kontraktet försäkrar sig mot defaultrisken hos den underliggande tillgången. För att göra detta betalar köparen ett fixt belopp, det vill säga en premie som kallas spread, till utställaren av kontraktet årligen. Man brukar uttrycka spreaden i basis points där exempelvis 100 basis points svarar mot 1 % av det ursprungliga värdet på tillgången. Utställaren av kontraktet förbinder sig att ersätta värdet på tillgången givet att en default inträffar(se [2], kapitel 12).

Arbetet kommer, som tidigare nämnts, att behandla avkastningen på fyra Credit Default Swap-index. Två av de studerade indexen går under namnen "iTraxx Europe" och "CDX IG" vilka klassificeras som investment grades. De resterande två går under namnen "iTraxx Crossover" samt "CDX HY" och representerar speculative grades. Dessa index innehåller de mest handlade CDS-kontrakten i respektive kategori för både den europeiska och nordamerikanska marknaden.[3]

## 2.2 Tidsserier och stationäritet

En tidsserie kan beskrivas som en sekvens av data uppmätt från en variabel regelbundet i tiden. Den vanligaste typen av tidsserier förutsätter att avståndet mellan mätningarna är densamma, exempelvis en dag, en månad eller ett år.[4] Betraktar man priset på en finansiell tillgång, exempelvis priset på en aktie eller spreaden på ett CDS-index som en samling stokastiska variabler över tid, har vi en tidsserie. I det här arbetet studerar vi den logaritmerade avkastningen $\{r_t\}_{t=1}^{n}$ för respektive tidsserie. Givet tiden $t$ definieras denna

$$r_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right), \tag{1}$$

där $p_t$ är spreaden uttryckt i basis points vid tiden $t$. Detta kan ses som priset att hålla ett CDS-indexkontrakt vid tiden $t$. Anledningen till att vi undersöker avkastningsserier och inte prisserier är för att de statistiska egenskaperna hos avkasningsserier är bättre varför man inom riskmodellering hellre fokuserar på att beskriva dynamiken i dessa(se [2], kapitel 1).

När man undersöker tidsserier förutsätts ofta stationäritet. Strikt stationäritet innebär att den simultana fördelningen för $\{r_t\}_{t=1}^{n}$ är identisk med fördelningen för $\{r_t\}_{t=1+k}^{n+k}$ för alla tal $k$. Detta är ett starkt antagande som är svårt att uppnå i praktiken. För analysen i denna uppsats räcker det att förutsätta svag stationäritet. Detta innebär att väntevärdet för $\{r_t\}_{t=1}^{n}$ är konstant över tid och att kovariansen mellan två avkastningar $r_t$ och $r_{t-k}$ inte beror på tiden $t$.

## 2.3 Volatilitet

Volatilitet är ett mått som används för att beskriva svängningar i pris på avkastningsserier. Hög volatilitet tyder på att priset på den underliggande tillgången är benägen att variera mycket. Man ser ofta att det förekommer något som kallas volatilitetsklustring i finansiell data vilket innebär att perioder med hög volatilitet tenderar att följas av perioder med hög volatilitet och perioder med låg volatilitet följs av perioder med låg volatilitet. Givet avkastningsserien $\{r_t\}_{t=1}^{n}$ definieras en skattning av (obetingad) volatilitet matematiskt enligt

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(r_t - \bar{r})^2}, \tag{2}$$

där $n$ är antalet observationer och $\bar{r}$ är stickprovsmedelvärdet för serien.[5] Ur (2) ser man att volatiliteten visar hur avkastningen varierar kring sitt aritmetiska medelvärde.

## 2.4 Tidsseriemodeller

Här beskrivs teorin bakom de tidsseriemodeller som kommer att tillämpas i detta arbete. För att modellera $\{r_t\}_{t=1}^{n}$ utgår man ofta från en enkel tidsseriemodell

$$r_t = \mu_t + c_t, \tag{3}$$

där $c_t = \sigma_t \varepsilon_t$ och $\varepsilon_t$ betraktas som en stokastisk variabel med väntevärde 0 och varians 1. Vidare är $\mu_t = E[r_t|F_{t-1}]$ det betingade väntevärdet av $r_t$ givet att $F_{t-1}$ är informationen tillgänglig fram till tiden $t-1$. Ekvationen för väntevärdet kan ta olika uttryck men bör inte göras för komplicerad, oftast ansätts det betingade väntevärdet till en konstant eller AR($p$)-modell. Den betingade variansen för $r_t$ ges av uttrycket $\sigma_t^2 = Var(r_t|F_{t-1}) = Var(c_t|F_{t-1})$(se [1], kapitel 3).

### 2.4.1 AR

En ekonometrisk modell som försöker fånga linjärt beroende i avkastningsserier kallas för en autoregressiv modell(AR). En AR($p$)-modell definieras

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + ... + \phi_p r_{t-p} + \varepsilon_t, \tag{4}$$

där $\phi_0$ är en konstantterm, $(\phi_1, ..., \phi_p)$ är koefficienter och $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$ är en sekvens oberoende likafördelade stokastiska variabler med väntevärde 0 och varians $\sigma_\varepsilon^2$, ett så kallat vitt brus (se [1], kaptiel 2). Givet en AR($p$)-modell kan den betingade väntevärdesstrukturen i (3) beskrivas genom $E(r_t|r_{t-1}, ..., r_{t-p})$ $= \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + ... + \phi_p r_{t-p}$.

### 2.4.2 Betingade heteroskedastiska modeller

År 2003 tilldelades Robert F. Engle ekonomipriset för sin teori bakom den autoregressiva betingade heteroskedastiska modellen "ARCH"-modellen. Idén är att denna modell appliceras på data från tidsserier som är heteroskedastiska, det vill säga då variansen inte är konstant över tid. Modellen bygger på att tidigare information används för att uttala sig om volatiliteten vid en viss tidpunkt i framtiden.

Vi låter $c_t = r_t - \mu_t$ vara den väntevärdesjusterade logavkastningen, residualerna, vilka förutsätts vara seriellt okorrelerade men beroende. Beroendet hos $c_t$ försöker ARCH-modellen fånga och beskrivs med hjälp av en kvadratisk funktion av tidigare värden i avkastningsserien. Speciellt definieras en ARCH($p$)-modell

$$c_t = \sigma_t \varepsilon_t, \qquad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 c_{t-1}^2 + ... + \alpha_p c_{t-p}^2 \tag{5}$$

där $\alpha_0 > 0$ och $\{\alpha_i\}_{i=1}^{p} \geq 0$. Vidare är feltermen $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{n}$ en sekvens av likafördelade och oberoende stokastiska variabler med väntevärde 0 och varians 1. Av strukturen i (5) framgår det att stora tidigare värden på $\{c_{t-i}\}_{i=1}^{p}$ implicerar stor betingad varians vilket svarar mot den volatilitetsklustring som ofta observeras i finansiella avkastningsserier.

En utvidgning av ARCH-modellen gjordes av den danske ekonomen Tim Bollerslev och kallas för "GARCH"-modellen. Anledningen var att ARCH, trots sin simpla form, ofta kräver många parametrar för att ge en lämplig bild av volatiliteten hos den underliggande serien. Skillnaden från ARCH är att GARCH-modellen inkluderar både tidigare residualer och varians för att uttala sig om framtida volatilitet. Likt ARCH låter vi residualerna beskrivas av $c_t = r_t - \mu_t$, vid tiden $t$. Vi har då att $c_t$ följer en GARCH($p$,$q$)-modell om

$$c_t = \sigma_t \varepsilon_t, \qquad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i c_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \tag{6}$$

där $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\sum_{i=1}^{max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ och $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{n}$ är en sekvens av oberoende och likafördelade stokastiska variabler med väntevärde 0 och varians 1. Fördelningsantaganden för $\varepsilon_t$ i detta arbete kommer att vara den standardiserade normalfördelningen och (Student's) t-fördelning(se 7.1 i Appendix).

## 2.5 Parameterskattning

För att skatta parametrar i GARCH-modeller är det vanligt förekommande att använda "maximum likelihood"-metoden. Denna procedur går ut på att maximera likelihoodfunktionen $L(\boldsymbol{\theta})$. Givet observerad data $\{r_t\}_{t=1}^{n}$ och en modell med parametrar $\boldsymbol{\theta}$ definieras likelihoodfunktionen enligt

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^{n} f(r_t|\boldsymbol{\theta}), \tag{7}$$

där $f(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ är täthetsfunktionen för observerad data sett som en funktion av $\boldsymbol{\theta}$(se [6], kapitel 2). Som tidigare nämnts kommer arbetet behandla normal- och t-fördelningsantagande för feltermen $\varepsilon_t$ i ekvation (6). Eftersom GARCH modellerar volatiliteten utifrån tidigare värden i avkastningsserier kommer skattning av parametrar ske genom att använda den betingade likelihood-funktionen. Vi definierar denna likt Tsay gör(se sid. 120-121 i [1]) enligt

$$f(c_{p+1},...,c_n|\boldsymbol{\theta},c_1,...,c_p) = \prod_{t=p+1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{c_t^2}{2\sigma_t^2}\right), \tag{8}$$

för $\{c_t\}_{t=p+1}^n$ under normalfördelningsantagande. Här svarar uttrycket efter produkttecknet ovan mot täthetsfunktionen för normalfördelningen(se ekvation (24) i Appendix). Under t-fördelningsantagande definieras den betingade likelihoodfunktionen för $\{c_t\}_{t=p+1}^n$ enligt

$$f(c_{p+1},...,c_n|\boldsymbol{\theta},c_1,...c_p) = \prod_{t=p+1}^{n} \frac{\Gamma[(v+1)/2]}{\Gamma(v/2)\sqrt{(v-2)\pi}} \frac{1}{\sigma_t} \left[1 + \frac{c_t^2}{(v-2)\sigma_t^2}\right]^{-\frac{(v+1)}{2}}, \tag{9}$$

där uttrycket efter produkttecknet är täthetsfunktionen för en t-fördelning med $v$ frihetsgrader(se ekvation (25) i Appendix). Att maximera den betingade likelihoodfunktionen är ekvivalent med att maximera dess logaritm, som är lättare att handskas med. Rent praktiskt innebär detta att produkten i (8) och (9) ändras till en summa. Den intresserade läsaren hänvisas till [1], kapitel 3 eller [6], kapitel 2.

## 2.6 Autokorrelation, ACF och PACF

Givet en svagt stationär avkastningsserie $\{r_t\}_{t=1}^n$ är det av intresse att studera det linjära beroendet mellan $r_t$ och dess tidigare värden $\{r_{t-j}\}_{j=1}^{t-1}$. Vi generaliserar då begreppet korrelation till autokorrelation. Vanligtvis betecknas korrelationskoefficienten mellan $r_t$ och $r_{t-\ell}$ med $\rho_\ell$ och kallas autokorrelationen lag-$\ell$ för $r_t$. Denna skattas utifrån ett givet stickprov enligt

$$\hat{\rho}_\ell = \frac{\mathrm{Cov}(r_t, r_{t-\ell})}{\mathrm{Var}(r_t)} = \frac{\sum_{t=\ell+1}^n (r_t - \bar{r})(r_{t-\ell} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2}, \tag{10}$$

där $0 < \ell < n-1$. Statistikorna $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, ...$ i (10) kallas autokorrelationsfunktionen, ACF, för $\{r_t\}_{t=1}^n$. Denna spelar en viktig roll i volatilitetsmodellering då den beskriver det linjära beroendet i data. Partiella autokorrelationsfunktionen, PACF, för en stationär tidsserie är en funktion av sin ACF. Denna är användbar för att bestämma graden på en AR-modell(se avsnitt 2.4.1) och ges av att ställa upp följande ekvationer i successiv ordning

$$\begin{aligned} r_t &= \phi_{0,1} + \phi_{1,1} r_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \\ r_t &= \phi_{0,2} + \phi_{1,2} r_{t-1} + \phi_{2,2} r_{t-2} + \varepsilon_{2t}, \\ r_t &= \phi_{0,3} + \phi_{1,3} r_{t-1} + \phi_{2,3} r_{t-2} + \phi_{3,3} r_{t-3} + \varepsilon_{3t}, \end{aligned} \tag{11}$$

och så vidare. Dessa ekvationer kan jämföras vid en multipel linjär regression där parametrar skattas via minstakvadrat metoden(se [1], kapitel 2). Av parameterskattningarna får vi att $\hat{\phi}_{1,1}$ motsvarar lag-1 PACF för $r_t$ och $\hat{\phi}_{2,2}$ motsvarar lag-2 PACF och så vidare. Från ekvation (11) följer att $\hat{\phi}_{2,2}$ beskriver hur mycket mer information en AR(2)-modell bidrar med till $r_t$ kontra en AR(1)-modell. På samma sätt beskriver $\hat{\phi}_{3,3}$ den tillagda informationen från en AR(3)-modell kontra en AR(2)-modell och så vidare.

## 2.7 Skevhet och Kurtosis

Då man studerar finansiell data är det vanligt förekommande att den underliggande fördelningen visar tecken på viss assymetri. Detta kallas skevhet och skattas utifrån ett givet stickprov $\boldsymbol{r} = \{r_t\}_{t=1}^n$ via

$$\hat{S}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(n-1)\hat{\sigma}^3} \sum_{t=1}^{n} (r_t - \bar{r})^3, \tag{12}$$

där $\bar{r}$ är stickprovsmedelvärdet och $\hat{\sigma}^2$ är stickprovsvariansen. Normalfördelningen är symmetrisk kring sitt väntevärde och har därför skevheten 0. Avkastningsdatan har detta som referenspunkt och negativ skevhet indikerar att den underliggande fördelningen är utdragen åt vänster medan postiv skevhet tyder på att fördelningen är viktad åt höger. Vidare beskriver måttet kurtosis svansarnas beteende i fördelningen för data. Detta kan, likt skevhet, skattas utifrån ett givet stickprov via

$$\hat{K}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(n-1)\hat{\sigma}^4} \sum_{t=1}^{n} (r_t - \bar{r})^4. \tag{13}$$

Normalfördelningen har kurtosis lika med tre vilket gör att man undersöker kvantiteten $\hat{K}(\boldsymbol{r}) - 3$. En fördelning som har ett överskott av kurtosis sägs ha tunga svansar. Detta innebär att fördelningen tenderar att vikta mer av sin sannolikhetsmassa i svansarna än vad en normalfördelning gör. Ett slumpmässigt stickprov från en sådan fördelning innehåller oftast fler extrema värden.

## 2.8 Statistiska tester

Vidare presenteras i detta avsnitt vilka statistiska tester som kommer att användas i detta arbete.

### 2.8.1 T-test

Om man givet ett stickprov $\boldsymbol{r} = \{r_t\}_{t=1}^n$, $n > 30$, vill undersöka ett hypotetiskt medelvärde $\mu_0$ kan man utföra ett t-test. Nollhypotesen $H_0 : \mu_0 = \bar{r}$ testas mot alternativhypotesen $H_a : \mu_0 \neq \bar{r}$ genom att nyttja följande testvariabel

$$\mathrm{T} = \frac{\bar{r} - \mu_0}{s_{\boldsymbol{r}}^2/\sqrt{n}} \sim t_{\alpha/2}(n-1). \tag{14}$$

Här ges stickprovsmedelvärdet av $\bar{r}$, $s_{\boldsymbol{r}}^2$ motsvarar stickprovsvariansen och $n$ är stickprovsstorleken. Testvariabeln är t-fördelad med $n-1$ frihetsgrader och nollhypotesen kan förkastas på signifikansnivån $\alpha$ om $|T| > t_{\alpha/2}(n-1)$.[5]

### 2.8.2 Ljung-Box-test

Givet $\{r_t\}_{t=1}^n$ är det av intresse att testa om autokorrelationen för serien är skild från noll. Nollhypotesen är $H_0 : \rho_1, ..., \rho_p = 0$ och alternativhypotesen ges av $H_a : \rho_k \neq 0$ för något $k \in \{1, ..., p\}$. Ljung och Box(1978) introducerade följande statistika för hypotestestet

$$\mathrm{LB}(p) = n(n+2)\sum_{\ell=1}^{p} \frac{\hat{\rho_\ell}^2}{n-\ell}, \tag{15}$$

där $n$ är stickprovsstorleken, $p$ är antalet parametrar och $\{\hat{\rho}_k\}_{k=1}^p$ är autokorrelationsfunktionen(se ekvation (10)). Nollhypotesen förkastas om $\mathrm{LB}(p) > \chi_\alpha^2(p)$, där $\chi_\alpha^2(p)$ är $100(1-\alpha)$-percentilen för en chitvåfördelning med signifikansnivå $\alpha$ och $p$ antal frihetsgrader. Man förkastar $H_0$ om p-värdet för $\mathrm{LB}(p)$ understiger signifikansnivån $\alpha$. Tidigare simuleringsstudier har visat att $p$ kan väljas utifrån $p = \ln(n)$(se [1], kapitel 2).

### 2.8.3 Jarque-Bera-test

Ett statistiskt test för att undersöka normalfördelningsantagdet hos en avkastningsserie $\boldsymbol{r} = \{r_t\}_{t=1}^n$ introducerades av Jarque och Bera(1987). Noll-

hypotesen är att data är normalfördelat och teststatistikan definieras enligt

$$\mathrm{JB} = \frac{\hat{S}(\boldsymbol{r})^2}{6/n} + \frac{(\hat{K}(\boldsymbol{r}) - 3)^2}{24/n}, \tag{16}$$

där $\hat{S}(\boldsymbol{r})$ är skattad skevhet och $\hat{K}(\boldsymbol{r})$ är skattad kurtosis givet data(se ekvation (12) och (13)). Teststatistikan i (16) är asymptotisk chitvåfördelad med två frihetsgrader. Nollhypotesen förkastas om p-värdet för JB-statistikan understiger signifikansnivån $\alpha$(se [1], kapitel 1).

## 2.9 Modellselektion

Vi kommer att undersöka tre parameterkombinationer av GARCH-modeller i detta arbete. Här introduceras två informationskriterier som används för att avgöra vilken av dessa modeller som ger bäst anpassning till data.

### 2.9.1 AIC och BIC

Det första måttet formulerades av Hirotugu Akaike(1927-2009) under 1970-talet och kallas för "Akaikes informationskriterium" eller "AIC". Definitionen lyder enligt

$$\mathrm{AIC} = -2l\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}\right) + 2p, \tag{17}$$

där $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}$ är de parameterar som maximerar likelihoodfunktionen(se avsnitt 2.5). Vidare är $l(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}) = \ln(L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}))$, log-likelihoodfunktionen och $p$ är antalet parametrar i modellen. Ett alternativt mått kallas för "Bayes informationskriterium" eller "BIC" och definieras

$$\mathrm{BIC} = -2l\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}\right) + \ln(n)p. \tag{18}$$

Denna skiljer sig från AIC via konstanten $\ln(n)$, där $n$ är stickprovsstorleken. Vid val av modeller väljs de vars värden på AIC och BIC är lägst. Generellt straffas modellkomplexitet hårdare av BIC än av AIC, vilket inses ur olikheten $\ln(n) \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 8$(se [6], kapitel 7).

## 2.10 Value-at-Risk

Givet en avkastningsserie på en tillgång är det ofta av intresse att undersöka risken för stora förluster. Ett av de vanligast förekommande måtten i finansiell riskhantering kallas Value-at-Risk(VaR). Vi kan definiera VaR som

förlusten i marknadsvärde på en tillgång under en given tidsperiod som endast överskrids med sannolikheten $\alpha$. Man är därför ofta intresserad av att svara på frågan om vilken förlust som är av sådan storlek att den endast kommer att överträdas $\alpha * 100\%$ av tiden under nästkommande $n$ handelsdagar. En matematisk definition av VaR ges av

$$P(-r_t > \mathrm{VaR}_t^\alpha | F_{t-1}) = \alpha \Leftrightarrow P(r_t < -\mathrm{VaR}_t^\alpha | F_{t-1}) = \alpha, \tag{19}$$

där $F_{t-1}$ är informationen tillgänlig fram till tiden $t-1$, $r_t$ är logavkastningen för dag $t$ och $\alpha$ är en förutbestämd sannolikhet. Ur denna definition följer att $-\mathrm{VaR}^\alpha$ är ett tal sådant att vi endast får en lägre logavkastning med sannolikheten $\alpha$. Ekvivalent kan vi på konfidensnivån $(1-\alpha)$ vara säkra på att få ett utfall med större värde än $-\mathrm{VaR}^\alpha$(se [2], kapitel 1). I sannolikhetsteoretiska termer är Value-at-Risk en kvantil av förlustfördelningen och i det här arbetet undersöker vi 5 %-kvantilen, det vill säga $\alpha = 0.05$ i ekvation (19). Givet tidsseriermodellen $r_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t$ och under antagandet att $\varepsilon_t$ följer en normalfördelning har vi att VaR skattas enligt

$$-\hat{\mathrm{VaR}}_t^\alpha = \hat{\mu}_t + \hat{\sigma}_t \Phi^{-1}(\alpha), \tag{20}$$

där $\hat{\mu}_t$ och $\hat{\sigma}_t$ är prediktioner för dag $t$ och $\Phi^{-1}(\alpha)$ är $\alpha$-kvantilen från $\Phi$ som motsvarar fördelningsfunktionen för en standard normalfördelning. Om vi istället antar att modellen följer en standardiserad t-fördelning med väntevärde $\mu$ och varians $\nu\sigma^2/(\nu-2)$, har vi att

$$-\hat{\mathrm{VaR}}_t^\alpha = \hat{\mu}_t + \hat{\sigma}_t t_\nu^{-1}(\alpha), \tag{21}$$

där $t_\nu$ är fördelningsfunktionen för en standardiserad t-fördelning(se [7], kapitel 2).

## 2.11 Backtesting

Backtesting är ett statistiskt verktyg som används vid modellvalidering. Metoden kan ses som en sista diagnostisk check för att testa en framtagen modells giltighet på historisk data.[9] Syftet med backtestingen i det här arbetet är att utvärdera hur bra modellerna som tagits fram är för att skatta 5 % VaR. Idén är att jämföra den estimerade kvantilen med det faktiska utfallet för de dagar man önskar att förutse. Vi kommer att undersöka hur många av de negativa avkastningarna som överträder den estimerade VaR-kvantilen från våra modeller. För detta ändamål införs en indikatorvariabel enligt

$$\hat{\mathbb{I}}_k = \begin{cases} 1, & \text{om} \quad r_k < -\hat{\text{VaR}}_k^{\alpha} \\ 0, & \text{om} \quad r_k \geq -\hat{\text{VaR}}_k^{\alpha} \end{cases},$$

för $k \in \{t+1, ..., n\}$ vilket svarar mot stickprovet som används för prediktion. Indikatorvariabeln tar värdet 1 om avkastningen är mindre än skattningen av VaR och 0 om avkastningen är större. Om en modell framgångsrikt estimerar VaR kan alla överträdelser betraktas som oberoende och likafördelade stokastiska variabler från en Bernoullifördelning(se avsnitt 7.1.3) som antar värdet 1 med sannolikhet $\alpha$ och 0 med sannolikhet $1-\alpha$ (se [2], kapitel 13). Det följer därför att summan av antalet överträdelser är binomialfördelat enligt

$$\text{X} = \sum_{k=t+1}^{n} \hat{\mathbb{I}}_k \sim \text{Bin}(n, \alpha). \tag{22}$$

Utifrån detta kan man göra ett binomialtest för att undersöka om modellen genererar tillfredsställande skattningar av VaR. Under nollhypotesen antas modellen vara rätt kalibrerad där antalet överträdelser $x$ följer sannolikhetsfunktionen för en binomialfördelning(se 7.1 i Appendix) enligt

$$p_X(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

När $n$ är stort kan binomialfördelningen genom centrala gränsvärdessatsen approximeras med normalfördelningen vilket ger oss följande teststatistika

$$\text{BT} = \frac{x - np}{\sqrt{p(1-p)n}} \sim N(0, 1). \tag{23}$$

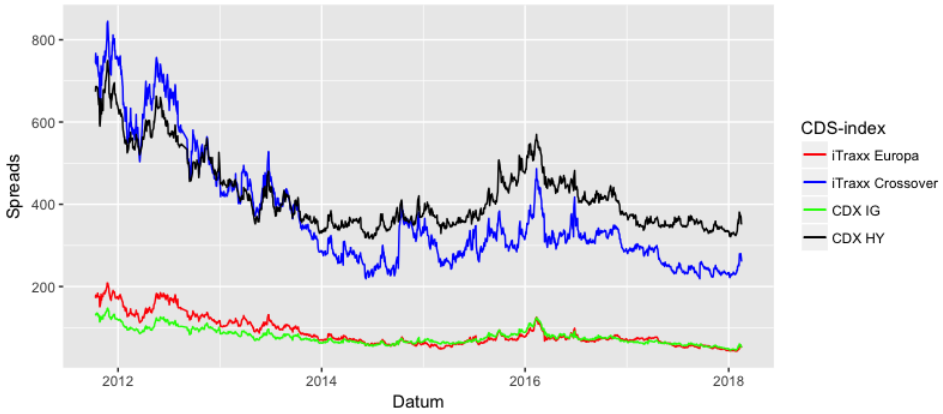
Ett tvåsidigt hypotestest kan nu utföras där $H_0 : p = p_0$ testas mot $H_1 : p \neq p_0$. Vi förkastar $H_0$ på signifikansnivån $\alpha$ om $|\text{BT}| > \lambda_{\alpha/2}$, där $\lambda_{\alpha/2}$ är $\alpha/2-$kvantilen för standardiserad normalfördelning([10] och [13]). Om resultatet från testet visar att vi kan förkasta nollhypotesen tyder det på att modellen systematiskt över- eller underestimerar VaR(se [7] och [8]).

# 3 Metod

När vi nu har redogjort för den teori som ligger till grund för arbetet beskrivs i det här avsnittet metoden som används för skapandet av volatilitetsmodeller. Vi inleder med att ge en bild av datamaterialet och studerar de statistiska egenskaperna varefter vi fortsätter att beskriva modelleringen.

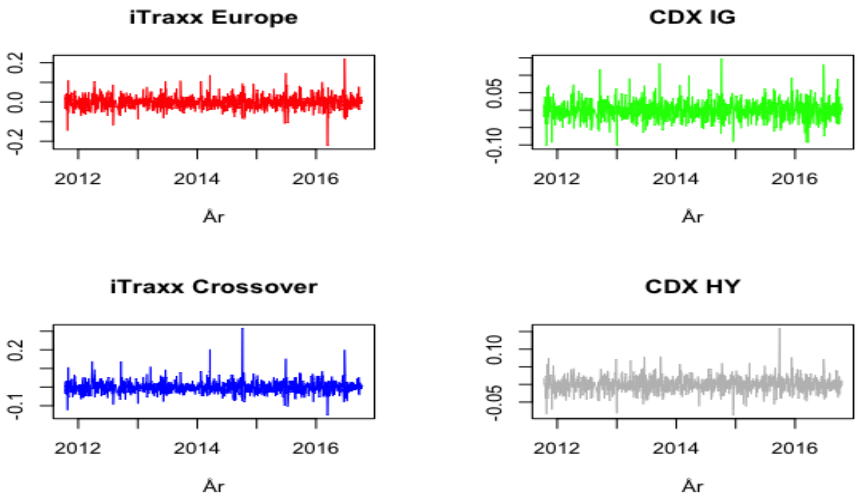
## 3.1 Analys av data

Data som används i denna uppsats sträcker sig från 2011/10/12 till och med 2018/02/16. Som tidigare nämnts undersöks tidsserier som är spreaden på fyra Credit Default Swap-index och går under namnen iTraxx Europe, iTraxx Crossover, CDX IG och CDX HY. Av dessa är iTraxx Europe och CDX IG index som innehåller kontrakt av typen investment grade medan iTraxx Crossover och CDX HY är index som innehåller kontrakt av typen speculative grade(se avsnitt 2.1). Efter att data för dessa serier samlats in noterades det att dessa var av varierande längd varpå datan modifierades till att sträckas över samma tidsperiod med lika antal handelsdagar; detta för att underlätta jämförelser. Efter att ha behandlat datan kvarstod 1545 observationer av respektive index(se Figur 1).




Figur 1: *Utvecklingen av spreaden för respektive CDS-index under perioden* 2011/10/12 – 2018/02/16.

I Figur 1 ser vi varje serie uttryckt i spreads. Som tidigare nämnts kommer vi i det här arbetet att studera den logaritmerade avkastningen för respektive serie(se ekvation (1)). Data delas även upp i två delar där vi använder de första fem åren för att skapa oss modeller vilka sedan utvärderas enligt den backtestingprocedur som beskrevs i avsnitt 2.11 för resterande tidsperiod. Modellering och analys sker på data mellan 2011/10/13 – 2016/10/13 och i Figur 2 visas den logaritmerade avkastningen för denna period.




Figur 2: *Logaritmerad avkastning för respektive index under perioden* 2011/10/13 – 2016/10/13.

Av Figur 2 framgår det att avkastningarna fluktuerar kring värdet noll och att svängningarna tenderar att vara större i vissa perioder än i andra. För att få en uppfattning kring avkastningsdatans egenskaper presenteras deskriptiv statistik i Tabell 2.

| | Min | Max | Medelvärde | Median | Standardav. | Skevhet | Kurtosis |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| iTraxx Europe | −0.22 | 0.22 | −0.00068 | −0.0003 | 0.032 | 0.16 | 4.5 |
| iTraxx Crossover | −0.15 | 0.32 | −0.00065 | −0.0013 | 0.032 | 1.33 | 11.5 |
| CDX IG | −0.1 | 0.15 | −0.00044 | −0.0004 | 0.026 | 0.36 | 2.7 |
| CDX HY | −0.09 | 0.16 | −0.0004 | 0 | 0.02 | 0.36 | 4.44 |

Tabell 2: *Deskriptiv statistik för respektive avkastningsserie under perioden* 2011/10/13 – 2016/10/13.

Ur Tabell 2 ser vi att kurtosis för iTraxx Europe, iTraxx Crossover och CDX HY överstiger värdet 3 vilket tyder på att fördelningen för dessa har tyngre svansar än normalfördelningen. Vi observerar även att data för alla index har en positiv skevhet vilket indikerar att den underliggande fördelningen är viktad åt höger. Vidare ser vi att stickprovsmedelvärdet och medianen för alla serier ligger nära noll. Det framgår även att värdet på standardavvikelsen dominerar stickprovsmedelvärdet vilket ofta observeras när man studerar dagliga avkastningar på finansiella tillgångar(se [2], kapitel 1).

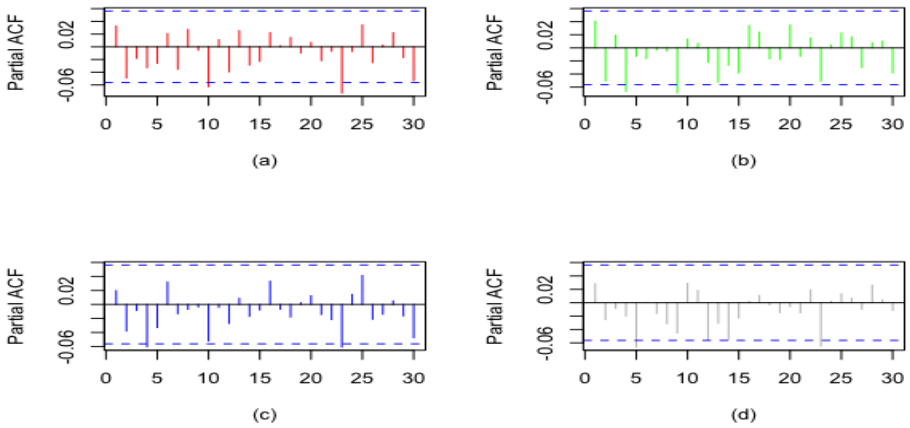
## 3.2 Modellering

Efter att ha gjort en inledande analys av data kommer metoden som använts vid framtagandet av modeller att beskrivas i denna sektion. Den bakomliggande teorin ges i avsnitt 2.

### 3.2.1 Modellering av väntevärdesstrukturen

Vi utgår från tidsseriemodellen $r_t = \mu_t + c_t$, som beskriver avkastningen vid tiden $t$. Första steget i att bygga en modell är att hitta ett uttryck för väntevärdesstrukturen $\mu_t$. Vi kommer inledningsvis undersöka vilken AR($p$)-modell(se avsnitt 2.4.1) som bör ansättas till varje serie utifrån den partiella autokorrelationsfunktionen.

Om vi studerar PACF-plottarna i Figur 3 ser vi att det finns några signifikanta tidssteg, eller lags, som ligger utanför de 95 %:iga konfidensintervallen. Vi observerar dock att autokorrelationen för alla serier ligger i intervallet [-0.073, 0.041] där de mest signifikanta tidsstegen har så pass liten korrelation att en AR-anpassning inte bedöms vara nödvändig. Vi väljer därför att fortsätta undersöka om väntervärdesstrukturen för respektive index bör ansättas till en konstant $\mu_t = \mu$(i detta fall stickprovsmedelvärdet) eller om denna kan exkluderas ur modellen.




Figur 3: *PACF-plottar för respektive serie med 30 lags. (a) iTraxx Europe, (b) CDX IG, (c) iTraxx Crossover och (d) CDX HY.*

Av den deskriptiva statistiken, Tabell 2, framgår att stickprovsmedelvärdet för respektive serie tycks ligga nära noll. Detta är inte så konstigt om man samtidigt studerar bilderna för logavkastningen i Figur 2, där man ser att

dessa varierar kring värdet noll. Vi utför därför ett tvåsidigt t-test under nollhypotesen att stickprovsmedelvärdet är lika med noll(se avsnitt 2.8.1).

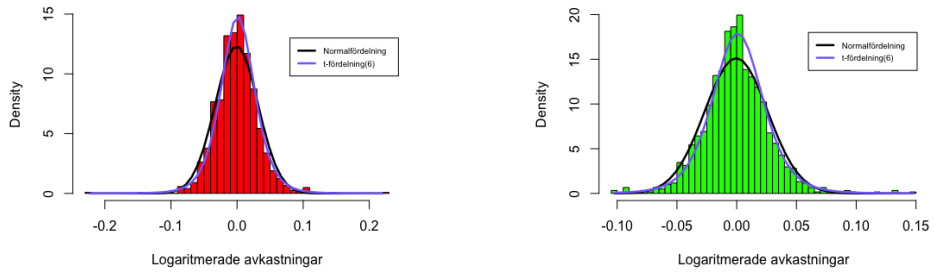
| | \|T\| | p-värde | 95 % K.I |
|---|---|---|---|
| iTraxx Europe | 0.74 | 0.46 | $[-0.003, 0.001]$ |
| iTraxx Crossover | 0.71 | 0.48 | $[-0.002, 0.001]$ |
| CDX IG | 0.59 | 0.55 | $[-0.002, 0.001]$ |
| CDX HY | 0.66 | 0.51 | $[-0.002, 0.0008]$ |

Tabell 3: *T-test för respektive serie.*

Tabell 3 visar resultatet från testet. Vi observerar att $|\mathrm{T}| < t_{0.025}(1212) = 1.96$ och att samtliga p-värden överstiger signifikansnivån 5 %. Detta betyder att vi inte förkastar nollhypotesen att stickprovsmedelvärdet är lika med noll. Även det 95 %:iga konfidensintervallet visar att vi inte kan förkasta $H_0$ vilket resulterar i att vår fortsatta modell skrivs på formen $r_t = c_t$.

### 3.2.2 Undersökning av residualernas fördelning

Efter att ha reducerat tidseriemodellen för respektive serie är vi nu intresserade av vilken fördelning residualerna, $c_t$, kan tänkas ha. Vi har redan ur Tabell 2 konstaterat att kurtosis för iTraxx Europe, iTraxx Crossover och CDX HY är större än kurtosis för normalfördelningen och att skevheten inte är identisk lika med noll för någon serie. För att undersöka detta närmare visas histogram av residualerna för iTraxx Europe och CDX IG. Samma bilder för iTraxx Crossover och CDX HY återfinns i Figur 12(Appendix). Till histogrammen har täthetsfunktionen för en normalfördelning och t-fördelning med 6 frihetsgrader anpassats.

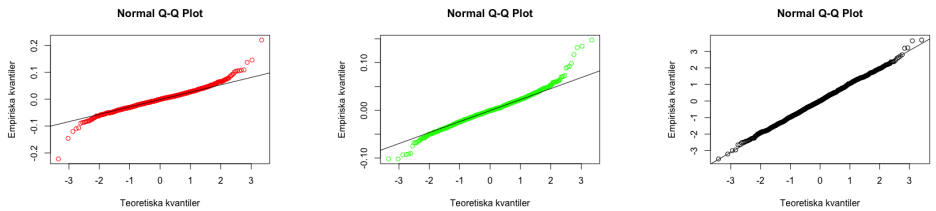



(a) iTraxx Europe

(b) CDX IG

Figur 4: *Histogram över residualerna*($c_t$).

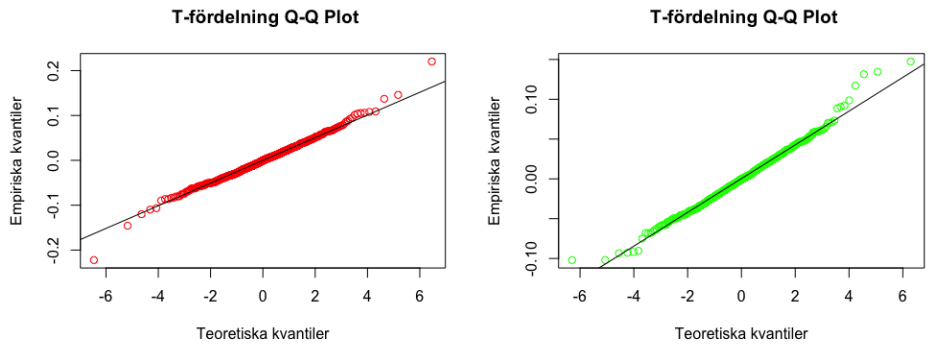
Av Figur 4 och Figur 12 framgår det att residualernas fördelning verkar följa en t-fördelning bättre än normalfördelningen. För att utreda detta vidare tittar vi på diagram där de empiriska kvantilerna jämförs med de teoretiska kvantilerna i normalfördelningen i en så kallad "QQ-plot".




(a) iTraxx Europe (b) CDX IG (c) N(0,1)

Figur 5: *QQ-plottar mot teoretiska kvantiler från en normalfördelning.*

I Figur 5 observerar vi att både iTraxx Europe och CDX IG har kvantiler som avviker från normalfördelningen i svansarna. Detta går i linje med värdet på kurtosis som observerats för iTraxx Europe medan CDX IG ser ut att ha tyngre svansar än värdet på kurtosis visat. För jämförelse visas i bilden till höger simulerad data från en standardiserad normalfördelning. Att en t-fördelning ger bättre anpassning inses ur Figur 6 där QQ-plottar visar att de empiriska kvantilerna följer de teoretiska kvantilerna från en t-fördelningen med 6 frihetsgrader bättre. Vi observerar samma tendens hos iTraxx Crossover och CDX HY(se Figur 13 och 14 i Appendix).




(a) iTraxx Europe (b) CDX IG

Figur 6: *QQ-plottar mot teoretiska kvantiler från en t-fördelning med 6 frihetsgrader.*

Vi avslutar avsnittet med att utföra ett Jarque-Bera-test(se 2.8.3) för att testa om normalfördelningsantagandet är lämpligt. Nollhypotesen är att da-

ta är normalfördelat vilket testas mot alternativhypotesen är att data inte är normalfördelat.

| | JB | $\chi^2_{0.05}(2)$ | p-värde |
|---|---|---|---|
| iTraxx Europe | 1042 | 5.99 | $< 2.2 * 10^{-16}$ |
| iTraxx Crossover | 7038 | 5.99 | $< 2.2 * 10^{-16}$ |
| CDX IG | 390 | 5.99 | $< 2.2 * 10^{-16}$ |
| CDX HY | 1030 | 5.99 | $< 2.2 * 10^{-16}$ |

Tabell 4: *Jarque-Bera-test för respektive serie.*

Av resultatet i Tabell 4 framgår att alla värden på JB, eller ekvation (16), överstiger en chitvåfördelning med 2 frihetsgrader med god marginal och att p-värdet är mycket lägre än signifikansnivån 0.05. Detta innebär att nollhypotesen förkastas. Utifrån resultatet i denna sektion kan vi konstatera att residualerna inte verkar följa en normalfördelning särskilt väl.

### 3.2.3 Undersökning av betingad heteroskedasticitet

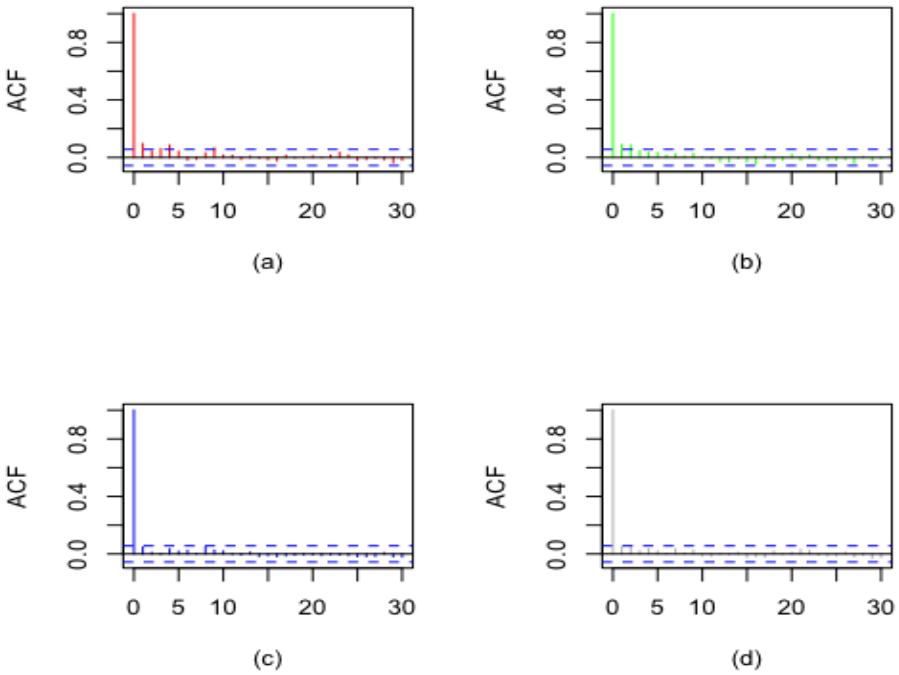
När vi nu har reducerat tidsseriemodellerna till $r_t = c_t = \sigma_t \varepsilon_t$ och undersökt vilken bakomliggande fördelning dessa tycks ha är nästa steg att testa om det förekommer GARCH-effekter i data. För att avgöra förekomsten av betingad heteroskedasticitet kommer vi att studera de kvadrerade residualerna $c_t^2$. Vi börjar med att applicera ett Ljung-Box-test(se 2.8.2) för att avgöra om det förekommer ett beroende i $c_t^2$. Hypotesen som testas är $H_0$ : ingen korrelation i de kvadrerade residualerna upp till lag $p$ där $p = \ln(n) \approx 7$.

| | LB(7) | $\chi^2_{0.05}(7)$ | p-värde |
|---|---|---|---|
| iTraxx Europe | 29.5 | 14.07 | 0.00013 |
| iTraxx Crossover | 5.36 | 14.07 | 0.627 |
| CDX IG | 24.79 | 14.07 | 0.00089 |
| CDX HY | 11.33 | 14.07 | 0.13 |

Tabell 5: *Ljung-Box-test för kvadrerade residualer.*

I Tabell 5 visas utfallet av Ljung-Box-testet. Vid jämförelse av värdet på LB-statistikan mot en chitvåfördelning med 7 frihetsgrader är slutsatsen att $H_0$ förkastas för iTraxx Europe och CDX IG. För speculative grade serierna iTraxx Crossover och CDX HY kan vi inte kan förkasta nollhypotesen vilket antyder att GARCH-effekter saknas och att det därför inte finns något

beroende att modellera i dessa serier. För att avgöra detta studerar vi även ACF-plottar för de kvadrerade residualerna där bilderna visas i Figur 7.




Figur 7: *ACF-plottar för kvadrerade residualer med lag = 30. (a) iTraxx Europe, (b) CDX IG, (c) iTraxx Crossover och (d) CDX HY.*

Det framgår ur bilderna på ACF ovan att indexen iTraxx Crossover och CDX HY inte har några signifikanta lags när vi studerar de kvadrerade residualerna. Investment grade-indexen visar däremot att det finns ett beroende i data vilket bekräftar vad Ljung-Box-testet indikerat. GARCH-modeller kommer därför anpassas till iTraxx Europe och CDX IG.

### 3.2.4 GARCH-modellering

Vi går nu vidare med att modellera volatilitetsstrukturen utifrån de betingade heteroskedastiska modellerna beskrivna i avsnitt 2.4.2. Valet av modeller för detta arbete är GARCH(1,1), GARCH(2,1) och GARCH(2,2) vilket motiveras av att lägre ordningens GARCH-modeller är vanligast förekommande i de flesta tillämpningar(se [1], kapitel 3). Anpassning av dessa sker, som tidigare nämnts, under normal- och t-fördelningsantagande för feltermen $\varepsilon_t$(se ekvation (6)).

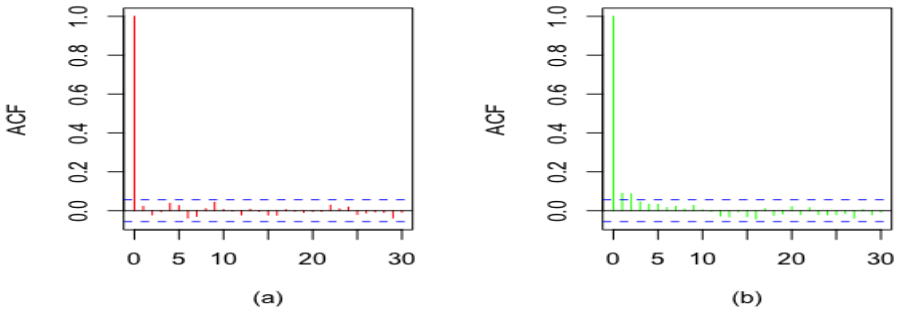
För att avgöra vilken av ovanstående GARCH-modeller som ger bäst anpassning till data kommer ett urval göras baserat på AIC och BIC(se avsnitt 2.9.1). De modeller med lägst värde på dessa kriterier kommer att studeras vidare. Nedan visas AIC och BIC för modellerna efter anpassning till respektive serie.

| | | **Normalfördelning** | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Kriterium** | **GARCH(1,1)** | **GARCH(2,1)** | **GARCH(2,2)** |
| **iTraxx Europe** | **AIC** | −4.0682 | −4.0665 | −4.0668 |
| | **BIC** | −4.0556 | −4.0497 | −4.0457 |
| **CDX IG** | **AIC** | −4.4299 | −4.4283 | −4.4266 |
| | **BIC** | −4.4173 | −4.4115 | −4.4056 |
| | | **T-fördelning** | | |
| | **Kriterium** | **GARCH(1,1)** | **GARCH(2,1)** | **GARCH(2,2)** |
| **iTraxx Europe** | **AIC** | −4.1330 | −4.1314 | −4.1299 |
| | **BIC** | −4.1162 | −4.1104 | −4.1047 |
| **CDX IG** | **AIC** | −4.4954 | −4.4939 | −4.4924 |
| | **BIC** | −4.4786 | −4.4729 | −4.4672 |

Tabell 6: *AIC och BIC för GARCH-anpassningar under normal- och t-fördelningsantagande.*

I Tabell 6 noterar vi att ytterligare parametrar i GARCH-modellerna inte ger bättre anpassning, utan GARCH(1,1)-modellen har genomgående lägre värden på AIC och BIC. Vi ser även att modeller under t-fördelningsantagande har lägre värden än under normalfördelningsantagande. Vi väljer därför att begränsa oss till att undersöka GARCH(1,1) och utreda om fördelningsantagandet har betydelse för hur lyckosam modellen är vid skattning av VaR.

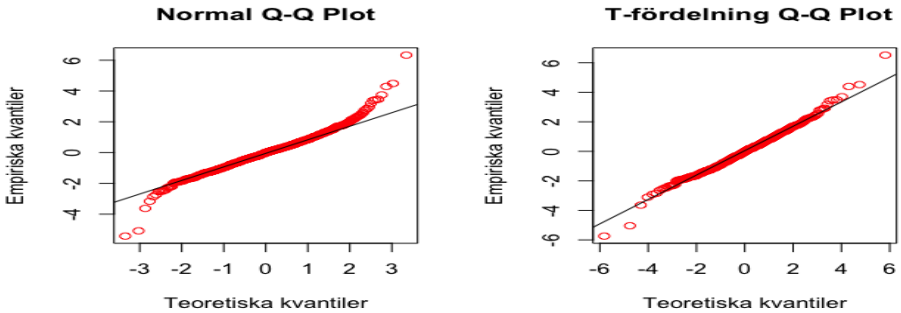
För en korrekt specificerad GARCH-modell ska beroendet i data ha försvunnit efter modellanpassning. Vi behöver således avgöra om de anpassade modellerna har lyckats med detta och undersöker därför kvadraten på de standardiserade residualerna $\tilde{c_t}^2 = \left(\frac{c_t}{\sigma_t}\right)^2$. Om modellen lyckas beskriva volatilitetsstrukturen bör det inte finnas någon signifikant autokorrelation i $\tilde{c_t}^2$(se [1], kapitel 3). Likt tidigare avgörs detta genom att studera ACF-plottar och utföra ett Ljung-Box-test.




Figur 8: *ACF-plottar för kvadraten på standardiserade residualer från GARCH(1,1)-anpassning med t-fördelning. (a) iTraxx Europe och (b) CDX IG.*

Av Figur 8 framgår att modellanpassningen har lyckats fånga beroendet i data för iTraxx Europe medan hos CDX IG ser vi att det fortfarande förekommer signifikant korrelation. Motsvarande bilder för GARCH(1,1) med normalfördelningsantagande finns i Figur 15(Appendix). Efter att ha applicerat ett Ljung-Box-test på $\tilde{c}_t{}^2$ för CDX IG(se Tabell 9 och Tabell 10) framgår att GARCH(1,1)-modellen inte är adekvat nog för att beskriva volatilitetsstrukturen hos serien CDX IG. En annan modell bör därför undersökas men kommer inte att göras i detta arbete.

Vidare vill vi verifiera fördelningsantagandet som gjordes för feltermen $\varepsilon_t$ vilket görs genom att studera QQ-plottar för de standardiserade residualerna $\tilde{c}_t = \left(\frac{c_t}{\sigma_t}\right)$ för serien iTraxx Europe(se Figur 9).




Figur 9: *QQ-plottar för standardiserade residualer från GARCH(1,1)-anpassning under normafördelningsantagande(vänster) och under t-fördelningsantagande(höger) för serien iTraxx Europe.*

I Figur 9 ser vi att de standardiserade residualerna efter GARCH(1,1)-anpassning med t-fördelade feltermer $\varepsilon_t$ följer de teoretiska kvantilerna bättre än modellen under normalfördelningsantagande. Detta går i linje med vad vi observerat för residualernas fördelning(se avsnitt 3.2.2) och den deskriptiva statistiken i Tabell 2, alltså att en t-fördelning verkar vara bättre lämpad för datamaterialet. Vi avslutar denna sektion med att i Tabell 7 visa de maximum likelihood-skattade parametrarna för de anpassade modellerna. Då vi i nästa avsnitt utför backtestingen på olika långa intervall av data visas här parameterskattningarna för modellanpassningar på dessa perioder.

| | | **Normalfördelning** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Tidsperiod** | $\hat{\alpha_0}$ | $\hat{\alpha_1}$ | $\hat{\beta_1}$ | $\hat{\nu}$ |
| | **1 ÅR** | $1.54 * 10^{-4}$ | $3.19 * 10^{-1}\star$ | $6.22 * 10^{-1}\star\star$ | – |
| **iTraxx Europe** | **2 ÅR** | $1.31 * 10^{-4}\star$ | $2.12 * 10^{-1}\star$ | $7.03 * 10^{-1}\star\star$ | – |
| | **5 ÅR** | $1.72 * 10^{-4}\star\star$ | $1.33 * 10^{-1}\star\star$ | $7.09 * 10^{-1}\star\star$ | – |
| | | **T-fördelning** | | | |
| | **Tidsperiod** | $\hat{\alpha_0}$ | $\hat{\alpha_1}$ | $\hat{\beta_1}$ | $\hat{\nu}$ |
| | **1 ÅR** | $1.77 * 10^{-4}\star\star$ | $1.55 * 10^{-1}\star\star$ | $7.17 * 10^{-1}\star\star$ | 4 |
| **iTraxx Europe** | **2 ÅR** | $1.75 * 10^{-4}\star\star$ | $1.25 * 10^{-1}\star\star$ | $7.23 * 10^{-1}\star\star$ | 5 |
| | **5 ÅR** | $1.83 * 10^{-4}\star$ | $1.03 * 10^{-1}\star\star$ | $7.17 * 10^{-1}\star\star$ | 7 |

Tabell 7: *Parameterskattningar för GARCH(1,1) anpassad på data givet perioden* $2015/10/13 - 2016/10/13$*(1 år),* $2014/10/13 - 2016/10/13$*(2 år) och* $2011/10/13 - 2016/10/13$*(5 år) . Signifikans på parametrarna visas utifrån* $\star$ *på nivån 5 % och* $\star\star$ *på nivån 1 %.*

Av Tabell 7 framgår att parameterskattningarna uppfyller antagandena för GARCH-modellen(se avsnitt 2.4.2), det vill säga att $\hat{\alpha_0} > 0$, $\hat{\alpha_1} \geq 0$, $\hat{\beta_1} \geq 0$ och $\hat{\alpha_1} + \hat{\beta_1} < 1$.

# 4 Resultat

När vi nu har konstaterat att GARCH(1,1) under både normal- och t-fördelningsantagande lyckats fånga beroendet i data för indexet iTraxx Europe återstår nu att utvärdera modellerna enligt den backtestingprocedur som beskrevs i avsnitt 2.11. Stickprovet som utelämnats från analysen i avsnitt 3 sträcker sig mellan $2016/10/14 - 2018/02/16$ och kommer nu användas för att avgöra hur väl modellerna presterar vid backtestingen. Evalueringen sker genom ett binomialtest(se ekvation (23)) där vi undersöker hur många negativa avkastningar som överträder skattningen av 5 % VaR. Detta innebär att en bra specificerad modell ska täcka 95 % av förlusterna vilket kan liknas vid ett ensidigt konfidensintervall.

I varje tidssteg kommer vi att skatta VaR(se ekvation (20) och (21)) genom en process som vi kallar ett rullande fönster. Varje ny prediktion använder ett tidsintervall av samma längd där den äldsta dagen exkluderas och den senaste dagen inkluderas. Med en fönsterlängd av femårig data skattas $-\hat{\text{VaR}}^{0.05}_{2016/10/14}$ med modellanpassningar från perioden 2011/10/13 – 2016/10/13. Därefter skattas nästa dag, $-\hat{\text{VaR}}^{0.05}_{16/10/15}$, med data från perioden 2011/10/14 – 2016/10/14 och så vidare. Parametrarna i modellen skattas på nytt vid varje tidssteg och detta görs för hela det stickprov som utelämnats, det vill säga 331 dagar. Ett rullande fönster är att föredra vid prediktion då det möjliggör för modellen att fånga den tidsvarierande volatiliteten i data(se [12], kapitel 9) och hur skattningarna av modellens parametrar förändras med tiden.

Under nollhypotesen antas modellen vara rätt kalibrerad och antalet överträdelser bör därför vara Bin(331,0.05)-fördelat med förväntat antal $331 * 0.05 = 16.6$. För att vidare avgöra om modellernas prediktionsförmåga påverkas av vilken fönsterlängd som används tittar vi på intervall av ett-, två- respektive femårig data. Tabell 8 visar resultatet från backtestingen.

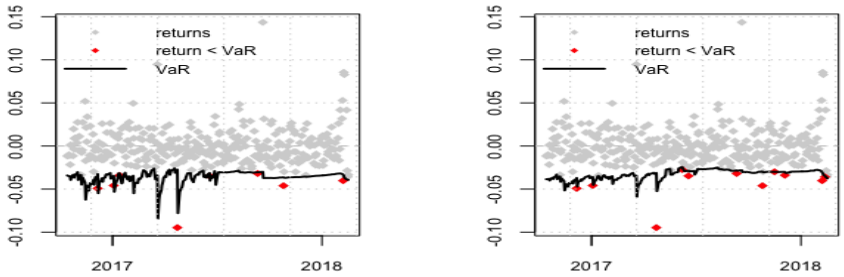
| | | **Normalfördelning** | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Fönsterlängd** | **Förväntad övertr(5%).** | **Realiserad(andel) övertr** | **\|BT\|** |
| | **1 ÅR** | 16.6 | 8(2.4%) | 2.156 |
| **iTraxx Europe** | **2 ÅR** | 16.6 | 5(1.5%) | 2.913 |
| | **5 ÅR** | 16.6 | 4(1.2%) | 3.165 |
| | | **T-fördelning** | | |
| | **Fönsterlängd** | **Förväntad övertr(5%).** | **Realiserad(andel) övertr** | **\|BT\|** |
| | **1 ÅR** | 16.6 | 11(3.3%) | 1.399 |
| **iTraxx Europe** | **2 ÅR** | 16.6 | 7(2.1%) | 2.408 |
| | **5 ÅR** | 16.6 | 4(1.2%) | 3.165 |

Tabell 8: *Resultat av backtesting för GARCH(1,1) under normal- och t-fördelningsantagande. Evalueringsperioden sträcker sig mellan* 2016/10/14–2018/02/16.

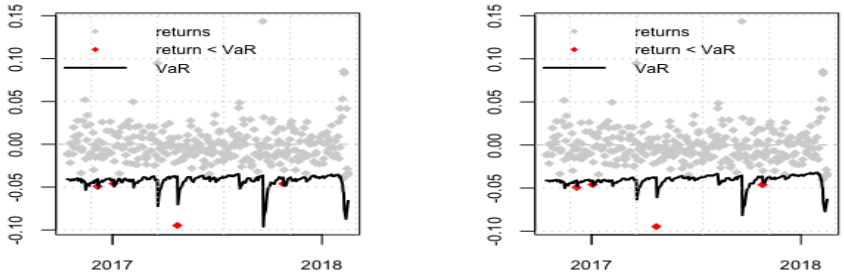
I Tabell 8 visas utfallet från backtestingen. Vad vi observerar är att oavsett vilken modell som undersöks så varierar antalet överträdelser beroende på vilken fönsterlängd som används vid backtestingen. Ett rullande fönster med fem år av data ger lika antal överträdelser för modellen under både normal- och t-fördelningsantagande. Om vi däremot använder en fönsterlängd av ett eller två år ser vi att modellen under t-fördelningsantagande ger skattningar av VaR där andelen överträdelser ligger närmare den förväntade andelen(5 %) än modellen under normalfördelningsantagande.

Även resultatet från binomialtestet visas i Tabell 8. Under nollhypotesen antas modellen vara korrekt och då gäller, som beskrivs i 2.11, att antalet överträdelser följer en binomialfördelning med $n = 331$ och $p = 0.05$. Testet som utförs är därför $H_0 : p = 0.05$ mot $H_1 : p \neq 0.05$ där vi förkastar noll-

hypotesen om $|\mathrm{BT}| > \lambda_{0.025} = 1.96$ på signifikansnivån 0.05. Av resultatet framgår att nollhypotesen förkastas i alla fallen förutom för GARCH(1,1) under t-fördelningsantagande med fönsterlängden ett år. Detta innebär att modellerna oberoende av fördelningsantagande och fönsterlängd tenderar att systematiskt överestimera 5 % VaR förutom i det senare fallet. Nedan visas backtestingen grafiskt för serien iTraxx Europe med fönsterlängd ett och fem år.




Figur 10: *Backtesting vid användning av fönsterlängden ett år för iTraxx Europe. Bilden till vänster visar GARCH(1,1) under normalfördelningsantagande och bilden till höger under t-fördelningsantagande.*




Figur 11: *Backtesting vid användning av fönsterlängden fem år för iTraxx Europe. Bilden till vänster visar GARCH(1,1) under normalfördelningsantagande och bilden till höger under t-fördelningsantagande*

# 5 Diskussion och slutsats

Syftet med det här arbetet var att undersöka ett urval av modeller från GARCH-familjen och avgöra vilken av dessa som ger bäst anpassning för att beskriva volatilitetsstrukturen i avkastningsdata för fyra Credit Default Swap-index. Vi begränsade oss till att titta på GARCH(1,1), GARCH(2,1) och GARCH(2,2) under normal- och t-fördelningsantagande för feltermen $\varepsilon_t$. Av dessa utvärderade vi därefter den framtagna modellens förmåga att skatta riskmåttet Value-at-Risk.

Avkastningsdatan som undersöktes var två CDS-index av typen investment grade och två CDS-index av typen speculative grade(se avsnitt 2.1). I den inledande analysen av data, Tabell 2, fick vi en fingervisning om egenskaperna hos den underliggande sannolikhetsfördelningen för respektive serie. Det framgick att både investment och speculative grade data hade värden på både skevhet och kurtosis som skiljer sig från normalfördelningen. Det kunde dock noteras att CDX IG hade ett värde på kurtosis($\approx 2.7$) och iTraxx Europe en skevhet($\approx 0.16$) som låg närmast värdet för en normalfördelning. En mer utförlig jämförelse mellan normal- och t-fördelningen för avkastningsdatan gjordes i sektion 3.2.2 där slutsatsen efter att ha studerat både histogram, QQ-plottar och utfört ett Jarque-Bera-test var att t-fördelningen gav en bättre anpassning än normalfördelningen för både investment- och speculative grade-serierna.

I skapandet av tidsseriemodeller utgick vi från ekvation (3) och undersökte först om väntevärdesstrukturen kunde beskrivas av AR-modell eller om den skulle ansättas till en konstant. Av den låga autokorrelationen i PACF bilderna(se Figur 3) gjordes bedömingen att en AR-modell inte skulle anpassas till någon av serierna då detta skulle resultera i fler parametrar och en mer komplicerad modell. För att avgöra om väntevärdesstrukturen istället skulle beskrivas genom stickprovsmedelvärdet för respektive serie gjordes ett t-test(se Tabell 3). Slutsatsen efter att ha observerat resultatet från testet var att vi på 95% konfidensnivå inte kunde förkasta nollhypotesen om att stickprovsmedelvärdet var lika med noll. Detta resulterade i att ekvationen för väntevärdet sattes till noll för alla serier.

Vidare undersöktes förutsättningarna för GARCH-modellering. Detta gjordes genom att utvärdera beroendet hos de kvadrerade residualerna för respektive serie. Genom ett Ljung-Box-test(Tabell 5) och ACF-plottar(Figur 7) kunde vi endast observera ett beroende i investment grade-data, detta för indexen iTraxx Europe och CDX IG. Speculative grade-serierna visade sig inte lämpliga för modellering med GARCH. En möjlig förklaring för indexet iTraxx Crossover fås genom att studera Figur 2 där man observerar en

extrem avkastning 2014/10/06. Detta kan även vara ett svar på varför skevheten och kurtosis för serien avviker betydligt från normalfördelningen(se Tabell 2). På liknande sätt ser vi i Figur 2 att det verkar ha skett en händelse på marknaden 2015/09/28 som lett till en extrem avkastning för indexet CDX HY. Dessa extrema händelser kan vara en möjlig förklaring till varför speculative grade-data inte visade sig uppfylla förutsättningarna för GARCH-modellering.

Efter att ha undersökt för beroende i data anpassades GARCH(1,1)-, GARCH(2,1)- och GARCH(2,2)-modeller till investment grade-serierna. Under både normal- och t-fördelningsantagande för feltermen $\varepsilon_t$ visade det sig att GARCH(1,1)-modellen gav bäst anpassning till data baserat på AIC och BIC(se Tabell 6). Det man också kunde observera från tabellen var att GARCH(2,1) och GARCH(2,2) bara hade marginellt större värden på dessa informationskriterier varför en vidare studie av dessa modeller hade kunnat vara av intresse. Vi valde däremot att begränsa oss till GARCH(1,1)-modellen på grund av dess enkelhet.

För att avgöra om de framtagna modellerna lyckats fånga det linjära beroendet i data undersöktes återigen ACF-plottar och Ljung-Box-test men den här gången för kvadraten på de standardiserade residualerna från GARCH-anpassningen(se 3.2.4). Slutsatsen från testerna var att modellen lyckats beskriva datastrukturen för serien iTraxx Europe under båda fördelningsantagandena men inte för indexet CDX IG. Därför bör en annan modell undersökas på detta datamaterial vilket lämnas som ett förslag till forsättning på det här arbetet. Vi studerade även fördelningen för de standardiserade residualerna efter modellanpassning genom QQ-plottar(se Figur 9). Här framgick att modellen med t-fördelade feltermer var bättre lämpad vilket var ett rimligt resultat utifrån den inledande analysen av data och går även i linje med vad värdena på AIC och BIC visat.

Efter dataanalysen och framtagandet av GARCH(1,1)-modellen kvarstod att utvärdera hur lyckosam denna var att generera endagsskattningar av Value-at-Risk för serien iTraxx Europe. Resultatet från backtestingen(se Tabell 8) visade att längden på det rullande fönstret som användes var av betydelse. Med en fönsterlängd på ett och två år kunde vi konstatera att modellen under t-fördelningsantagande presterade något bättre än under normalfördelningsantagande och med längden fem år gav modellerna samma resultat. Binomialtestet visade att endast GARCH(1,1) under t-fördelningsantagande med ett rullande fönster på ett år var lyckosam vid skattning av 5 % VaR. Tolkningen av detta är att resterande modeller tenderar att överskatta 5 % VaR oavsett vilken längd på fönstret som används. Vidare kan vi av backtestingen notera att båda modellerna presterade bättre

vid anpassning på mindre intervall av data från investment grade-indexet iTraxx Europe.

Avslutningsvis sammanfattas våra slutsatser från arbetet enligt:

- Den underliggande sannolikhetsfördelningen för avkastningsdata på CDS-index av både typen investment grade och speculative grade anpassas bättre av en t-fördelning än av en normalfördelning.
- Endast investment grade-serien iTraxx Europe visade sig lämplig att modellera med GARCH(1,1). Data av typen specualtive grade(iTraxx Crossover och CDX HY) bör undersökas med andra modeller vilket även gäller för investment grade-serien CDX IG.
- Utifrån informationskriterierna AIC och BIC gav GARCH(1,1) bättre anpassning än GARCH(2,1) och GARCH(2,2). Modellen under t-fördelningsantagande kunde även konstateras ge bättre anpassning än under normalfördelningsantagande.
- GARCH(1,1)-modellens förmåga att skatta 5 % VaR för serien iTraxx Europe bör betraktas med skepsis, detta då modellen under både normal- och t-fördelningsantagande visade benägenhet till överestimering av VaR.
- Längden på fönstret vid backtesting spelar roll för hur framgångsrikt GARCH(1,1) skattar 5 % VaR under båda fördelningsantagandena för investment grade-serien iTraxx Europe. Resultatet visade att modellanpassningar på mindre intervall av data ger bättre VaR-skattningar.

### 5.0.1 Vidare studier

I arbetet konstaterades det att avkastingsserierna för iTraxx Crossover, CDX HY och CDX IG inte ansågs lämpliga att modellera med GARCH(1,1). En intressant koppling som vi berörde i diskussionen är att en extrem händelse verkar ha skett på marknaden 2014/10/06 och påverkat både iTraxx Crossover och CDX IG(se Figur 2). På liknande sätt noterade vi en extrem observation för CDX HY 2015/09/28. En möjlighet är därför att exkludera dessa dagar från datamaterialet och undersöka modellernas lämplighet i sådant fall. Det lämnas som ett förslag till fortsatt studie.

Vidare har vi genomgående i arbetet studerat modellerna under normal- och t-fördelningsantagande. En intressant forsättning hade varit att anpassa modellerna under ett annat fördelningsantagande, exempelvis en skev t-fördelning. Då vi i Tabell 2 observerat att all CDS-data visade sig något skev är det möjligt att en modell under annat fördelningsantagande är bättre lämpad.

Till sist är det värt att kommentera att all data som använts i den här uppsatsen är tagen från CDS-marknaden. För en bredare analys och jämförelse hade det varit av intresse att undersöka de framtagna modellerna på annan typ av data. Exempelvis hade man kunnat simulera data från de anpassade modellerna eller undersökt annan finansiell data för att därefter avgöra om resultatet skiljer sig från vad som observerats i detta arbete.

# 6 Referenser


[1] Tsay, R. 2010. *Analysis of financial time series*, third edition, John Whiley & Sons.

[2] Christoffersen, P. 2012. *Elements of Financial Risk Management*, second edition, Elsevier Inc.

[3] ihs markit. Hämtat 20 mars 2018. `https://ihsmarkit.com/products/markit-itraxx.html`.

[4] Statistiska institutionen. Hämtat 25 mars 2018. *Tidsserier*. `https://www.statistics.su.se/forskning/tidsserier`.

[5] Alm, S.E, & Brittom, T. 2011. *Stokastik: sannolikhetsteori och statistikteori med tillämpningar*, första upplagan, Liber AB.

[6] Held, L, & Bové, D.S. 2014. *Applied Statistical Inference: Likelihood and Bayes*, Springer.

[7] McNeil, A.J, Frey, R, & Embrechts, P. 2005. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press.

[8] McNeil, A.J, & Frey, R. *Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach*, Journal of Empirical Finance 7, 2000, 271-300.

[9] Roccioletti, S. 2016. *Backtesting Value at Risk and Expected Shortfall*, Springer Gabler.

[10] Casella, G, & Berger, R.L. 2002. *Statistical Inference*, Second Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning.

[11] Gut, A. 2009. *An Intermediate Course in Probability*, second edition, Springer.

[12] Singh, A.K, & Allen, D.E. 2016. *R in Finance and Economics, A Beginner's Guide*, World Scientific.

[13] Jorion, P. 2007. *Value at risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk*, third edition, McGraw-Hill.

# 7 Appendix

## 7.1 Sannolikhetsfördelningar

### 7.1.1 Normalfördelning

För en normalfördelad stokastisk variabel $X$ med väntevärde $\mu$ och varians $\sigma^2$, där $-\infty < \mu < \infty$ och $\sigma > 0$, ges täthetsfunktionen av

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, \tag{24}$$

där x är en realisering av $X$ och $-\infty < x < \infty$.[10]

### 7.1.2 (Student's) t-fördelning

För en t-fördelad stokastisk variabel $X$ med parametrar $\mu$, $\sigma$ och frihetsgrader $\nu$ ges täthetsfunktionen av

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{(x-\mu)^2}{\nu\sigma^2}\right)^{-\frac{v+1}{2}}, \tag{25}$$

där x är en realisering av $X$. Vidare har vi att väntevärdet för $X$ ges av $\mu$ för $\nu > 1$ och variansen ges av $\sigma^2 \frac{\nu}{\nu-2}$ för $\nu > 2$.[6]

### 7.1.3 Bernoulli- och binomialfördelning.

För en Bernoullifördelad stokastisk variabel $X$ har vi att

$$\begin{cases} p_X(0) = P(X = 0) = 1 - p \\ p_X(1) = P(X = 1) = p \end{cases}, \tag{26}$$

för något $0 \leq p \leq 1$. Vidare ges väntervärdet för $X$ av $p$ och variansen av $p(1-p)$.[5]

För en binomialfördelad stokastisk variabel $Y$ med parametrar $n$ och $p$, där $0 \leq p \leq 1$, ges sannolikhetsfunktionen av

$$p_Y(k) = P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \tag{27}$$

där $k = 0, ..., n$ och $q = 1 - p$. Vidare har vi att väntevärdet för $Y$ ges av $np$ och variansen ges av $npq$.[5]

## 7.2 Rugarch i R

I detta arbete sker dataanalysen och modelleringen i programvaran R. För detaljerad information hänvisas läsaren till https://www.r-project.org. I R finns det ett antal paket som kan användas för att modellera volatiliteten hos tidsserier där några av de vanligaste är *fGarch*, *tseries* och *rugarch*. I detta arbete används den sistnämnda då denna är den mest användbara och kraftfulla av de tre(se [12], kapitel 9).

För att specificera en GARCH(1,1)-modell i *rugarch* används funktionen `ugarchspec` enligt

```
garch11 <- ugarchspec(variance.model = list(model = ''sGARCH''),
garchOrder = c(1,1)), mean.model = list(include.mean = FALSE,
armaOrder = c(0,0)), distribution.model = ''norm''),
```

där man även kan välja att ansätta en modell för väntevärdesstrukturen genom `mean.model` och välja vilket fördelningsantagande man vill underöka via `distribution.model`. Modellanpassning görs genom funktionen `ugarchfit`, där man specifierar modellen via argumentet `spec` och datamängden genom `data`

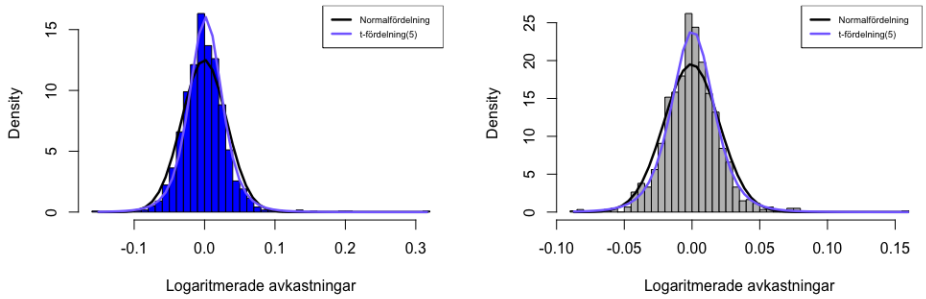
```
garchfit <- ugarchfit(spec = garch11, data = logavkast).
```

Vidare har *rugarch* en väldigt användbar funktion för att skatta modeller med ett rullande fönster och prediktion av VaR som heter `ugarchroll`. Denna funktion ger oss en metod för att skapa rullande prediktioner av 1 % och 5 % VaR

```
roll <- ugarchroll(spec = garch11, data = logavkast, n.ahead = 1,
forecast.length=331, refit.every = 1, window.size=250, refit.win-
dow=''rolling'', calculate.VaR = TRUE, VaR.alpha = c(0.01, 0.05)),
```

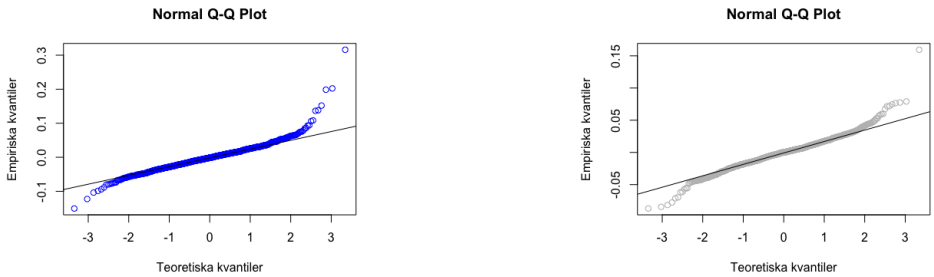
där man specificerar modell och data likt ovan. Argumenten `n.ahead`, `forecast.length`, `refit.every` och `window.size` specificeras utifrån vilken undesökning man vill göra. Den intresserade läsaren hänvisas till [12], kapitel 9.

## 7.3 Bilder



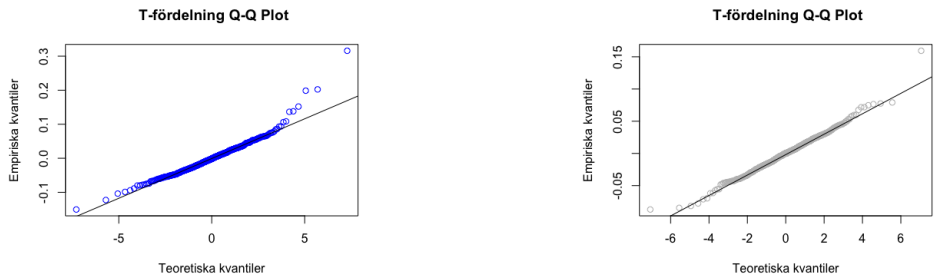

(a) iTraxx Crossover (b) CDX HY

Figur 12: *Histogram över residualerna*($c_t$).




(a) iTraxx Crossover (b) CDX HY

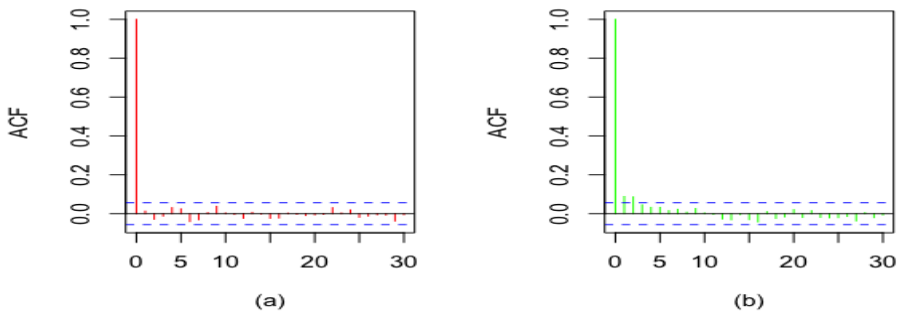
Figur 13: *QQ-plottar mot teoretiska kvantiler från en normalfördelning.*




(a) iTraxx Crossover

(b) CDX HY

Figur 14: *QQ-plottar mot teoretiska kvantiler från en t-fördelning med 5 frihetsgrader.*




Figur 15: *ACF-plottar för kvadraten på standardiserade residualer från GARCH(1,1)-anpassning med normalfördelning. (a) iTraxx Europe och (b) CDX IG.*

| | $LB$ | $\chi^2_{0.05}(7)$ | p-värde |
|---|---|---|---|
| iTraxx Europe | 6.57 | 14.07 | 0.4865 |
| CDX IG | 24.7 | 14.07 | 0.00092 |

Tabell 9: *Ljung-Box-test för kvadraten på standariserade residualer från GARCH(1,1) under normalfördelningsantagande.*

| | $LB$ | $\chi^2_{0.05}(7)$ | p-värde |
|---|---|---|---|
| iTraxx Europe | 6.52 | 14.07 | 0.491 |
| CDX IG | 24.64 | 14.07 | 0.00095 |

Tabell 10: *Ljung-Box-test för kvadraten på standariserade residualer från GARCH(1,1) under t-fördelningsantagande.*