Stockholms universitet

Fängelsestraffets påverkan på ett kriminellt nätverk

Frida Isgren Lagerås

Kandidatuppsats i matematisk statistik
Bachelor Thesis in Mathematical Statistics

Kandidatuppsats 2021:19
Matematisk statistik
September 2021

www.math.su.se

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm

Matematisk statistik
Stockholms universitet
Kandidatuppsats **2021:19**
http://www.math.su.se/matstat

Fängelsestraffets påverkan på ett kriminellt nätverk

Frida Isgren Lagerås*

September 2021

Sammanfattning

I förevarande uppsats redogörs inledningsvis för definitionen av ett kriminellt nätvärk och vilka åtgärder som regeringen har, och vill vidta, för att effektivt bekämpa dem. Straffskärpningar är enligt många politiker ett effektivt verktyg att motverka de kriminella nätverken, men trots det finns det en risk att fängelsestraff inte har en positiv effekt. I denna uppsats undersöks därför hur storleken av ett kriminellt närverk påverkas av att dess medlemmar blir dömda till fängelsestraff i större utsträckning. Vi bygger en modell gjord av en dynamisk slumpgraf som kommer att beskriva ett kriminellt nätverket. De kriminella personerna kommer att kunna befinna sig ute i samhället respektive i fängelset där de kan bilda nya kriminella kontakter med någon hastighet. När en kriminell person har avtjänat sitt fängelsestraff kommer denna med en övergångssannolikheten att stanna kvar i det kriminella nätverket som kommer att bero av totala antalet kontakter personen i fråga har vid en given tid. Alternativt lämna det kriminella livet bakom sig och rehabiliteras. Vi utför ett flertal simuleringar där vi ändrar värden på olika hastigheter i modellen för att därigenom kunna diskutera hur dynamiken i slumpgrafen och andelen rehabiliterade förändras över tid. För att besvara frågeställningarna knyter vi samman resultaten av simuleringarna och konsekvenser av fängelsestraff enligt "Effects of prison". Från modellen kan vi komma fram till slutsatsen att även om fängelsestraff kan användas mer frekvent handlar det i slutänden om i vilken hastighet som nya kontakter skapas mellan de kriminella individerna i fängelset. Denna hastighet måste vara mycket låg för att det ska vara lönnsamt att i större utsträckning använda fängelse som påföljd vid brott. Det förefaller således som att denna hastighet inte kan anses som rimlig och följaktligen leder inte ett mer frekvent användande av fängelsestraff till att det kriminella nätverket i modellen upphör att existera.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.
E-post: frida.lageras@gmail.com. Handledare: Pieter Trapman.

Fängelsestraffets påverkan på ett kriminellt nätverk

Frida Isgren Lagerås

29 augusti 2021

Innehåll

1 Sammanfattning **3**

2 Inledning **3**
2.1 Bakgrund 3
2.2 Syfte och frågeställningar 5
2.3 Utgångpunkt 5

3 Grundläggande teori **5**
3.1 Grafteori och grundläggande begrepp 5
3.2 Statisk slumpgraf 6
3.3 Dynamiska slumpgraf 7
3.4 Bakgrund av Markovprocesser 7

4 Modell **8**
4.1 Övergripande beskrivning av modell 8
4.2 Detaljerad beskrivning av modell 9
4.2.1 Beskrivning steg 1, ett kriminellt nätverket 9
4.2.2 Beskrivning steg 2, ett fängelse 9
4.2.3 Beskrivning steg 3, rehabiliterad 11

5 Teoretiska resultat för alternativ modell **12**

6 Resultat **16**
6.1 Simuleringar, andelar av antal i process 16
6.2 Simulering, genomsnittlig grad 20

7 Diskussion **22**
7.1 Diskussion av resultat 22
7.2 Diskussion av modell 25

8 Slutsats, återkoppling frågeställning **26**

9 Appendix **28**

10 Referenser **30**

1 Sammanfattning

I förevarande uppsats redogörs inledningsvis för definitionen av ett kriminellt nätvärk och vilka åtgärder som regeringen har, och vill vidta, för att effektivt bekämpa dem. Straffskärpningar är enligt många politiker ett effektivt verktyg att motverka de kriminella nätverken, men trots det finns det en risk att fängelsestraff inte har en positiv effekt. I denna uppsats undersöks därför hur storleken av ett kriminellt närverk påverkas av att dess medlemmar blir dömda till fängelsestraff i större utsträckning. Vi bygger en modell gjord av en dynamisk slumpgraf som kommer att beskriva ett kriminellt nätverket. De kriminella personerna kommer att kunna befinna sig ute i samhället respektive i fängelset där de kan bilda nya kriminella kontakter med någon hastighet. När en kriminell person har avtjänat sitt fängelsestraff kommer denna med en övergångssannolikheten att stanna kvar i det kriminella nätverket som kommer att bero av totala antalet kontakter personen i fråga har vid en given tid. Alternativt lämna det kriminella livet bakom sig och rehabiliteras. Vi utför ett flertal simuleringar där vi ändrar värden på olika hastigheter i modellen för att därigenom kunna diskutera hur dynamiken i slumpgrafen och andelen rehabiliterade förändras över tid. För att besvara frågeställningarna knyter vi samman resultaten av simuleringarna och konsekvenser av fängelsestraff enligt Gendreau m. fl. (1999). Från modellen kan vi komma fram till slutsatsen att även om fängelsestraff kan användas mer frekvent handlar det i slutänden om i vilken hastighet som nya kontakter skapas mellan de kriminella individerna i fängelset. Denna hastighet måste vara mycket låg för att det ska vara lönnsamt att i större utsträckning använda fängelse som påföljd vid brott. Det förefaller således som att denna hastighet inte kan anses som rimlig och följaktligen leder inte ett mer frekvent användande av fängelsestraff till att det kriminella nätverket i modellen upphör att existera.

2 Inledning

2.1 Bakgrund

I samhället pågår en debatt om vilka åtgärder som ska vidtas för att bekämpa de kriminella nätverken effektivt. BRÅ (2016, s. 9–10) definierar den organiserade brottsligheten i kategorierna: externdefinierade grupper, självdefinerade grupper, projektbaserade konstellationer och icke-namn- givna grupper. I dessa kategorier finns det sedan undergrupper, som till exempel släktbaserade nätverk och mcgäng (BRÅ 2016, s. 9–10). De kriminella nätverken skapas ofta genom att dess medlemmar växer upp i samma område, har ett gemensamt påbrå eller vänskapsband. Polismyndigheten menar att de löst sammansatta nätverken ofta är relaterade till de bostadsområden som polisen bedömer som så kallade utsatta områden (Regeringskansliet 2020, s. 2).

Att tillhöra ett kriminellt nätverk kan ge olika former av förmåner såsom en maktposition och status i tillhörande gäng. Att ha en sådan ledande position i ett kriminellt nätverk resulterar i att man kan utöva inflytelse i skymundan och på så sätt undvika avslöjande (Regeringskansliet 2020, s. 2–3).
Under de senaste åren har det genomförts en rad olika lagändringar med syfte att motverka kriminella närverk. Regeringen har exempelvis skärpt straffen för vapenbrott samt hanteringen av stora mängder narkotika och tanken är också att livstidsstraff för mord ska kunna användas mer frekvent. Därtill har stämpling till och förberedelse av vissa allvarliga brott kriminaliserats i större utsträckning och det har därutöver införts en tillståndplikt för bland annat hanteringen av explosiva varor. I de politiska partierna pågår emellertid diskussioner om att ytterligare åtgärder kan behöva vidtas för att stoppa de kriminella nätverken. De krav som ofta lyfts fram är att fler och högre straff ska införas, och att straffreduktionen för unga personer som begår brott bör avskaffas. Anledningen till detta är att våld i form av skjutningar och sprängningar har ökat under de senaste åren där framförallt skjutningar har använts mer frekvent som ett sätt att hantera konflikter mellan de kriminella nätverken (Regeringskansliet 2020, s. 3). Mot bakgrund av att uppgörelserna mellan nätverkan sker i en allt större våldsspiral har också risken för att oskyldiga ska drabbas ökat (Regeringskansliet 2020, s. 5).

Gendreau m. fl. (1999) redogör för tre skilda sätt att se på konsekvenserna av fängelsestraff:

Synsätt 1 - Att sitta i fängelse har förebyggande effekter på brottslighet. Synsättet bygger på den klassiska skolan där en anser att en individ resonerar rationellt. Individen håller sig borta från brottslighet när straffskalor höjs, men också med hjälp av erfarenheter från tiden individen har spenderat på anstalt. Därav ska fängelsestraff anses ha en avskräckande effekt (Gendreau m. fl. 1999, s. 4–6).

Synsätt 2 - Att sitta i fängelse har inga förebyggande effekter på brottslighet. Enligt detta synsätt finns det en kritisk inställning till att den intagna blir rehabiliterad. Det bygger på tanken att individer med låga straff beblandas med tungt kriminella personer och lärs då upp i kriminalitet, vilket i sin tur kan resultera i att fängelsestraff ger upphov till mer kriminalitet (Gendreau m. fl. 1999, s. 6–7).

Synsätt 3 - Att sitta i fängelse har ingen betydande effekt på kriminaliteten. Synsättet vilar på antagandet att den intagnes beteende inte förändras särskilt mycket under sin vistelse på anstalt (Gendreau m. fl. 1999, s. 8–9).

2.2 Syfte och frågeställningar

Syftet med denna uppsats är att skapa en matematisk modell uppbyggd av en dynamisk slumpgraf för att studera hur fängelsestraff påverkar ett kriminellt nätverk. Modellen som kommer att byggas upp beskriver givetvis en förenklad bild av verkligheten men kan ändå ge läsaren kvalitativ insikt. Utifrån denna modell ska följande frågeställningar besvaras:

- På vilka sätt påverkas ett kriminellt nätverk av att dess medlemmar blir dömda till fängelse mer frekvent?
- Hur påverkar skapandet av nya kriminella kontakter i fängelset rehabilitering av de intagna?

2.3 Utgångpunkt

I samband med efterforskning har det funnits en problematik att få tillgång av data och statistik över kriminella nätverk i Sverige. En stor mängd av datan är sekretessbelagd och därför utgår modellen i denna uppsats istället från metodiska antaganden, matematiska resonemang och en kreativitet. Det ska dock påminnas om att frågeställningarna är mycket komplexa och svåra att besvara även med tillgång av data.

I modellen som skapas antas de kriminella personer som befinner sig i fängelset skapa nya kriminella kontakter med en viss hastighet. Ett ökat antal kontakter kommer därmed att leda till minskad sannolikhet för rehabilitering när personen i fråga har avtjänat sitt fängelsestraff. Denna sannolikhet beräknas oberoende för varje individ och relaterar till hur många kontakter det är möjligt att skapa i modellen.

3 Grundläggande teori

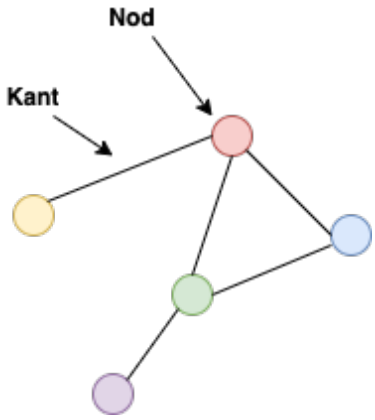
3.1 Grafteori och grundläggande begrepp

Grafteori har ett utbrett användningsområde med syftet att undersöka olika grafegenskaper. En graf G är en godtycklig mängd noder betecknad med V och en delmängd kanter betecknad med E bestående av ordnande eller oordnade par av element ur V. Vi skriver detta som

$$G = (V, E),$$
$$V = (v_1, ..., v_n),$$
$$E = (e_1, ...e_k) \subseteq \{(v_i, v_j), v_i, v_j \in V\}.$$

Två noder v_i, v_j i en graf G kallas för grannar i de fall det förekommer en kant $(v_i, v_j) \in E$ mellan dem. Antalet kanter som sammanbinder en given

nod kallas för nodens grad, betecknad med $\delta(v_i)$. En graf kan anta olika strukturer och vi kommer i uppsatsen att närmare undersöka enkla grafer. En enkel graf innebär att det förekommer max en kant mellan ett par av noder (Bergvall 2021).



Figur 1: Ett exempel på en enkel graf

3.2 Statisk slumpgraf

Erdős och Rényi konstruerade det matematiska objektet *slumpgraf*. Slumpgrafer har ett utbrett appliceringsområde såsom olika former av nätverk, exempelvis kommunikationsnätverk, hur sjukdomar sprids eller hur atomer binder varandra inom kemin (Cannings m. fl. 2003, s. 51). En slumpgraf är en obestämd graf som utmärker sig genom att hörnen är bestämda och där kanter tillkommer med någon form av slump. En av de grundläggande modellerna av slumpgrafer kallas för en $G(n, p)$-graf. I denna uppsats kommer en G(n,p)-graf att användas vilket består av n noder och där varje kant tillkommer i grafen med sannolikhet p oberoende av andra kanter.

Om vi föreställer oss en tom $G(n, p)$-graf har vi $\binom{n}{2}$ sätt att välja kanter. Det är således möjligt att utföra $\binom{n}{2}$ Bernoulliexperiment som innebär att vi slumpar ut kanter oberoende med sannolikhet p och därav är antalet kanter i G binomialfördelad. Sannolikheten att erhålla en specifik graf med n noder och m kanter blir därmed

$$P(G) = p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}.$$

Ju högre sannolikhet p vi väljer, desto fler kanter kommer G vara villig att generera (Frieze m. fl. 2016, s. 3).

3.3 Dynamiska slumpgraf

En dynamisk slumpgraf innehåller en uppsättning ögonblicksbilder på en slumpgrafs struktur under tid. Uppsättningen av ögonblicksbilderna kommer på samma sätt att utgöra en uppsättning av flera olika slumpgrafer (Zhang m. fl. 2016, s. 1). I teorin brukar dessa dynamiska slumpgrafer bestå av ett fixt antal noder där kanter försvinner och/eller tillkommer under tid med slump (Li m. fl. 2020, s. 1). I verkligheten är emellertid de flesta nätverken i förändring, där de dynamiska slumpgraferna appliceras. I denna uppsats kommer därför en dynamiska slumpgraf att studeras som komma att bygga upp det kriminella nätverket där både noder och kanter kan försvinna, eventuellt tillkomma under tid.

3.4 Bakgrund av Markovprocesser

En för uppsatsen viktigt stokastisk process kallas Markovprocessen. En stokastisk process beskriver förändringen av någon process över tid och således är alltså en kontinuerlig stokastisk process en samling av slumpvariabler som beror av tid $\{X(t), t \in T\}$. Vi definierar $X(t)$ som tillståndet för processen vid tid t där $T \subseteq \mathbb{R}_+$. Vidare beskrivs tillståndsrummet som alla möjliga tillstånd $X(t)$ processen kan anta under det givna tidsintervallet T (Ross 2014, s. 77–78). Genom att lägga till följande Markovegenskap erhålls en kontinuerlig Markovkedja:

För alla $s, t \geq 0$ och icke negativa heltal $i, j, x(u)$ är

$$P\{X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u)\} =$$

$$= P\{X(t+s) = j | X(s) = i\}$$

För alla $u \in [0, s)$.

Det betyder att sannolikheten att hamna i ett visst tillstånd i framtiden, givet nutiden och dåtiden, endast beror av nutiden.
Med denna Markovegenskap erhålls ytterligare en egenskap hos tiden i processen. För att förstå följande egenskap börjar vi med att föreställa oss att processen befinner sig i ett visst tillstånd i, exempelvis vid tid $t = 0$, och stannar i det tillståndet till tid s. Sannolikheten att processen inte lämnar tillstånd i efter $s+t$ tid är då den icke-betingade sannolikheten att processen stannar i tillstånd i i minst t tid

$$P\{T_i > s + t | T_i > s\} = P\{T_i > t\}.$$

Detta kommer att gälla för alla $s, t \geq 0$ och vi säger då att slumpvariabeln T_i är minneslös och måste därför vara exponentialfördelad (Ross 2014, s. 358).

4 Modell

4.1 Övergripande beskrivning av modell

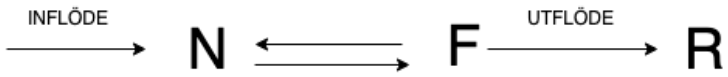
Genom att bygga en matematisk modell kan vi studera huruvida fängelsestraff påverkar strukturen av ett kriminellt nätverk. Modellen som kommer att byggas upp bildar ett system som innehåller en dynamisk slumpgraf där noderna beskriver de kriminella medlemmarna och kanterna kriminella länkarna mellan varandra. En person i modellen kan förflytta sig mellan tre platser, "kriminell medlem ute i samhället", "kriminell medlem i fängelset" och "rehabiliterad ute i samhället" med olika hastigheter. I fängelset kan nya kriminella länkar skapas med någon hastighet. När en kriminell medlem avtjänat sitt fängelsestraff kan denna antingen rehabiliteras, och hamnar då i ett absorberande tillstånd och lämnar således sitt kriminella liv bakom sig, alternativt stannar kvar i nätverket ute i samhället. Därav kommer antalet kriminella medlemmar som befinner sig ute i samhället respektive antalet kriminella medlemmar i fängelset att beskrivas med varsin slumpvariabel som beror av tid. Utfallet av summan av dessa två slumpvariabler utgör totala antalet noder i slumpgrafen vid given tid. Kriminella länkar en person har bevaras i modellen tills denna har rehabiliterats. Vidare har systemet ett inflöde av nya kriminella personer till nätverket i samhället under tid. Låt nu de tre platserna personerna i modellen kan befinna sig på kallas

N = Medlem i det kriminella nätverket i samhället,

F = Medlem i det kriminella nätverket i fängelset,

R = Rehabiliterad, icke medlem.

Under tid förflyttar sig de kriminella personerna mellan de tre olika platserna i systemet enligt Figur 2.



Figur 2: övergripande bild över systemet

En given individs tillstånd kan inte i denna modell beskrivas generellt med en Markovprocess, även om antalet kriminella kontakter hade inkluderats i varje tillstånd. Detta på grund av att det finns ett beroende mellan samtliga individer i modellen. I kapitel 5 kommer en variant av modellen att presenteras där hela nätverket i sig kommer att kunna approximeras till en kontinuerlig Markovprocess med hjälp av en given individs rörelse genom systemet.

4.2 Detaljerad beskrivning av modell

4.2.1 Beskrivning steg 1, ett kriminellt nätverket

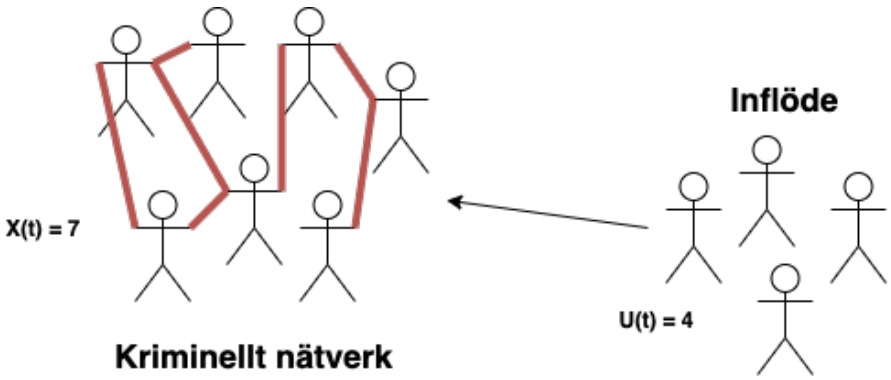
Vid tid 0 befinner sig samtliga n personer i systemet i N. Det kriminella nätverket slumpas fram vid tid 0 med hjälp av en $G(n, p)$-graf. Efter tidpunkten 0 kommer n personer att förändras till följd av att exempelvis nya kriminella personer ansluter till nätverket, vilket skapar ett inflöde.
Låt nu

$X(t)$ = antal personer i N vid tid t och

$U(t)$ = antal nya personen som ännu inte anslutit N vid tid t.

- Inflödet till det kriminella nätverket sker med en hastighet $\alpha U(t)$

Vid anslutningen saknar dessa kriminella medlemmar kontakter.



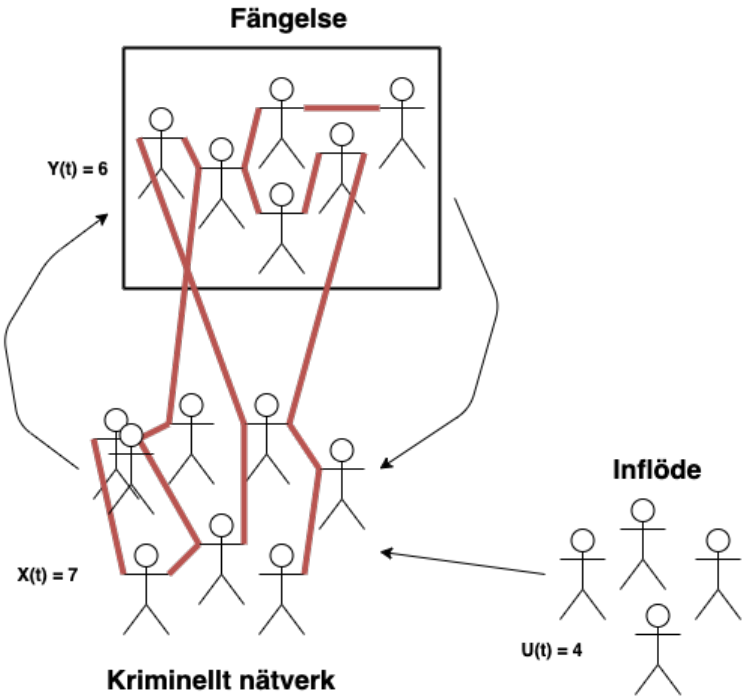
Figur 3: Ett exempel på en ögonblicksbild över hur inflödet fungerar.

4.2.2 Beskrivning steg 2, ett fängelse

Låt nu $Y(t)$ = antal personer i F vid tid t.

- Förflyttning från $N \longrightarrow F$ av de kriminella medlemmarna ur N sker med en hastighet $\mu X(t)$
- Utflödet av de kriminella personerna från F sker med en hastighet $\lambda Y(t)$

Nu byggs Figur 3 på för att förtydliga ovanstående förflyttningar.



Figur 4: Ett exempel på en ögonblicksbild över hur förflyttningar mellan $\rightarrow N \leftrightarrows F$ fungerar.

I Fängelset kan nya kriminella kontakter skapas. Hastigheten för att *någon* kriminell person ska bilda en ny kontakt i fängelset är $\gamma(Y(t)-1)$. Därefter slumpas *en* given person fram i fängelset som kommer att ha en sannolikhet att skapa en nya kontakt. Denna sannolikhet beror av hur många i fängelset denna person ännu inte har kontakt med vid tid t.

Som framgår av Figur 4 bevaras kontakter mellan de kriminella personerna när de förflyttar sig mellan $N \leftrightarrows F$. Som tidigare nämnts utgör utfallet av $X(t)+Y(t)$ totala antalet noder i slumpgrafen vid tid t. Vi inför nu följande slumpvariabler för att beskriva graden hos person j vid tid t.

$D_{N_j}(t)$ = graden person j har i det kriminella nätverket ute i samhället vid tid t,

$D_{F_j}(t)$ = graden person j har i det kriminella nätverket i fängelset vid tid t

där $j = 0, 1, ...X(t) + Y(t)$.

Låt nu k vara ett utfall av $D_{N_j}(t) + D_{F_j}(t)$ som beskriver totala antalet kontakter person j har i systemet vid tid t.

När person j lämnar F vid tid t, fortsätter denna person att vara kriminell och stannar kvar i nätverket ute i samhället med en sannolikhet p_k. p_k är en sannolikhet som beror av totala antalet kontakter k person j har i systemet vid tid t. För att skapa någorlunda realism i modellen kommer vi anta att ju högre utfall k person j har, desto större sannolikhet är det att person j stannar kvar i det kriminella nätverket och återvänder i kriminalitet ute i samhället. Måttet p_k för given person beräknas oberoende av andra individer i systemet. Val av följande konstanter bestäms i kommande simuleringarna.

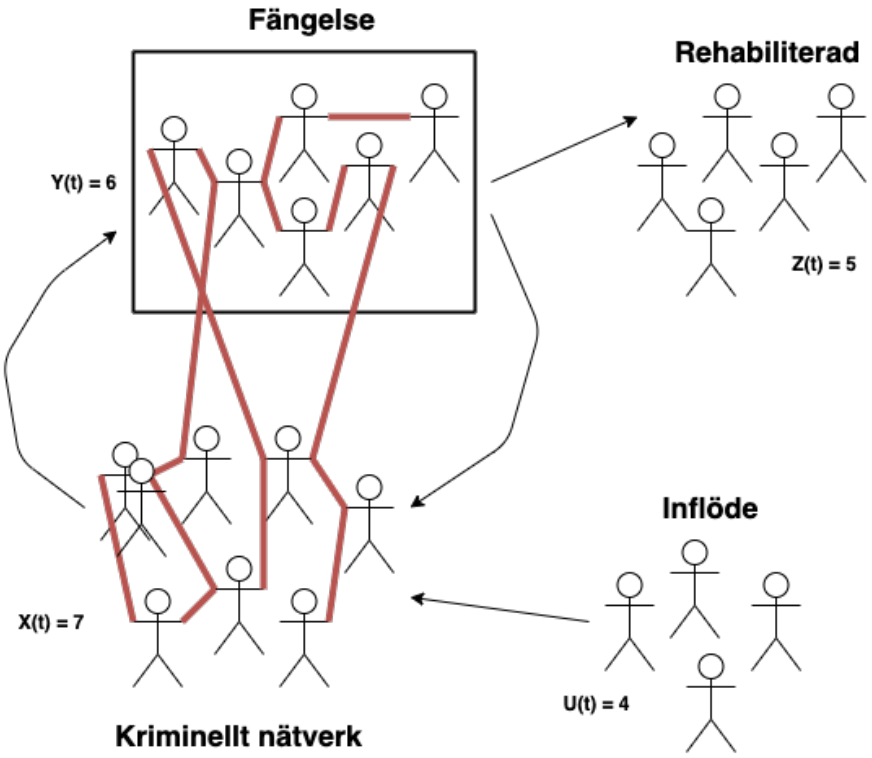
$$p_k = \begin{cases} C_1 & k = 0 \\ C_1 + C_2 k & k < \frac{C_3}{C_2} \\ C_1 + C_3 & k > \frac{C_3}{C_2} \end{cases}$$

där $C_1, C_2 \in [0, 1]$ och $C_3 \in [0, 1 - C_1]$.

4.2.3 Beskrivning steg 3, rehabiliterad

Låt nu $Z(t) =$ antal personer i R vid tid t.

En personen går från $F \longrightarrow R$ med sannolikhet $1 - p_k$ som ett resultat av att denne rehabiliteras och lämnar således sitt kriminella liv bakom sig för gott. Vi bygger på Figur 4 genom att lägga till platsen R för att få en slutgiltig bild av systemet.



Figur 5: Ett exempel på en ögonblicksbild över hela systemet.

Som framgår av figur 5 nollställs kontakter för given person när denna rehabiliteras, vilket ger upphov till att andra kriminella personer som fortfarande befinner sig i N eller F tappar denna kontakt, om föreligger vid given tid.

Eftersom att avsikten med denna modell är att studera hur fängelsestraff påverkar ett kriminellt nätverk så är vägen till att hamna i R endast genom F. När en person har rehabiliterats kan denna person inte återvända till kriminalitet igen, detta förefaller inte vara helt realistiskt men initeras för enkelhetens skull i modellen.

5 Teoretiska resultat för alternativ modell

I originalmodellen innehåller hastigheten att rehabiliteras för en kriminell person en sannolikhet p_k som beror av hur många kontakter k personen i fråga har vid given tid. En sådan modell är svår att analysera teoretiskt, därav kommer den alternativa modellen att förenklas och innehålla en del ändringar för att teori ska kunna härledas. Antag nu följande för *en* kriminell individ med k kontakter vid tid t:

$$\pi_{F_k} = \pi_F \pi_k$$

där

$$\pi_k = \text{stationära fördelningen att ha k kontakter,}$$

$$\pi_F = \text{stationära fördelningen att vara i fängelset “allmänt”}$$

och

$$\pi_{F_k} = \text{stationära fördelningen att vara i fängelset med k kontakter.}$$

I originalmodellen är R ett absorberande tillstånd för en kriminell person. Nu kan en person ansluta nätverket igen men går då miste om alla dess tidigare kontakter, $R \longrightarrow k = 0$. I tabell 1 kan följande tillstånd och övergångar avläsas för *en* kriminell person.

Tabell 1

Övergång	Övergångshastighet	Index k
$k \longrightarrow k+1$	$\beta = \gamma\pi_F$	$k \geq 0$
$k \longrightarrow R$	$\alpha = \lambda(1-p)\pi_F$	$k \geq 0$
$k \longrightarrow k-1$	$k\alpha$	$k \geq 1$
$R \longrightarrow k = 0$	v	

α i tabell 1 beskriver sannolikheten att vara i fängelset “allmänt” multiplicerat med frekvensen att gå från $\pi_F \longrightarrow R$.

I kommande teori studeras hur *en* specifik individ rör sig genom de definierade tillstånden i tabell 1. Skillnaden nu från originalmodellen är att resterande individer som inte är denna specifika individen har en given hastighet för rehabilitering som innehåller p. Med hjälp av att studera denna specifika individ görs ett försök till en god approximation av p som beror av den specifika individens “p_k:s” men även dess “π_k:s”.

Med dessa antaganden ur tabell 1 kan en kriminell persons kontakter beskrivas med hjälp av en $M/M/k$ kö när vi låter $k \longrightarrow \infty$ (Ross 2014, s. 544). För att kunna ställa upp denna process balansekvationer som kommer att bero av π_k använder vi oss utav ekvationen $\boldsymbol{\pi} Q = 0$ (Ross 2014, s. 374). $\boldsymbol{\pi}$ kan beskrivas med vektorn $(\pi_R, \pi_0, \pi_1, \pi_2 ...)$ och Q som en matris med tillhörande övergångsintensiteter att gå mellan olika antal kontakter eller att hamna i R.

Vänsterled är långtidshastigheten ut ur givet tillstånd och högerled är långtidshastigheten in i givet tillstånd.

Balansekvation för tillstånd R

$$v\pi_R = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \tag{1}$$

Balansekvation för tillstånd $k = 0$ kontakter

$$(\beta + \alpha)\pi_0 = v\pi_R + \alpha\pi_1 \tag{2}$$

Balansekvation för tillstånd $k \geq 1$ kontakter

$$(\beta + (k+1)\alpha)\pi_k = \beta\pi_{k-1} + (k+1)\alpha\pi_{k+1} \Longrightarrow$$

$$\pi_k - \pi_{k+1} = \frac{\beta}{(k+1)\alpha}[\pi_{k-1} - \pi_k] \tag{3}$$

Efter iterering implicerar (9) för $k \geq 1$ att

$$\pi_k - \pi_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k [\pi_0 - \pi_1]. \tag{4}$$

Vad som kan avläsas ur (4) är att denna likhet håller trivialt för $k = 0$ då $\pi_0 - \pi_1 = \pi_0 - \pi_1$. För att få ett uttryck för π_j summerar vi vänster och högerled från $j \geq 0$ till ∞ vilket ger

$$\sum_{k=j}^{\infty} \pi_k - \pi_{k+1} = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k [\pi_0 - \pi_1] \Longrightarrow$$

$$\pi_j = [\pi_0 - \pi_1] \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k. \tag{5}$$

Antag nu att

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = [\pi_0 - \pi_1] \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k.$$

Efter att ha ändrat om i summan erhålls

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = [\pi_0 - \pi_1] \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k$$

och eftersom den inre summan inte innehåller j erhålls vidare

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = [\pi_0 - \pi_1] \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k = [\pi_0 - \pi_1] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k.$$

Vad som nu kan avläsas är att summan för π_j går att räkna ut med hjälp av Taylorutveckling (Persson m. fl. 2012, s. 448).

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = [\pi_0 - \pi_1] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k = [\pi_0 - \pi_1] e^{\beta/\alpha}. \tag{6}$$

Med hjälp av (1) och att de stationära fördelningarna ska summeras upp till 1 enligt Ross (2014, s. 374) kan nu ett nytt uttryck för π_R och $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j$ härledas.

$$\left.\begin{aligned} \pi_R + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1 \\ v\pi_R = \alpha \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \frac{v}{\alpha + v} \Longrightarrow \tag{7}$$

$$\pi_R = \frac{\alpha}{\alpha + v} \tag{8}$$

Nu har två uttryck för $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j$ ställts upp från (6) och (7) som då måste vara lika med varandra.

$$\frac{v}{\alpha + v} = [\pi_0 - \pi_1] e^{\beta/\alpha} \Longrightarrow$$

$$[\pi_0 - \pi_1] = e^{-\beta/\alpha} \frac{v}{\alpha + v} \tag{9}$$

insättning av (9) i (5) ger för $j \geq 0$ att

$$\pi_j = e^{-\beta/\alpha} \frac{v}{\alpha + v} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k. \tag{10}$$

Ett naturligt val för p vore nu att sätta

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k p_k}{1 - \pi_R}.$$

p räknas ut med hjälp av Bayes sats vilket möjliggör ett sätt att beräkna betingade sannolikheter (Ross 2014, s. 12). Observera att π_k beror själv av p vilket ger att detta p är en lösning till denna likhet.

6 Resultat

6.1 Simuleringar, andelar av antal i process

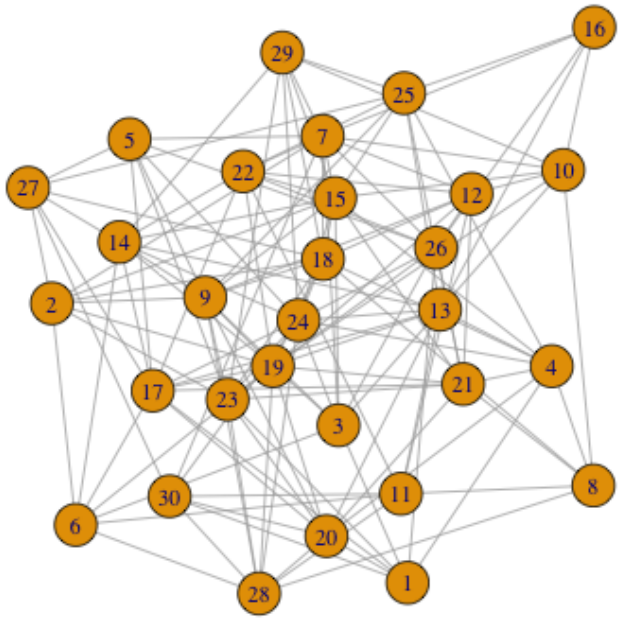
Genom att utföra simuleringar av den ursprungliga modellen kommer resultat att kunna erhållas som ska studeras. Dessa simuleringar kommer att utgå från ovan anförda modellbeskrivning i avsnitt 4. Vi startar med $n = 30$ personer i N vid tid 0 och låter inflödet vara 70 nya personer i samtliga simuleringar. Val av konstanter i måttet av p_k blev följande

$$C_1 = 0.05, \quad C_2 = 0.02 \quad \text{och} \quad C_3 = 0.9.$$

Vilket ger följande sannolikhet att ansluta N igen efter avtjänat fängelsestraff

$$p_k = \begin{cases} 0.05 & k = 0 \\ 0.05 + 0.02k & k < \frac{0.9}{0.02} = 45 \\ 0.05 + 0.9 = 0.95 & k > \frac{0.9}{0.02} = 45 \end{cases}$$

Vid över 45 kontakter är sannolikheten konstant på 0.95. När en person vid tid t har nått mer än 45 kontakter valdes att anta att sannolikheten är lika hög att återfalla i kriminalitet då det utgör en relativt stor andel av samtliga personer i processen.



Figur 6: ögonblicksbild vid tid 0 över N

I Figur 6 kan en avläsa hur N är uppbyggt vid tid 0 för kommande simuleringar. Bilden föreställer en statisk $G(30, 0.3)$-graf där kriminella kontakter slumpades ut med sannolikhet 0.3 vid tid 0.

Hastigheterna i modellen tillhör oberoende exponentialfördelningar som avgör tiderna till att händelser sker i systemet. Hastigheterna är parametrar till tävlande exponentialfördelningar där minimum av dessa exponentialfördelningar är tiden till att första händelsen sker.
Enligt Ross (2014, s. 288) kan vi finna att minimum av en sekvens av oberoende exponentialfördealde variabler också är exponentialfördelad med hastighet som summan av dess hastigheter. Det här ger att hastigheten till att *något* händer i systemet är exponentialfördelad med parameter

$$\mu X(t) + \lambda Y(t) + \gamma(Y(t) - 1) + \alpha U(t). \tag{11}$$

Vi är intresserade av att studera hur denna process utvecklas över tid när

vi ändrar värdet på μ, parametern i hastigheten för kriminella personer att hamna i fängelset och γ, parametern i hastigheten för kriminella personer att skapa nya kontakter i fängelset. Att sätta ett högre värde på parametern μ bör leda till att personerna i modellen åker in mer frekvent i fängelset. Det förefaller rimligt att anta att detta är en konsekvens av straffkskärpningar. Ett lägre värdet på γ kan tolkas som att färre lärs upp i kriminalitet på anstalt enligt synsätt 2 från bakgrund. Vi låter $\alpha = 1$, parametern i hastigheten för inflödet av nya kriminella medlemmar, och $\lambda = 2$, hastigheten att avtjäna ett fängelsestraff i kommande simuleringar.

I kommande simuleringar har vi låtit systemet iterera fram till då inflödet av de 70 nya personerna har tagit slut. Därav kommer under tid systemet tillslut att innehålla 100 personer eftersom att vi startar systemet vid tid 0 med 30 personer i N. De tre nedanstående figurena visar resultat av var andelarna av personerna befinner sig i systemet över tid. Detta val av visualisering gjordes eftersom att systemet inte innehåller ett fixt antal personer under tid och blev därav lättare att avläsa.

Andel av samtliga personer i systemet som befinner sig i N =

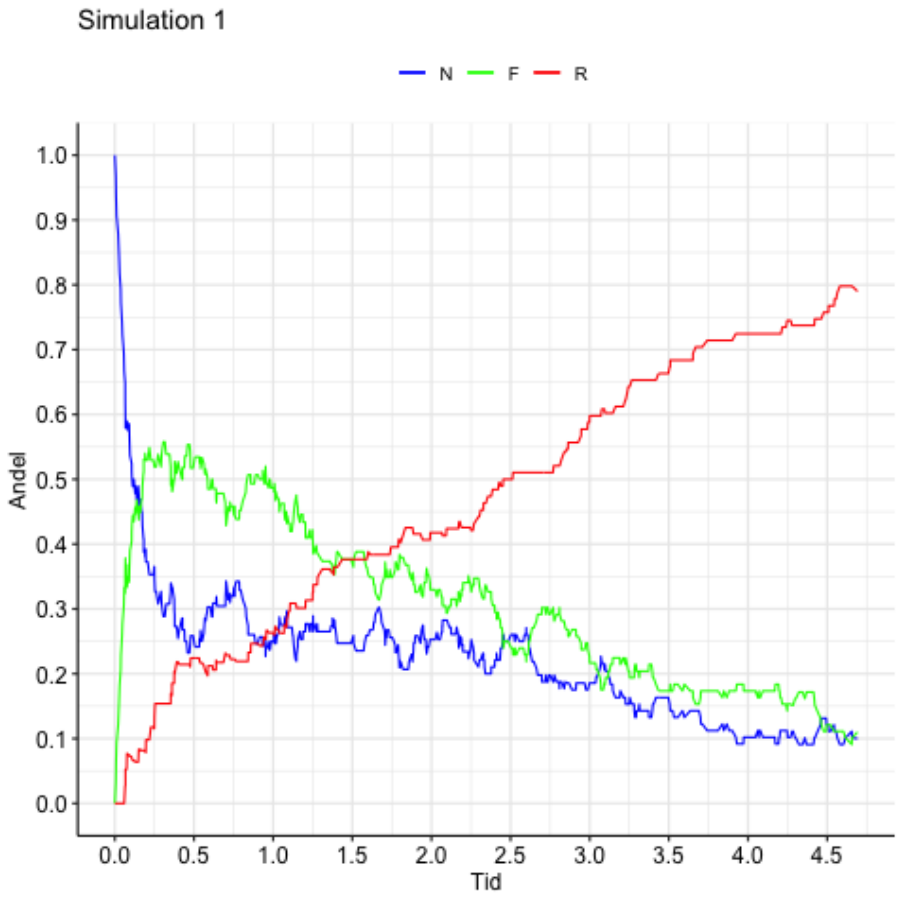
$$\frac{X(t)}{X(t) + Y(t) + Z(t)} \quad \text{vid tid t.}$$

Andel av samtliga personer i systemet som befinner sig i F=

$$\frac{Y(t)}{X(t) + Y(t) + Z(t)} \quad \text{vid tid t.}$$

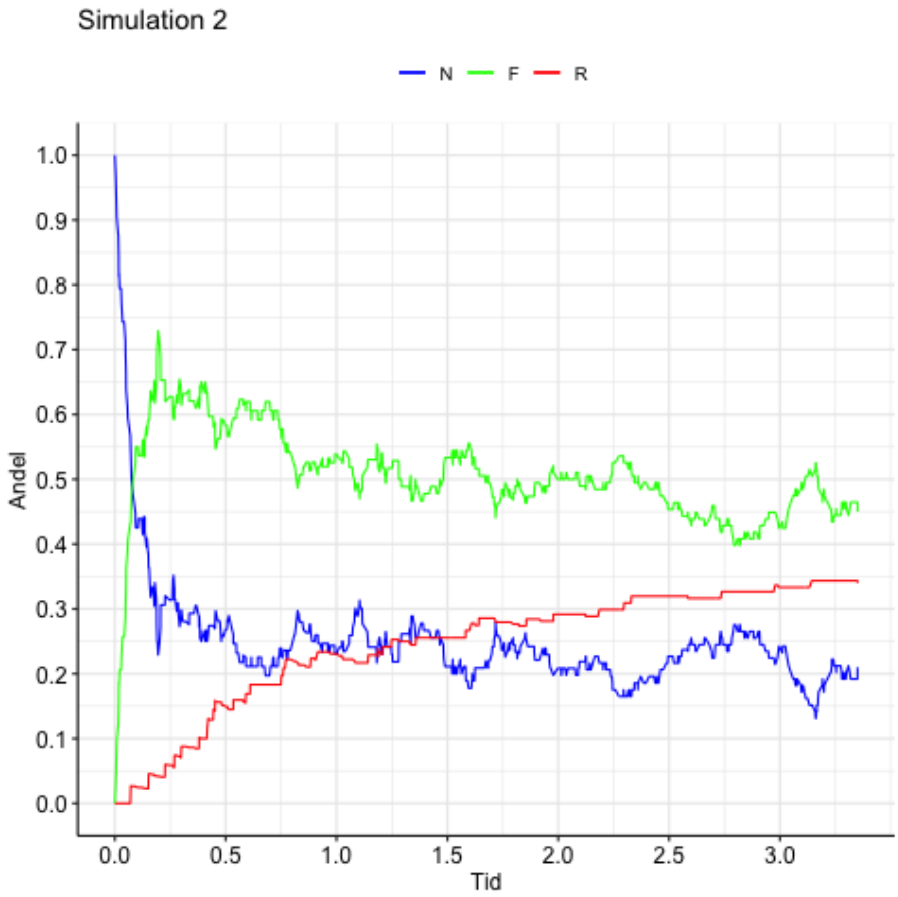
Andel av samtliga personer i systemet som befinner sig i R=

$$\frac{Z(t)}{X(t) + Y(t) + Z(t)} \quad \text{vid tid t.}$$



Figur 7: $\alpha = 1$, $\mu = 2$, $\gamma = 2$, $\lambda = 2$

I simulering 1 har vi låtit parametrarna μ och λ ha värdet 2, likaså γ. I början av processen minskar andelen i N kraftigt, detta är inte förvånansvärt då de flesta personerna befinner sig på den platsen i början av processen. Var personerna befinner sig i processen påverkar alla hastigheter som kan avläsas ur (11) alternativt i kapitel 4.2 över modellbeskrivning. Efter en kort tid, när det finns en lika stor andel av personer i N och F börjar både andelen i N och i F att ha en nedåtgående trend. Andelen rehabiliterade har ett linjärt ökande beteende under hela tidsspannet.



Figur 8: $\alpha = 1$, $\mu = 4$, $\gamma = 2$, $\lambda = 2$

I simulering 2 har ett högre värde på μ valts ut till 4. Efter en kort tid, återigen när det finns en lika stor andel i N som i F, har andelen i F en vag nedåtgående trend. I N håller sig andelen mellan ca 30% till 15%. I denna simulering ökar andelen rehabiliterade betydligt mindre jämfört med simulering 1 och planar delvis ut i slutet av processen. Vid en annan jämförelse med simulering 1 kan vi också observera att processen förekommer under en kortare tidsperiod, vilket är ett resultat av vi har ökat värdet av parametern μ.

6.2 Simulering, genomsnittlig grad

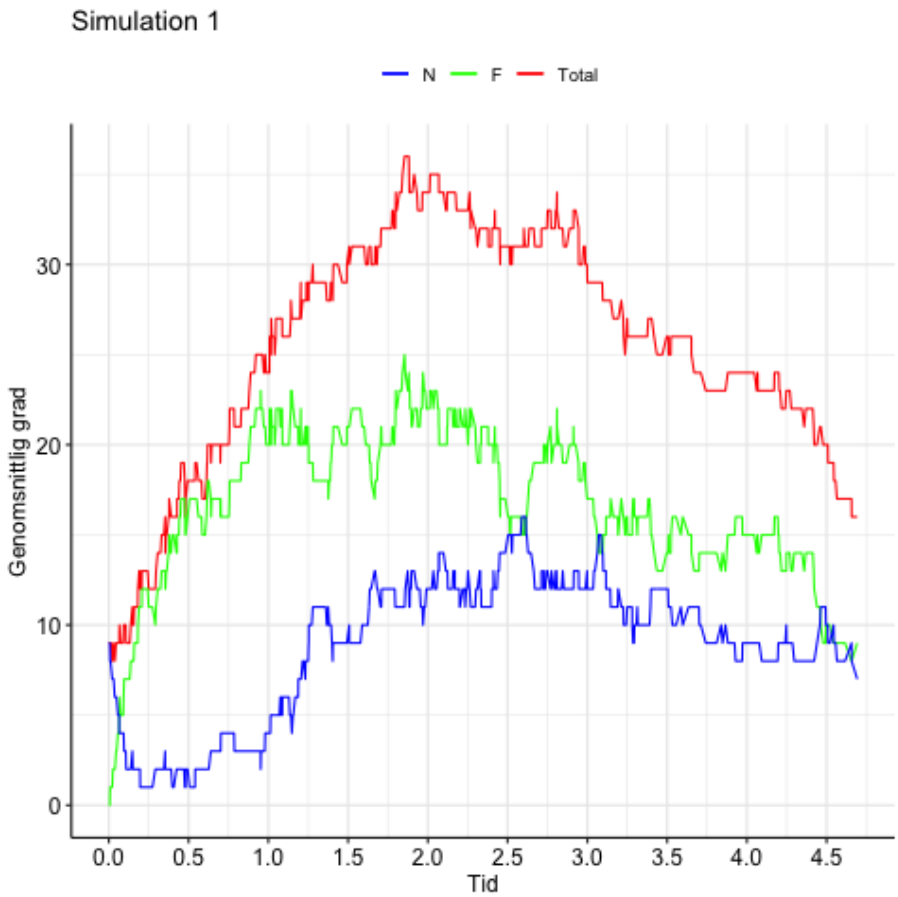
I Figur 9 och 10 framgår visar resultatet av den genomsnittliga graden för personerna som befinner sig i N och F samt total genomsnittlig grad under tid.

$$\text{Genomsnittlig grad i N} = \frac{\sum_{j=1}^{X(t)} D_{N_j(t)}}{X(t)+Y(t)} \quad \text{vid tid t.}$$

$$\text{Genomsnittlig grad i F} = \frac{\sum_{j=1}^{Y(t)} D_{F_j(t)}}{X(t)+Y(t)} \quad \text{vid tid t.}$$

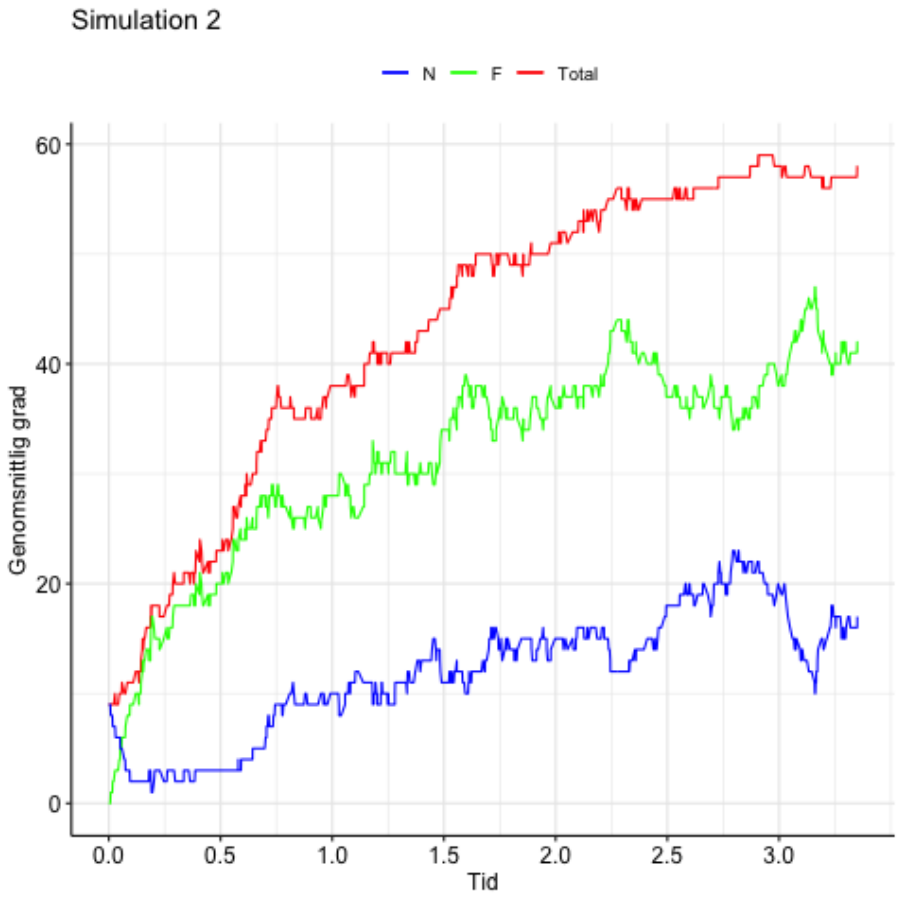
$$\text{Total genomsnittlig grad} = \frac{\sum_{j=1}^{X(t)} D_{N_j(t)} + \sum_{i=1}^{Y(t)} D_{F_j(t)}}{X(t)+Y(t)} \quad \text{vid tid t.}$$

.



Figur 9: $\alpha = 1$, $\mu = 2$, $\gamma = 2$, $\lambda = 2$

I simulering 1 kan en avläsa att den totala genomsnittliga graden går som max upp till ca 35 kontakter. I både N och F går den genomsnittliga graden uppåt för att sedan gå nedåt.



Figur 10: $\alpha = 1$, $\mu = 4$, $\gamma = 2$ $\lambda = 2$

I simulering 2 kan istället avläsas att det finns en uppåtgående trend för den genomsnittliga graden i både N och F under hela processen.

7 Diskussion

7.1 Diskussion av resultat

Syftet med resultatdelen är att, som tidigare nämnts, jämföra samtliga simuleringar med hänsyn till olika val av parametrarna μ och γ, samt hur dessa värden påverkar varandra. Som tidigare nämnts i avsnitt 6 tolkar vi att sätta ett högre värde på μ att detta är en konsekvens av straffskärpningar som ska undersökas i enighet med frågeställning 1. Ett högre värde på γ tolkar vi som att fler lärs upp i kriminalitet på anstalt enligt synsätt 2 från bakgrund som ska undersökas i enighet med frågeställning 2.

I simulering 1 och 2 jämförs valet av värdet på μ. I tabellen nedan förtydligas

att vi valde att sätta ett högre värde på μ i simulering 2.

Tabell 2			
Val av parametrar i simulering 1 och 2			
Samtliga händelser	Parametrar i hastigheter	Simulering 1	Simulering 2
”Anslut en ny person till nätverket”	α	1	1
”Avtjäna ett fängelsestraff”	λ	2	2
”Döm en person till fängelse”	μ	**2**	**4**
”Skapa någon kriminellkontakt”	γ	2	2

Resultatet av att sätta ett högre värde på μ i simulering 2, är att händelsen ”avtjäna ett fängelsestraff” inte inträffar lika frekvent som händelsen ”döm en person till fängelset” över tid. Som nämnts i resultatdelen beror detta på att en händelse med ett högre parametervärde i tillhörande hastighet, med stor sannolikhet kommer att inträffa mer frekvent över tid. Detta jämfört med en händelse som har ett lägre parametervärde, vilket är ett resultat av att samtliga händelser konkurrerar om att inträffa. Det framgår vid en jämförelse av figur 7 och 8, där konsekvensen av ett högre parametervärde på μ i simulering 2 gör att personerna stannar längre perioder alternativt flera och kortare perioder i fängelset, än i simulering 1. Mot bakgrund av det ovan anförda resulterar alltså ett högre parametervärde på μ i ökade utfall av slumpvariabeln $Y(t)$, det vill säga antalet personer i fängelset vid given tid.

Ovanstående resonemang kan fungera som en förklaring till att färre rehabiliteras i simulering 2 till följd av att personer som mer frekvent åker in i fängelse befinner sig på en plats där de kan kan bilda nya kriminella kontakter. Effekten blir då att p_k för given person ökar och således stannar personerna kvar i nätverket efter avtjänat fängelsestraff. I figur 10, som visar simulering 2, ökar den genomsnittliga totala graden under hela processen och kommer upp i cirka 60 kontakter. I figur 9, som visar simulering 1, hamnar kulmen i stället på cirka 35 kontakter. Denna jämförelse kan därför knytas samman med resultatet av andelen rehabiliterade i de två simuleringarna. Sammantaget ger samtliga resultat stöd för de konsekvenser av ett fängelsestraff som lyfts fram i Synsätt 2 från avsnitt 2.

I appendix finns figurer över fler utförda simuleringar. Syftet är att vidare undersöka utvecklingen av andelen rehabiliterade när vi låter frekvens av

händelsen ”döm en person till fängelse” vara högre än ”avtjäna ett fängelsestraff” samtidigt som vi låter parametern γ anta andra värden än 2.

Tabell 3				
Val av parametrar i simulering 3, 4 och 5				
Samtliga händelser	Parametrar i hastigheter	Simulering 3	Simulering 4	Simulering 5
”Anslut en ny person till nätverket”	α	1	1	1
”Avtjäna ett fängelsestraff”	λ	2	2	2
”Döm en person till fängelse”	μ	**4**	**4**	**4**
”Skapa någon kriminellkontakt”	γ	**0.5**	**4**	**1**

Av simulering 3 i appendix framgår att kurvan över andelen intagna är stadigt avtagande efter en kort tid. Andelen av nätverket som befinner sig i samhället kämpar för att hålla sig vid liv där andelen rehabiliterade har en kraftigare ökning än i både simulering 1 och 2, redan vid tid 2 är ca 80% rehabiliterade. Simulering 5 finns inte med i appendix men resultatet gav inte en större andel rehabiliterade än i simulering 1. Med hänvisning till det ovan anförda krävs det alltså att μ bör ökas om γ sänks så pass kraftigt som till 0.5 för att få en lönsam utgång över andelen rehabiliterade.

Av simulering 4 framgår att den totala genomsnittliga graden kom upp till ca 60 kontakter redan efter tid 1.5 där ca 20% var rehabiliterade. Med en jämförelse av simulering 2 går det att avläsa att den genomsnittliga totala graden går upp till 45 kontakter där ca 25% var rehabiliterade vid tid 1.5. Denna jämförelse av resultat visar att om den genomsnittliga graden stiger över 45 kontakter så påverkas inte andelen rehabiliterade märkbart mer negativt. Måttet som valdes ut för p_k ger även stöd för denna slutsats. Vi valde att sätta ett ”tak” på 45 kontakter, när utfallet $k > 45$ för person j valdes att sätta $p_k = 0.95$ och då spelar det inte någon roll om k exempelvis är 45 eller 60 vid tid t. Ytterligare slutsatser som kan dras är att resultatet över en simulering med ett högre parametervärde än 2 på γ när $\mu = 4$ inte kommer gå i linje med denna ökning av värdet på γ. Man bör dock ha i åtanke att det kan vara svårt att få en heltäckande bild över denna situation eftersom att processerna skiljer sig markant i tid.

Sammantaget visar samtliga simuleringarna att vi visserligen kan döma kriminella till fängelse mer frekvent och hålla dessa där under en längre period, men i slutänden handlar det till stor del om värdet på γ, det vill säga parametern i hastigheten för bildandet av nya kontakter i fängelset. Värdet

på γ är beroende av hur väl rehabiliteringen fungerar i ett fängelse. Frågan är således vilket värde på γ som anses realistiskt. Att inga nya kriminella kontakter skulle skapas i fängelset förefaller vara osannolikt. Däremot visar modellen att om vi ökar μ måste γ sänkas rätt kraftigt till 0.5 för att synsätt 1 ska hålla och fängelset i sig bör då har mycket bra förutsättningar för rehabilitering. I dagsläget kan vi inte påstå att vi ser denna utveckling då risken för återfall i brottslighet ökar i linje med antalet avtjänade fängelsestraff enligt statistik från Kriminalvården (2019, s. 67).

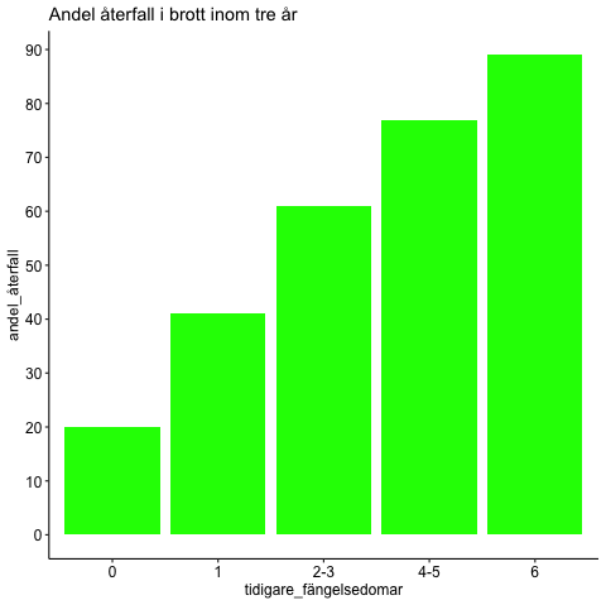
7.2 Diskussion av modell

Modellen i förevarande uppsats är konstruerad på ett sätt för att få en förhållandevis realistiskt process över ett kriminellt nätverk och nätverkets medlemmars vägar in respektive ut ur ett fängelse. Det bör dock påminnas om att modellen inte kan ge en heltäckande avspegling av verkligheten eftersom det är svårt att beakta alla aspekter som påverkar på vilka sätt en person ansluter sig till ett kriminellt nätverk samt hur denna person hamnar i fängelset. Detsamma gäller för vad som blir resultatet av att en person har avtjänat sitt straff och kommer ut i samhället. Modellens konstruktion grundar sig därför på en rad olika antaganden. Genom dessa antaganden kan emellertid modellen ge en viss bild av i vilket utdömande av fängelsestraff påverkar sammansättningen av ett kriminellt nätverk.

Som ovan nämnts finns det vissa brister med modellen och det finns således skäl att utöka modellen med nya antagande och andra perspektiv. Något som har varit problematiskt i simuleringarna är att programmet itererat under olika tidsspann då vi ändrat vissa parametervärden. Vi lät programmet iterera tills det att inflödet av de nya personerna tog slut. Det här ledde exempelvis till att simulering 1 pågick till tid 4.5 medan simulering 4 pågick endast till ca tid 1.5. En diskussion kunde därför inte föras vid alla tidpunkter. Ett krav hade kunnat sättas i itereringen där vi lät alla simuleringar iterera under samma tidsspann men då hade inflödet av nya personer behövt vara större i vissa simuleringar och således hade en diskussion varit svår att föra.

I den nuvarande modellen förflyttas medlemmarna i det kriminella nätverket ute i samhället till fängelset med samma sannolikhet. Som ovan anförts i kapitel 2 har dock personer med en ledande position lättare att verka i skymundan. Av den anledningen skulle en utökad modell kunna innehålla en sannolikhet för person j att ta sig från $N \longrightarrow F$ som också beror av dennes totala antal kontakter k vid given tid. Ett förslag är att ju högre utfall k person j har vid tid t desto högre position i det kriminella nätverket och har därför en lägre sannolikhet att åka in i fängelset.

I denna uppsats valdes att låta p_k bero av det totala antalet kontakter k person j har vid given tid. Vi lät p_k för person j öka i takt med utfallet k och vi satte ett tak på p_k vid 45 kontakter. Beroendet av utfallet k hade kunnat räknas ut på en rad andra sätt men också hade sannolikheten att återfalla i kriminalitet kunnat bero av något helt annat. Återfall i brottslighet är en mycket komplex fråga och har även att göra med en rad andra aspekter än antalet kriminella kontakter.



Figur 11: Statistik från kriminalvården över andelen återfall i brott inom 3 år mellan år 2009 och 2017

Vad som kan avläsas i Figur 11, som även togs upp i diskussionen över resultat, är att återfall i brottslighet ökar kraftigt i takt med antalet avtjänade fängelsestraff (Kriminalvården 2019, s. 67). Därför vore det intressant i en utökad modell att låta γ vara en individull parameter som ökar i takt med antalet avtjänade fängelsestraff för given person. På så sätt hade modellen tagit hänsyn till antalet kriminell kontakter men även låtit hastigheten för att skapa nya kriminella kontakter bero av hur många gånger en person har suttit i fängelset, istället för att låta γ vara en fix parameter.

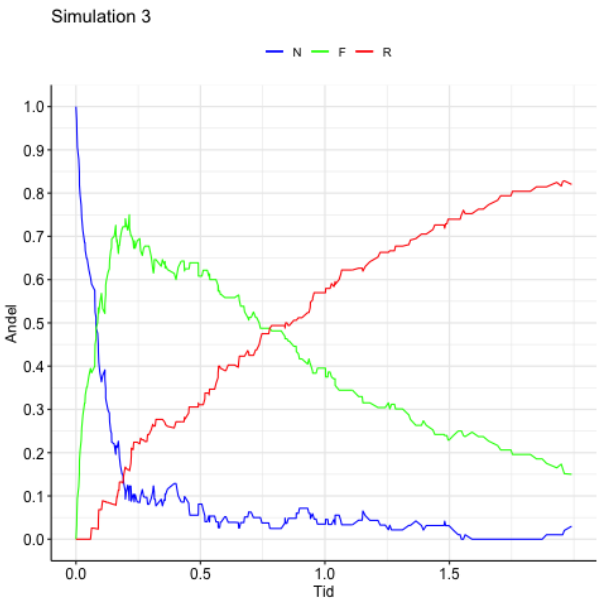
8 Slutsats, återkoppling frågeställning

Syftet med denna uppsats har varit att skapa en matematisk modell, uppbyggd av en dynamisk slumpgraf, för att studera huruvida fängelsestraff påverkar existensen av ett kriminellt nätverk. För att uppfylla detta syfte har huvudsakligen två frågor behandlats.

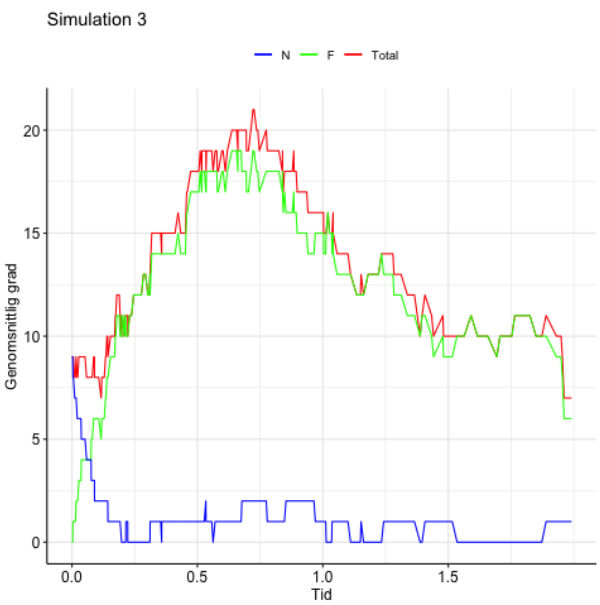
Den första frågeställningen tar sikte på i vilken utsträckning en utökad användning av fängelsestraff påverkar existensen av ett kriminellt nätverk. Resultatet av de genomförda simuleringarna visar att om endast μ, parametern i hastigheten för personerna att hamna i fängelset, ökar, minskar rehabiliteringen över tid. Medlemmarna i det kriminella nätverket hamnar då mer frekvent i fängelset vilket ger en ökad effekt på utfallet av $Y(t)$ som i sin tur ger en ökad effekt på hastigheten $\gamma(Y(t)-1)$, skapandet av nya kriminella kontakter. Detta kan tolkas som att det finns fler tillgängliga personer inne i fängelset som har möjlighet att läras upp i kriminalitet i enlighet med ovan nämnda Synsätt 2, och påverkar då p_k för given person. En jämförelse av Figur 9 och 10 ger också stöd för en sådan slutsats.

Det förefaller nu rimligt att fråga sig hur parametern γ påverkar rehabiliteringen av de intagna och vi kommer nu in på frågeställning nummer 2. På samma sätt som att när $Y(t)$ tenderar att få ökade utfall, kommer ett högre värde av parametern γ få hastigheten $\gamma(Y(t) - 1)$ att öka. Detta ger i sin tur ett negativt utfall av rehabiliteringen och och en ökad sannolikhet p_k. En slutsats vi däremot kunde dra, vid en jämförelse av simulering 2 och 4, var att öka γ från 2 till 4 inte gav en märkbar minskande effekt av andelen rehabiliterad under tid. Det bör vara ett reslutat av att måttet på p_k har ett "tak" på 45 kontakter. En ökad frekvens av inflödet till fängelset kan emellertid vara lönsamt i det fall värdet på γ sänks kraftigt. Ett sådant resonemang ger sken av att konsekvenserna av fängelsestraff enligt Synsätt 1 stämmer. Att γ skulle ha ett så pass lågt värde som 0.5 kan dock ifrågasättas. Till följd av detta resonemang bör ett kriminellt nätverk inte anses elimineras mer effektivt under tid genom en ökad användning av fängelsestraff.

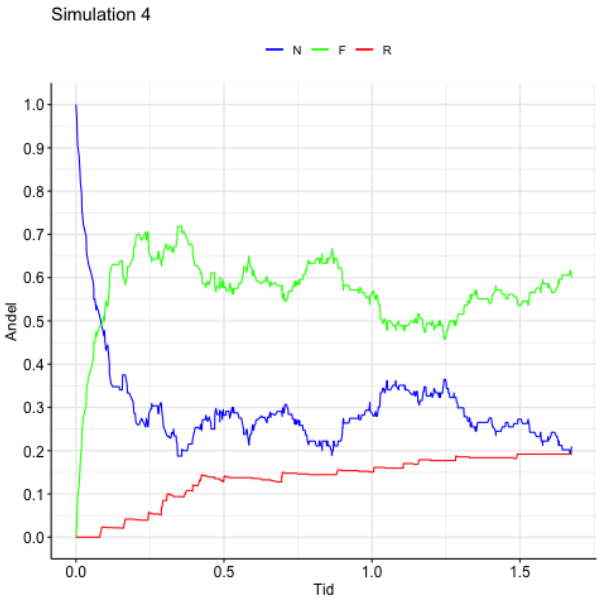
9 Appendix



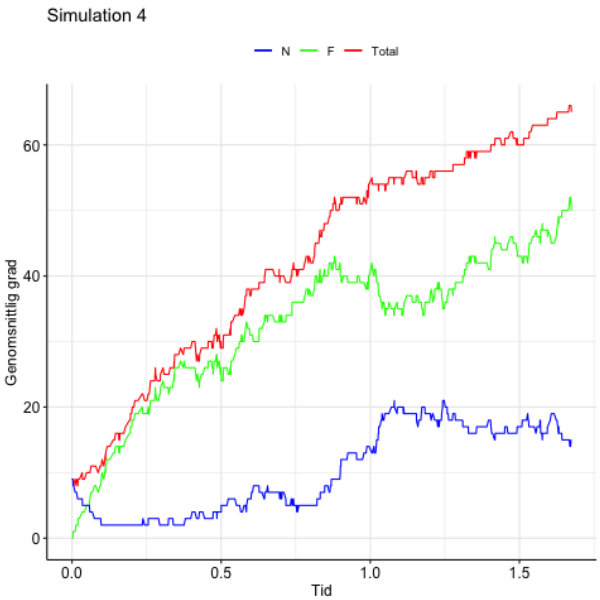
Figur 12: $\alpha = 1, \mu = 4, \gamma = 0.5, \lambda = 2$



Figur 13: $\alpha = 1, \mu = 4, \gamma = 0.5, \lambda = 2$



Figur 14: $\alpha = 1, \mu = 4, \gamma = 4, \lambda = 2$



Figur 15: $\alpha = 1, \mu = 4, \gamma = 4, \lambda = 2$

10 Referenser

Bergvall, Olof (2021). *Grafer*. URL: https://www.youtube.com/watch?v=3oYpAPyOBg8.

BRÅ (2016). *Kriminella nätverk och grupperingar. Polisers bild av maktstrukturer och marknader*. Brottsförebyggande rådet, rapport 2016:12.

Cannings och Penman (2003). *Models of random graphs and their applications*. .I Shanbhag, D.N. and Rao, C.R. Handbook of Statistics. Volym 21, Stochastic Processes: Modelling and Simulation. Elsevier förlag.

Frieze, Alan och Michal Karoński (2016). *Introduction to random graphs*. Cambridge University press.

Gendreau, Paul, Claire Goggin och Francis T. Cullen (1999). *The Effects of Prison Sentences on Recidivism*. Public Works och Government Services Canada.

Kriminalvården (2019). *KOS 2019, Kriminalvård och statistik*. Rapport.

Li, Hao och Xin Gao (2020). "On the Vertex-Connectivity of an Uncertain Random Graph". I: *IEEE Access*.

Persson, Arne och Lars-Christer Böiers (2012). *Analys i en variabel*. Studentlitteratur förlag.

Regeringskansliet (2020). *Straffrättsliga åtgärder mot brott i kriminella nätverk*. Dir. 2020:62.

Ross, Sheldon M. (2014). *Introduction to Probability Models*. Elsevier förlag.

Zhang, Xiao, Cristopher Moore och M.E.J Newman (2016). "Random graph models for dynamic networks". I: *The European Physical Journal*.