Stockholms universitet

När dör ungrarna ut?

Catja Nygren

Kandidatuppsats i matematisk statistik
Bachelor Thesis in Mathematical Statistics

Kandidatuppsats 2021:3
Matematisk statistik
Januari 2021

www.math.su.se

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm

Matematisk statistik
Stockholms universitet
Kandidatuppsats **2021:3**
http://www.math.su.se/matstat

När dör ungrarna ut?

Catja Nygren*

Januari 2021

Sammanfattning

Samtliga västländer har idag ett för lågt barnafödande för att lyckas bibehålla eller öka sina populationsstorlekar. Flertalet av dessa länder har en tillräckligt stor invandring för att motverka den befolkningsminskning som det låga barna-födandet medför. Det finns dock länder som inte har invandring som bidrar till en växande befolkningsmängd. Ett exempel är Ungern, som är ett land med en strikt invandringspolitik och där kvinnorna föder alldeles för få barn för att landet ska kunna bibehålla sin populationsstorlek. En logisk slutsats är att Ungerns population kommer att dö ut, om inget förändras. Hur lång tid tar det, i så fall? Problemet studeras med hjälp av teorier om förgreningsprocesser, födelse-dödsprocesser samt simuleras med hjälp av en livtabell och olika invandrings-nivåer. Ett av antagandena som görs är att nettomigrationen är noll. Förenta Nationerna har predikterat att medellivslängden kommer öka för samtliga länder i världen vilket gör det intressant att utföra simuleringar där befolkningen antas bli äldre. En åldrande befolkning och ett lågt barnafödande borde skapa ogynnsamma ekonomiska förutsättningar och därför studeras det hur försörjnings-kvoten ter sig när barnafödandet förblir lågt men medellivslängden ökar. Resultatet visar att Ungern går mot ett utdöende inom några hundra år, då till exempel befolkningsmängden om tvåhundra år bara är 35% av dagens och fortsätter att minska efter det. Det finns dock flera aspekter som kan påverka resultatet och ju längre fram i tiden som simuleringarna går, desto högre är risken att dessa aspekter har påverkat befolkningsmängden avsevärt. Uppsatsen avslutas med en diskussion om immigrationens roll för västländers befolkningstal.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.
E-post: catjanygren@gmail.com. Handledare: Pieter Trapman.

When will the population of Hungary become extinct?

Catja Nygren

January 2021

Abstract

Today all western countries have too low childbirth rate to maintain or increase their population sizes. Most of these countries have a sufficiently high level of immigration to counteract the population decline created by the low birth rate. However, not all countries have a sufficient immigration rate to sustain a growing population. Hungary, as an example, is a country with a strict immigration policy and where women give birth to far too few children for to be able to maintain its population size. Therefore, a logical conclusion is that population of Hungary will cease to exist if nothing changes. If so, how long will it take? The problem is studied with theories about branching processes, birth-death processes and is simulated with the help of a life table and different levels of immigration. One of the assumptions made is that net migration is zero. The United Nations has predicted that life expectancy will increase for all countries in the world, which makes it interesting to conduct simulations where the population is assumed to become older. An aging population and a low birth rate should create unfavorable economic conditions and therefore the total dependency ratio is studied when the birth rate remains low but life expectancy increases. The results show that Hungary is heading for extinction within a few hundred years. As an example, in two hundred years the population is only 35% of today's and continues to decline thereafter. However, there are several aspects that can affect the results. The further the simulations go in time, the higher the risk that these aspects will significantly affect the population. The essay concludes with a discussion of the role of immigration for the population of Western countries.

Förord

Jag skulle vilja tacka min handledare Pieter Trapman för allt stöd han har gett mig under uppsatsskrivandet. Jag skulle även vilja tacka min familj för att det är en sådan glädje att ha så många personer runt mig som tycker att matematik och allt det för med sig är så intressant att diskutera. Vid förfrågan kan koden för simuleringarna skickas.

Innehåll

1 Introduktion **5**
1.1 Utgångspunkter 6

2 Teori **7**
2.1 Markovkedjor 7
2.1.1 Förgreningsprocess 7
2.1.2 Födelse-dödsprocess 11
2.2 Försörjningskvot 13

3 Dataanalys **14**
3.1 Inhämtad data 14
3.2 Simuleringar 14
3.2.1 Befolkningsmängd 14
3.2.2 Försörjningskvot 15
3.2.3 Invandring 15

4 Resultat **16**

5 Slutsatser och diskussion **21**

6 Referenser **24**

1 Introduktion

Enligt *Organisation for Economic Co-operation and Development* behöver fruktsamhetstalet för högutvecklade länder vara på minst 2.1 för att ett land ska kunna bibehålla eller öka befolkningsmängden (OECD, 2020). Länder i Europa och Nordamerika kommer i regel inte upp i detta värde vilket troligen korrelerar med högre välfärd, högre utbildningsnivå, urbanisering med mera. När kvinnor under en längre tid får bättre möjligheter till utbildning ser man att de föder sitt första barn senare i livet, vilket ofta bidrar till att det inte blir så många barn av biologiska skäl (United Nations, 2004). Detta är en trend som kan ses världen över eftersom befolkningen i många länder får det bättre ekonomiskt. Om ett land har låg fertilitetsnivå under en lång tid börjar landets befolkningsmängd minska och ett möjligt sätt att motverka denna minskning är att öka invandringen till landet. Det medför att befolkningsmängden ökar kortsiktigt men de nya invånarna bidrar på lång sikt också till barnafödandet. Antal barn som föds är alltså inte ett fixerat värdet utan beror bland annat på hur ekonomin i landet ser ut för tillfället och hur många kvinnor som just då är i fertil ålder (United Nations, 2004).

Ungern är ett land som idag har ett barnafödande på 1.54 per kvinna vilket är långt under de 2.1 som krävs för att bibehålla befolkningsmängden (OECD, 2020). Ungern har också en strikt invandringspolitik vilket ihop med det låga födelsetalen gör att befolkningsmängden minskar varje år. Men med låg nettomigration och ett lågt barnafödande borde Ungerns befolkning rent matematiskt gå mot ett utdöende. Här menas inte att varenda person från Ungern dör, utan att befolkningsmängden blivit så liten att de ekonomiska förutsättningarna inte längre möjliggör ett fungerande samhälle. Men frågan är när detta sker?

Denna frågeställning, där Ungern används som exempel men där problemet existerar i många delar av världen, kommer först att studeras rent teoretiskt med hjälp av en förgreningsprocess och en födelse-dödsprocess. Sedan genomförs flera simuleraringar för att se om man kan finna en eller flera kritiska tidpunkter. Denna utveckling är inte okänd för Ungerns premiärminister Viktor Orbán och man kan läsa i tidningen *The Guardian*[1] hur han ser på problemet.

"In all of Europe there are fewer and fewer children, and the answer of the west to this is migration. They want as many migrants to enter as there are missing kids, so that the numbers will add up. We Hungarians have a different way of thinking. Instead of just numbers, we want Hungarian children. Migration for us is surrender."

[1] The Guardian, *'Baby machines': eastern Europe's answer to depopulation.* 4 mars 2020. https://www.theguardian.com/world/2020/mar/04/baby-bonuses-fit-the-nationalist-agenda-but-do-they-work

1.1 Utgångspunkter

En generation mäts från föräldrens födsel till barnets födsel. Det finns idag ingen exakt definition på hur lång en generation är men i allmänhet sägs den vara mellan 20 till 25 år. Detta är dock något som på senare tid börjats ifrågasättas då åldern en kvinna föder sitt första barn har ökat, och åldern när hon föder sitt sista barn likaså (Devine, 2005). I Ungern är snittåldern för en kvinna att föda sitt första barn 28.6 år vilket gör att uppsatsens definition kommer att vara 30 år.

Det finns många aspekter som påverkar fruktsamhetstalet i ett land och en del av dessa kommer inte kunna tas hänsyn till i simuleringarna. Till exempel kommer det inte gå att ta hänsyn till låg- och högkonjukturer i landet, politiska händelser eller andra möjliga påverkansfaktorer på fruktsamhetstalet, eftersom dessa i nuläget är okända. Enligt The World Bank (2020) är Ungerns fruktsamhetstal 1.54 för år 2017. Ungern har sedan i slutet av 90-talet haft ett lågt födelsetal vilket korrelerar med den ekonomiska utveckling som Ungern haft sedan landet blev självständigt 1989. Ungerns fruktsamhetstal låg 2011 på 1.23, vilket är det lägsta värdet för Ungern sedan mätningarna infördes (The World Bank, 2020). Sedan dess har fruktsamhetstalet ökat vilket kan bero på flera olika aspekter. En aspekt är att Orbáns regering har infört bidrag och ekonomiska lättnader för familjer som väljer att skaffa flera barn. Förenta Nationern har gjort en prognos fram till 2100 där de har predikterat att barnafödandet kommer att stiga upp mot 1.75.

Eftersom Ungern redan idag har en strikt invandringspolitik kommer en annan utgångpunkt i uppsatsen vara att Ungerns nettomigration håller sig runt noll. Med det menas att immigrationen är lika stor som emigrationen vilket speglar den ungerska politiska retoriken (se citat ovan).

2 Teori

I detta kapitel presenteras först teorin om två olika typer av Markovkedjor för att därefter diskutera försöjningskvot som begrepp.

2.1 Markovkedjor

Med förankring i *Introduction to probability models* av Sheldon M Ross (2014) kan vi definiera att en process som förändras över tid kallas för en *Markovkedja*. Det är en tidsdiskret stokastisk process som tillsammans med Markovegenskapen gör det möjligt att bestämma processen förlopp utifrån det befintliga tillståndet. Det är alltså bara det nuvarande tillståndet som inverkar på processens framtid.

Låt X_n vara definierad som processens värde vid tid n. Låt $\{X_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ vara de möjliga värdena den finita processen kan anta med en viss sannolikhet. Om $X_n = i$ så menas det att processen antar värde i vid tid n och den bestämda övergångsannolikheten från i till j definieras som $P_{i,j}$. Vi antar att

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = P_{i,j} \tag{1}$$

gäller för alla tillstånd $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n, j$ för alla $n \geqslant 0$. Eftersom $P_{i,j}$ är en icke-negativ sannolikhet som representerar övergångssannolikheten från tillstånd i till tillstånd j får vi att

$$P_{ij} \geqslant 0, \qquad i, j \geqslant 0, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j} = 1, \qquad i = 0, 1, \dots$$

Markovegenskapen är en egenskap i stokastiska processer som visar att den betingade sannolikhetsfördelningen i ett visst tillstånd är oberoende av alla tidigare tillstånd. Kombinerar vi denna egenskap med (1) får vi då att

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = P_{i,j} \tag{2}$$

Det ger oss att sannolikheten att befolkningsmängden vid tiden $n + 1$ är j kan bestämmas utifrån att befolkningsmängden vid tiden n är i.

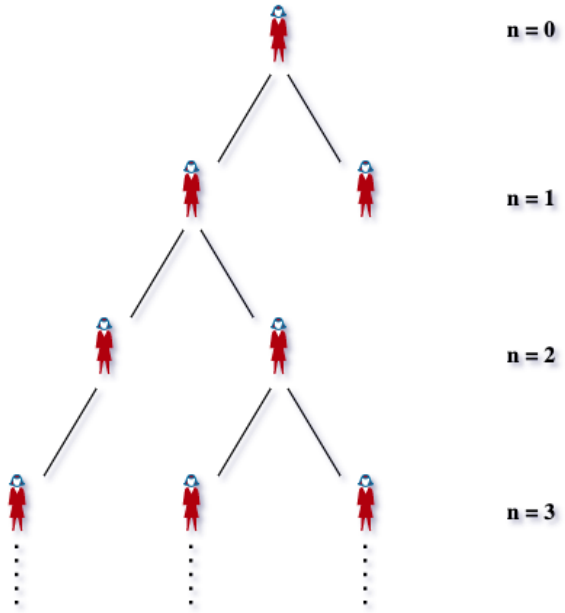
2.1.1 Förgreningsprocess

Antag att det finns individer som under livstiden producerar avkommor som följer en stokastisk process. Antag också att varje individ, oberoende av de andra individerna, i slutet av sitt liv hunnit producera j stycken barn med sannolikheten P_j. Vi antar också att $P_j < 1, \forall j \geqslant 0$. Vi definierar de första individerna i populationen som generation noll medan deras avkommor blir den första generationen. Barnen till den första generationen blir den andra generationen, och så vidare. Beskrivningen ovan kallas för förgreningsprocess. Det är

en klass av Markovkedjor och har avsikt att tjäna som en matematisk modell för en befolkning där varje individ i generation n producerar ett slumpmässigt antal individer i generation $n + 1$ från en fixerad sannolikhetsfördelning som inte varierar över individerna (Ross 2014: 234).

Förgreningsprocessen Galton-Watson är den enklaste modellen för en befolkning som utvecklas över generationer. Den bygger på antagandena att individer i befolkningen föder ett antal barn oberoende av varandra och att alla avkommor har samma fördelning (Lyons & Peres 2016: 132). Givet att $P_j \in [0, 1]$ och $\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$ är processen uppbyggd på följande sätt:

- Processen startar med en enda individ, $X_0 = 1$, som definieras som generation noll.
- Individen föder j stycken barn med sannolikhet P_j. Dessa barn utgör den första generationen.
- Om dessa individer föder barn sker det oberoende av de andra individerna i befolkningen och alla avkommor har samma fördelning. De utgör då den andra generationen av befolkningen.
- Den andra generationen ger i sin tur upphov till en tredje generation av individer med samma regler som föregående generation, och så vidare. Processen forsätter oändligt länge eller tills det inte längre föds några fler barn.



Om en individ inte föder några barn stannar processen upp i det individledet. Det är då enkelt att se att tillstånd 0 är ett absorberande tillstånd, vilket ger att $P_{0,0} = 1$. Det gäller också att om $P_0 > 0$ så är alla andra tillstånd transienta, vilket leder till att processen antingen dör ut eller konvergerar mot oändligheten. Vi låter μ betecknas med $\sum jP_j$ och vara reproduktionsfördelningens väntevärde, med andra ord medelvärdet av hur många döttrar som varje kvinna får. För att få en uppfattning om hur stor befolkningen är vid tid n är det av intresse att undersöka $E[X_n]$. Låt oss först anta att varje population börjar med en enda individ vilket då ger oss

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i} \text{ där } X_0 = 1$$

Vi använder oss av att vi vet att $E[X] = \sum xP(X = x)$ vilket gör att vi kan härleda

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \begin{cases} \sum E[X|Y = y]P(Y = y) & \text{om } y \text{ är diskret} \\ \int E[X|Y = y]f_y(y)dy & \text{om } y \text{ är kontinuerlig} \end{cases}$$

För att beräkna $E[X_n]$ kan vi använda ovan betingning

$$E[X_n] = E[E[X_n|X_{n-1}]] = \sum_{j=0}^{\infty} P(X_{n-1} = j) * E[X_n|X_{n-1} = j] =$$
$$\left[E[X_n|X_{n-1} = j] = E[\sum_{i=1}^{j} Z_{n-1,i}|X_{n-1} = j] = \mu j\right] =$$
$$\mu j \sum_{j=0}^{\infty} P(X_{n-1} = j) = \mu E[X_{n-1}]$$

Eftersom det första antagandet var att $X_0 = 1$ kan vi använda $E[X_0] = 1$ för att beräkna

$$\begin{aligned} &E[X_0] = 1 \\ &E[X_1] = \mu E[X_0] = \mu \\ &E[X_2] = \mu E[X_1] = \mu^2 \\ &\vdots \\ &E[X_n] = \mu E[X_{n-1}] = \mu \cdot \mu^{n-1} = \mu^n \end{aligned}$$

Vi har nu funnit ett sätt att beräkna ett förväntat värde på antalet individer i befolkningen vid tid n. Som tidigare beskrivit så kommer processen antingen dö ut eller konvergera mot oändligheten, vilket kan kontrolleras (Ross 2014: 234).

Vi låter π_0 benämnas som sannolikheten att processen någon gång dör ut, alltså

$$\pi_0 = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 0|X_0 = 1)$$

Då $E[X_n] = \mu^n$ följer det att $\pi_0 = 1$ när $\mu < 1$, vilket kallas det subkritiska fallet. Med Ross (2014) som referens går det att visa att det följer eftersom

$$\mu^n = E[X_n] = \sum_{j=1}^{\infty} jP(X_n = j) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} 1 \cdot P(X_n = j) = P(X_n \geqslant 1)$$

Alltså gäller $\mu^n \geqslant P(X_n \geqslant 1)$ och vi ser tydligt att $\mu^n \to 0$ när $\mu < 1$. När $\mu > 1$ kan man istället beräkna π_0 utifrån antagandet om barnen till generation noll, alltså $X_1 = j$.

$$\pi_0 = P(\text{Populationen dör ut}) = \sum_{j=0}^{\infty} P(\text{Populationen dör ut}|X_1 = j)P_j$$

Populationen dör bara ut om varje familjeträd från den första generationen dör ut men eftersom dessa antas vara oberoende och sannolikheten att en familj dör ut är π_0, följer det att

$$P(\text{Populationen dör ut}|X_1 = j) = \pi_0^j,$$

där

$$\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j P_j$$

Det går också att visa att när $\mu = 1$ dör populationen ut med sannolikhet 1, vilket dock inte kommer visas här. Utifrån detta kan vi nu sammanställa resultatet i tabellen nedan

Subkritiska fallet	$\mu < 1$	$\mu^n \to 0$	$\pi_0 = 1$
Kritiska fallet	$\mu = 1$	$\mu^n \to 1$	$\pi_0 = 1$
Superkritiska fallet	$\mu > 1$	$\mu^n \to \infty$	$\pi_0 < 1$

2.1.2 Födelse-dödsprocess

Beskrivningen ovan visar hur en förändring i populationen sker i diskret tid, men det kanske är mer troligt att denna förändring sker i kontinuerlig tid. Med boken *Probability and random processes* av Geoffrey Grimmett och David Stirzaker (2001) som referens kan vi definiera en *födelse-dödsprocess* som en stokastisk process som, precis som förgreningsprocessen, har icke-negativa heltal som tillstånd. Antag att det finns en befolkning där varje individ föder en avkomma eller dör enligt en viss regel. Låt befolkningsstorleken vara X och låt oss studera X som en funktion av tid t. Om både födelse och död inträffar i konstant takt, λ och δ, förändras befolkningsstorleken X i ett kort tidsintervall Δt på följande sätt

$$\Delta X = X(t + \Delta t) - X(t) = \lambda \Delta t X - \delta \Delta t X$$

eftersom det finns X stycken individer i befolkningen som föder barn med intensitet λ och dör med intensitet δ. Om vi låter $\Delta t \to 0$ får vi

$$\frac{dX}{dt} = (\lambda - \delta)X$$

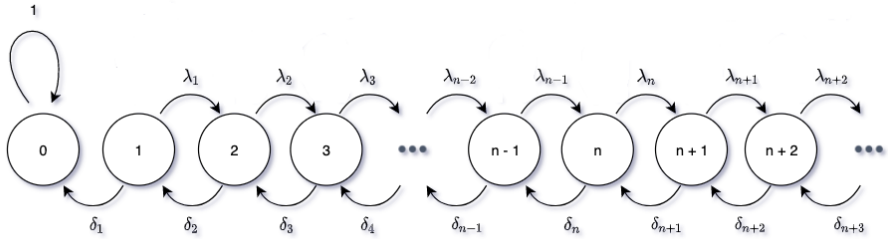
vilket har lösningen

$$X(t) = X(0)e^{(\lambda - \delta)t}$$

där $X(0)$ är den initiala befolkningsmängden vid tid 0. Det är tydligt att om $\lambda > \delta$ så kommer befolkningsmängden öka exponentialfördelat och likaså kommer befolkningsmängden att minska om $\lambda < \delta$. Vi får då processen

- X är en Markovkedja och antar värden $0, 1, 2, 3, \ldots$
- *Födelsehastigheten* ges av λ_i och *dödshastigheten* ges av δ_i, där $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \geqslant 0$ och $\delta_1, \delta_2, \cdots \geqslant 0$ med $\delta_0 = 0$.
- Den oändliga övergångssannolikheten ges av

$$\mathrm{P(X(t+\ \Delta t) = n + m \mid X(t) = n)} = \begin{cases} \lambda_n \Delta t + \mathrm{o}(\Delta t) & \text{om } m = 1 \\ \delta_n \Delta t + \mathrm{o}(\Delta t) & \text{om } m = -1 \\ \mathrm{o}(\Delta t) & \text{om } |m| > 1 \end{cases}$$



Detta ger en födelse-dödsprocess med generator $\mathbf{G} = (g_{i,j} : i, j \geqslant 0)$ som ges av

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \delta_1 & -(\lambda_1 + \delta_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \delta_2 & -(\lambda_2 + \delta_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \delta_3 & -(\lambda_3 + \delta_3) & \lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Vi definierar sannolikhetsgenerarnde funktionen $G(s,t)$ med en sannolikhetsfunktion $P_n(t)$ på följande sätt

$$G(s,t) = \sum_n P_n(t) s^n$$

Från teorem 10 i *Probability and random processes* får vi med antagandena $X(0) > 0$ och $0^0 = 1$ den genererande funktion för $X(t)$ givet $s \in [0,1]$ och $t > 0$:

$$G(s,t) = E[s^{X(t)}] = \begin{cases} \left(\frac{\lambda t(1-s)+s}{\lambda t(1-s)+1}\right)^{X(0)} & \text{om } \lambda = \delta \\ \left(\frac{\delta(1-s)-(\delta-\lambda s)e^{-t(\lambda-\delta)}}{\lambda(1-s)-(\delta-\lambda s)e^{-t(\lambda-\delta)}}\right)^{X(0)} & \text{om } \lambda \neq \delta \end{cases}$$

Det gäller att $E[X(t)] = X(0)e^{(\lambda-\delta)t}$ och definierar vi $\rho = \frac{\lambda}{\delta}$, alltså det förväntade antalet döttrar en kvinna får i livet, ser vi att

$$E[X(t)] \to \begin{cases} 0 & \text{om } \rho < 1 \\ \infty & \text{om } \rho > 1 \end{cases}$$

Från korollarium 12 får vi då att sannolikheten att befolkningen dör ut, η(t), ges av

$$P(X(t) = 0) = \eta(t) \to \begin{cases} 1 & \text{om } \rho \geq 1 \\ \rho^{-X(0)} & \text{om } \rho < 1 \end{cases}$$

då $t \to \infty$.

2.2 Försörjningskvot

Den demografiska försörjningskvoten beskriver hur många individer en person i arbetsför ålder behöver försörja utöver sig själv. Försörjningskvoten ges av summan av antal personer $0 - 24$ år och antal personer över 64 år dividerat med antal personer däremellan. Det är ett mått som inte tar hänsyn till andra aspekter som till exempel välfärd. Det är dock ett bra värde för att kunna jämföra ekonomiska utmaningar i samhällen. Om det är färre personer i arbetsför ålder än icke-arbetsför behöver varje person försörja mer än en person utöver sig själv. Med det menas att det finns färre personer som betalar in skatt än de som är i behov av utbetalningar, som till exempel pensionsutbetalningar eller barnbidrag. Det ger konsekvenser för välfärdssystemet och ger sämre förutsättningar för varje ålderskategori. Som referens kan ges att Sverige idag har en försörjningskvot på 0.77 och prognosen är att kvoten kommer vara 0.89 vid år 2070 och 0.98 vid år 2100. Ungerns försörjningskvot är idag 0.65. Anledningen till att Ungern idag ligger lägre än Sverige förklaras av att det finns färre pensionärer i Ungern än Sverige. Det finns även färre personer mellan $0 - 24$ i Ungern jämfört med i Sverige. Eftersom både Sverige och Ungern har runt tio miljoner invånare betyder det att Ungern idag har en större andel invånare i åldern $25 - 64$ än Sverige. På kort sikt verkar det som att Ungern har bättre förutsättningar ekonomiskt men på lång sikt är det mer optimalt att ha en jämnare fördelning i åldrarna $0 - 64$ och relativt få i pensionsåldern. Det finns inte ett specifikt värde på försörjningskvoten som visar när samhället inte längre är ekonomiskt hållbart. Därför kommer det istället att undersökas om kvoten blir större än 1 samt 1.5. Redan efter 1 bör det bli svårt ekonomiskt i landet, medan efter 1.5 bör invånarna inte längre vilja bo kvar, då den ekonomiska standarden inte längre borde gå att bibehålla.

3 Dataanalys

Detta kapitel beskriver vilken inhämtad data som använts samt hur simuleringarna genomförts.

3.1 Inhämtad data

Det är enbart av intresse att studera befolkningsmängdens utveckling med avseende på kvinnor. Utifrån detta har datan över antal kvinnor per ålderskategori samlats in (The Human Mortality Database: a). I tabell 1 nedan finns ett utdrag av datan från 2017. Tabell 2 är ett utdrag från en uppdelad livtabell där qx är sannolikheten för att en person vid ålder x kommer avlida under det följande levnadsåret (The Human Mortality Database: b). Eftersom det inte finns någon framtida uppskattning på livtabellen, vilket delvis är problematiskt för uppsatsens resultat, kommer denna livtabell ligga till grund för kommande simuleringar.

Ålder	Antal
0	46158
1	44733
2	45503
3	43822
4	44189
⋮	⋮
40	85565
41	89468
42	85778
⋮	⋮

Ålder	qx
0	0.00308
1	0.00029
2	0.00004
3	0.00027
4	0.00025
⋮	⋮
40	0.00089
41	0.00086
42	0.00110
⋮	⋮

Tabell 1 och 2

3.2 Simuleringar

Tre aspekter har valts som antas vara viktiga vid simuleringarna.

3.2.1 Befolkningsmängd

Det finns många sätt att simulera en populationsutveckling på. Ovan har vi sett två teoretiska sätt att prediktera befolkningsmängden vid en framtida tidpunkt. Den första teorin används i en simulering som beräknar den förväntade

befolkningsmängden $E[X_n] = \mu^n E[X_0]b$, där b är antal individer i befolkningen och μ antas vara konstant under alla framtida generationer. Detta är inte speciellt troligt så därför genomförs ytterligare en simulering där μ antar ett slumptal mellan $(min = 0.765, max = 0.775)$ med en ökning på 0.0025 för varje generation tills $max = 1$. Detta scenario stämmer bättre överens med Förenta Nationernas prediktion att Ungerns fruktsamhetstal ska öka till 1.75 år 2100. I simuleringarna sätts en begränsning på $\mu^n > 0.001$ eftersom det känns otroligt att en så liten befolkningsmängd skulle ha någon chans att återhämta sig. Den andra teorin används i kombination med livtabellen för att genomföra simuleringar där individerna som är x år gamla blir $x + 1$ år gamla med sannolikhet $1 - qx$, alltså λ_i. Antal barn som föds under året sker i proportion till antal kvinnor i åldrarna $15 - 44$.

3.2.2 Försörjningskvot

Ett ekonomiskt bekymmer för alla västländer är att medellivslängden beräknas bli högre i samtliga länder vilket leder till att en större andel av befolkningen kommer befinna sig i ålderskategorin 65+ (United Nations, 2004). Detta medför i sin tur till att försörjningskvoten ökar, så länge pensionsåldern inte höjs. För att simulera så verklighetstrogna resultat som möjligt kommer medellivslängden att antas öka från 79 år till 100 år under de kommande 300 åren (United Nations, 2004: 219). Eftersom befolkningen undersöks utifrån ett generationsperspektiv behöver datan delas upp i olika ålderskategorier för att vi ska kunna beräkna försörjningskvoten. Det görs på med hjälp av Förenta Nationernas definition på försörjningskvot

$$\begin{aligned} 0 - 24 \text{ år som just nu är } 23.9\% \text{ av befolkningen} \\ 25 - 64 \text{ år som just nu är } 53.9\% \text{ av befolkningen} \\ > 65 \text{ år som just nu är } 22.2\% \text{ av befolkningen} \end{aligned}$$

Som tidigare beskrivits är försörjningskvoten intressant att studera för att se om ett samhälle är ekonomiskt hållbart. Därför undersöks det vid vilka n som försörjningskvoten är större än 1 och sedan om den är större än 1.5.

3.2.3 Invandring

Ett av de grundläggande antagandena i uppsatsen är att Ungerns nettomigration stannar runt noll. Detta är inget drastiskt antagande utan speglar ungefär dagens verklighet, eftersom Ungerns låga nivå av invandring inte bidrar till att bibehålla befolkningsmängden. En intressant fråga är vad hade hänt med befolkningsmängden om Ungern hade öppnat sina gränser 2020? Detta undersöks genom att för varje år slumpmässigt generera y stycken värden från en normalfördelning med väntevärde 25 år och sedan addera dessa till motsvarande åldersgrupp i den kvinnliga populationen. För att undersöka olika invandringsnivåer kommer y anta både 10 000 och 20 000.

4 Resultat

I både 2.1.1 och 2.1.2 såg vi att när fruktsamhetstalet är mindre än 1 dör populationen ut med sannolikhet 1. Med hjälp av förgreningsprocessen kan den förväntade befolkningsmängden beräknas på följande sätt:

$$E[X_n] = \mu^n$$

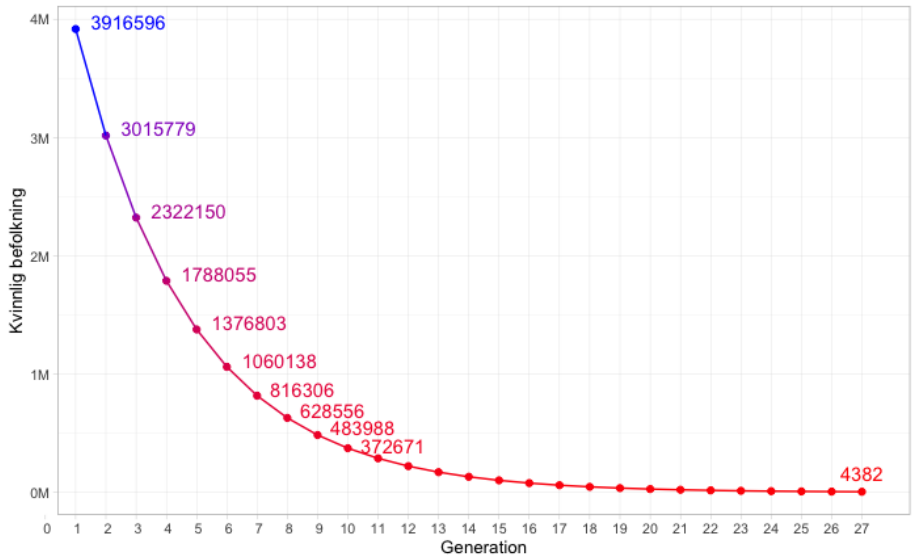
År 2020 hade Ungern ett fruktsamhetstal på 1.54 per kvinna. Det avser dock barn av båda könen. Då vi enbart är intresserade av hur många döttrar en kvinna får under sin livstid använder vi nu $\mu = 0.77$, då vi antar att kön på barn är bernoullifördelat med sannolikhet 0.5. Eftersom varje förgrening är oberoende av andra förgreningar kan vi utgå ifrån att detta kommer gälla för de just nu 5086488 kvinnorna i landet. Det ger oss

$$E[X_n] = \mu^n \cdot E[X(0)] \cdot b = 0.77^n \cdot 5086488$$

Eftersom $\mu < 1$ leder det till

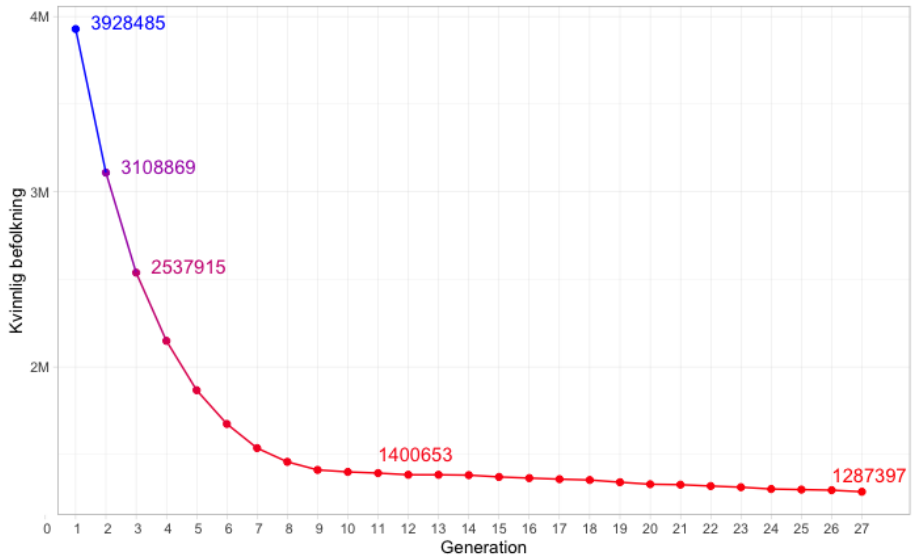
$$\mu^n \to 0 \implies \pi_0 = 1$$

Nedan finns en graf där vi låter n gå från 1 till 27 och ser att efter 27 generationer á 30 år så borde det finnas 4382 kvinnor kvar i populationen.



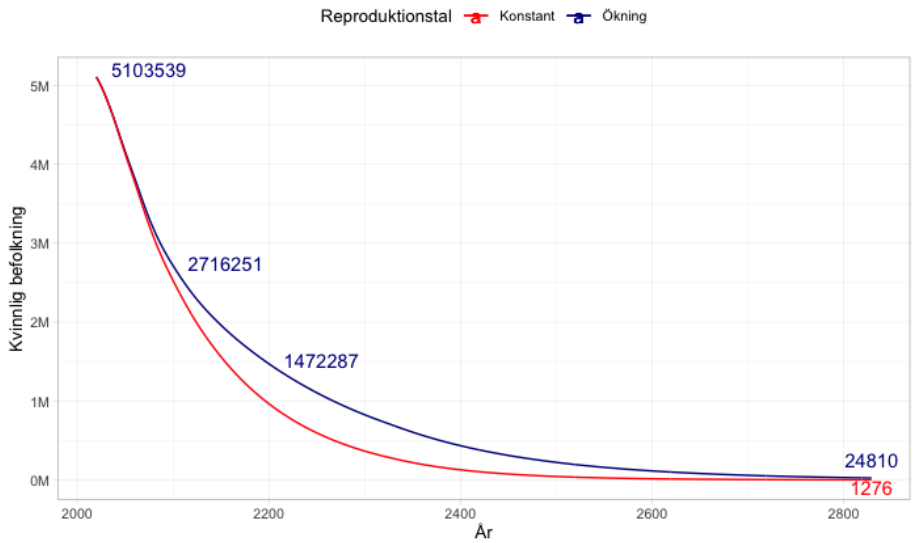
Figur 1: simulering av μ^n med μ som konstant

Det är dock orimligt att anta att μ ska vara konstant i alla generationer framåt. Förenta Nationerna har uppskattat att fruktsamhetstalet kommer att öka i Ungern, för att stabilera sig runt två barn per kvinna (United Nations, 2004). Därför har vi nedan en graf där vi låter μ slumpmässigt anta ett värde i intervallet $(min = 0.765, max = 0.775)$ med en ökning på 0.0025 varje generation tills $max = 1$. Vi ser här att det inte längre är ungefär fyra tusen personer kvar utan cirka 1.29 miljoner kvinnor. Att förutsättningarna för att populationen inte ska dö ut har blivit bättre är lätt att se eftersom μ närmar sig det fruktsamhetstal på 2.1 som enligt OECD (2020) är det kritiska värde för att en befolkningsmängd ska kunna bibehållas. Det kan dock inte sägas vara en vinst för ett land att efter 27 generationer ha minskat sin befolkningsmängd med 75%.



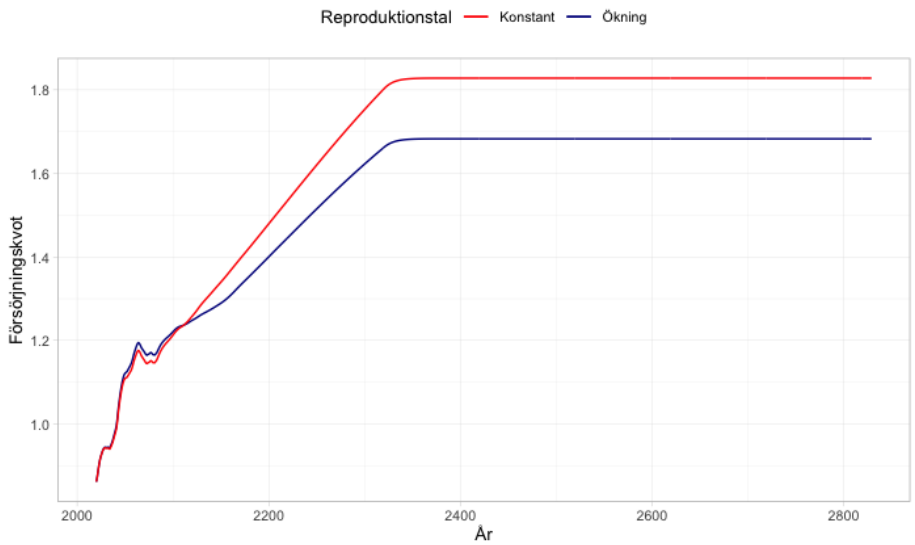
Figur 2: simulering av μ^n med varierande μ

För att få ett mer verklighetstroget resultat än i simuleringarna ovan kommer vi här att använda livtabellen och populationstabellen i Kapitel 3.1. Barnafödandet sker varje år proportionellt till mängden kvinnor i kategorin $15-44$ år. Den ökade medellivslängden har tagits hänsyn till och årssannolikheten att dö i livtabellen minskas varje år för att efter 300 år stabilisera medellivslängden runt 100 år. I figur 3 nedan visar den blå linjen på simulering av befolkningsmängden med ett fruktsamhetstal som har en årlig procentuell ökning på 0.152% för att efter 80 år ha ökat till 0.87 (1.74). Den röda linjen visar simulering av befolkningsmängden med fruktsamhetstal på 0.77 (1.54) över hela tidsperioden. Trots att det skett en ökning i antal födda barn per kvinna har fruktsamhetstalet inte gått upp till över 2.1 vilket är anledningen till den drastiska minskningen i befolkningsmängden. Det är dock tydligt att det är skillnad på de två predikterade befolkningsmängderna, då populationsstorleken är knappt tjugo gånger större år 2800, om fruktsamhetstalet antas öka under de första 80 åren.



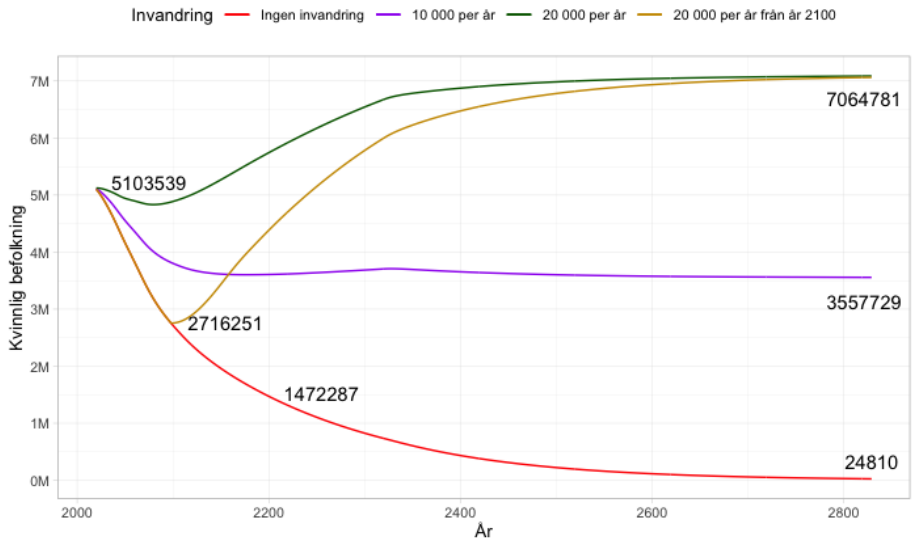
Figur 3: simulering med hjälp av livtabell och åldersgrupper

Eftersom medellivslängden ökar kommer invånare som är över 64 år att bli fler vilket gör att försörjningskvoten blir högre. Vi ser nedan i figur 4 att försörjningskvoten mestadels har en årlig ökning fram tills när medellivslängden är simulerad att stabilisera sig vid 100 år. Därefter konvergerar försörjningskvoten mot drygt 1.8 när fruktsamhetstalet simulerats att vara konstant medan knappt 1.7 när fruktsamhetstalet har en viss ökning. Båda dessa fall bör vara ekonomiskt ohållbara för ett land. Vi ser att ungefär vid 2200 bör försörjningskvoten vara 1.5 vilket vi som tidigare har benämnt som en kritisk punkt. Att försörjningskvoten konvergerar beror på att ett läge uppstår där proportionerna mellan åldergrupperna är desamma samtidigt som befolkningen sakta men säkert minskar till följd av för få nyfödda.



Figur 4: simulering av försörjningskvot

Om Ungern hade öppnat sina gränser och välkomnat invandring år 2020, hur hade det då sett ut framåt? I figur 5 nedan ser vi fyra olika fall där den röda linjen visar resultatet av att fortsätta ha nettomigration på noll som jämförelsevärde. Den lila linjen är en simulering med invandring på cirka 10 000 kvinnor per år, och då ungefär 10 000 män per år också. Vi ser direkt att det ger en bättre förutsättning för befolkningen rent mängdmässigt. Den gröna linjen är en simulering med 20 000 kvinnor per år (20 000 män också), vilket ger att den kvinnliga befolkningsmängden inte bara har slutat minska utan verkar stabilisera sig runt sju miljoner. Den gula linjen visar istället hur befolkningsmängden hade sett ut om Ungern inte öppnade gränserna förrän vid år 2100. Även fast befolkningsmängden drastiskt minskade fram tills år 2100 ser vi här att den också verkar stabilisera sig runt sju miljoner kvinnor. Invandring på 40 000 personer per år är ungefär 0.4% av befolkningen, vilket är långt under snittet i EU som ligger på 1%. Det är fortfarande så att barnafödandet inte har ändrats något markant utan det som skett är att invandringen har hjälpt till att inte bara bibehålla befolkningsmängden, utan även fått den att öka.



Figur 5: simulering med invandring i olika nivåer

5 Slutsatser och diskussion

Frågeställningen om när ungrarna dör ut har visat sig vara svårt att besvara då det för oss just nu är omöjligt att veta vad framtiden har att ge. I Kapitel 2.1.1 framgick det att med hjälp av teorin om förgreningsprocesser kan $E[X_n]$ skattas med hjälp av μ^n för något framtida n, där μ är fruktsamhetstalet. Det var också tydligt att om $\mu < 1$ så går $\mu^n \to 0$ och det förväntande värdet på populationen X vid tiden n blir 0. Detta visades sedan genom simuleringen av 27 generationer med $\mu = 0.77$ i figur 1. Det kanske dock inte kan anses vara troligt att μ skulle vara konstant för de kommande 27 generationerna vilket ihop med uppskattningarna från Förenta Nationerna att fruktsamhetstalet kommer att öka framöver resulterade istället i en simulering där μ antar ett slumpmässigt tal mellan min- och maxvärden, där dessa ökar med 0.0025 tills maxvärdet är lika med 1. I figur 2 såg vi att det antagligen gav ett mer troligt resultat och med bättre framtidsutsikter jämfört med den första simuleringen. I Kapitel 2.1.2 kunde vi med hjälp av teorin om en födelse-dödsprocess se att även den stödjer att när fruktsamhetstalet är mindre än 1 kommer populationen att dö ut, då $\mathrm{P(X(t) = 0)} = \eta(t) \to 1$ när $t \to \infty$.

Som tidigare beskrivits har Förenta Nationerna och många andra gjort uppskattningar om att medellivslängden på jorden kommer att öka de kommande 300 åren. Därför var det även intressant att simulera befolkningsmängden med hjälp av livtabellen och populationen indelad i åldersgrupper för att undersöka hur en åldrande befolkning påverkar den minskade befolkningsmängden. För att skapa en åldrande befolkning simulerades en liten minskning i dödssannolikheterna för varje år tills att medellivslängden blev 100 år. I figur 3 såg vi att trots en allt äldre befolkning, som borde medföra en större befolkningsmängd, går populationen mot 0. Det gjordes med två olika antaganden om μ där det givetvis var till fördel för befolkningsmängden att μ ökade procentuellt under de första åren. Simuleringen gjordes även för att kunna studera hur försörjningskvoten ter sig framöver. Med en åldrande befolkning känns det självklart att försörjningskvoten blir högre, då det finns ett större antal individer i ålderkategorin över 64. Men vi ser att när medellivslängden fick stabilisera sig vid 100 år så konvergerade försörjningskvoten. Det var ett oväntat men nu i efterhand givet resultat. Om en befolkning har en stabil medellivslängd och barnafödandet sker proportionellt mot åldersgrupperna $15 - 44$ år efter år så kommer försörjningskvoten att konvergera. Det beror på att ett läge uppstår där proportionerna mellan åldergrupperna är desamma samtidigt som befolkningen sakta men säkert minskar till följd av för få nyfödda. Vi ser dock att redan efter runt 200 år är försörjningskvoten uppe i det kritiska värdet 1.5 där varje person i arbetsför ålder måste försörja ytterligare 1.5 personer i icke-arbetsför ålder. Det är dock troligt att om medellivslängden blir uppemot 100 år så kommer pensionsåldern att diskuteras och antagligen höjas. Om den höjs blir försörjningskvoten lägre eftersom proportionerna ändras.

Ett av antagandena som gjordes i början av uppsatsen var att Ungerns immigration var lika stor som emigrationen, men vad skulle hända om Ungerns regering ändrade sitt förhållningssätt och möjliggjorde för ökad invandring? I

figur 4 såg vi fyra möjliga framtidsutsikter där det bästa resultatet av dessa var när invandring sker med runt 20 000 kvinnor per år och då lika många män. Följer man utvecklingen ser man att under de närmsta åren från start fortsätter befolkningsmängden att minska, men eftersom både medellivslängden och antal personer i fertil ålder ökar börjar även befolkningsmängden att öka, för att sedan stabilisera sig runt sju miljoner kvinnor. Vi ser i figur 4 att stabiliseringen sker när medellivslängden inte längre simuleras att öka men att den linjen fortsätter smått uppåt, medan den lila linjen som representerar invandring på 10 000 kvinnor per år minskar något. Med detta går det att dra slutsatsen att för att bibehålla en befolkningsmängd krävs det en årlig invandring på ett tal någonstans mellan 10 000 - 20 000 kvinnor, och lika många män, per år. Vi ser även i figuren att om Ungern inte öppnar gränserna förrän år 2100 så har de fortfarande möjlighet att öka sin befolkning med årlig invandring på 40 000 människor, varav minst hälften måste vara kvinnor.

Sammanfattningsvis är resultatet tydligt att med dagens fruktsamhetstal och invandringspolitik är sannolikheten lika med 1 att ungrarna ska dö ut, vilket visas genom simulering och backas upp av teorin, även om en specifik tidpunkt har varit svårt att fastställa. En möjlig slutsats skulle kunna vara att när försörjningskvoten når 1.5 om runt 200 år bör ekonomin vara i ett så dåligt tillstånd att den yngre delen av befolkningen börjar emigrera för att söka efter bättre ekonomiska förutsättningar någon annanstans. Detta har vi sett ske i ett antal länder redan när försöjningskvoten ökar. Den enda simuleringen som skapar positiva framtidsutsikter för befolkningsmängden är när det simuleras att invandring välkomnas och stadigt sker med samma antal år efter år. Det är även möjligt att vända den dystra utsikten genom att öka fruksamhetstalet vilket Ungerns premiärminister Orbán aktivt arbetar med genom att erbjuda bidrag och ekonomiska lättnader för kvinnor som föder många barn.

Invandring har i uppsatsen enbart tagits med som slumpmässiga tal genererade från en normalfördelning med väntevärde 25 år och det har antagits att dessa har en jämn fördelning mellan könen. Det finns självklart fler aspekter att ta hänsyn till vid en större och mer precis modell, så som könsfördelning, åldersfördelning, segregation med mera, vilket hade varit intressant att studera om jag hade haft mer tid. Att invandringen också har ett konstant värde under alla kommande år kan kännas orimligt och det kanske hade varit mer troligt att simulera invandringen proportionerligt till befolkningsstorleken eller till världspopulationen, då dessa kommer att ändras med tidens gång.

Resultatet av de matematiska simuleringar som gjort i denna uppsats visar att invandring är en viktig aspekt i att bibehålla befolkningsmängden när barnafödandet är så lågt som i Ungern idag. Resultaten skulle troligen se ungefär likadana ut för de många västländer som idag har en strikt invandringspolitik. Att den svenska politiska diskursen idag är helt inriktad på att minska invandring, trots att invandring är helt nödvändig för att bibehålla vår försörjningskvot på rimliga nivåer, är som jag ser det ett stort pedagogiskt problem. Matematiker skulle kunna bidra med svar på frågor som dessa, men det är först nu i coronatider som matematik blivit ett ämne som förevisas i nyhetssändningarna.

Denna uppsats har strikt avgränsats i att undersöka födelsetal, populationer och invandring utifrån ett lands egenintresse av att bibehålla rimliga försörjningskvoter, utan att ta hänsyn till andra aspekter av migration, som människors skyddsbehov mm. En faktor som troligtvis kommer att påverka migrationen framåt är klimatförändringarna. Dessa kommer troligtvis att ändra demografin världen över och många fler människor kommer inom snar framtid vara på flykt. Kommer Ungern, och resten av västvärlden, då att ta in flyktingar för att rädda sin negativa populationsutveckling? Det återstå att se.

6 Referenser

Devine, Donn. 2005. *How Long is a Generation?*. Ancestry Magazine.

Grimmett, G. & Stirzaker, D. 2001. *Probability and random processes*. 4. uppl. New York: Oxford University Press

The Human Mortality Database: a. *Populationsstorlek 1950-2018*. Tillgänglig: https://www.mortality.org/hmd/HUN/STATS/Population.txt [Hämtad 2020-11-25]

The Human Mortality Database: b. *Livtabell 1950-2017*. Tillgänglig: https://www.mortality.org/hmd/HUN/STATS/fltper$_1x1.txt$ [Hämtad 2020-11-25]

Lyons, R. & Peres, Y. 2016. *Probability on trees and networks*. New York: Cambridge University Press

OECD. 2020. *Fertility rates (indicator)*. doi: 10.1787/8272fb01-en [Hämtad 2020-11-25]

Ross, S.M. 2014. *Introduction to Probability Models*. 11. uppl. San Diego: Academic Press

United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division. 2004. *World population to 2300*. New York: United Nations

The World Bank. 2020. *Fertility rate, total (births per woman) - Hungary*. Tillgänglig: https://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.TFRT.IN?locations=HU [Hämtad 2020-11-25]