



Stockholms  
universitet

# Den kalkylerande kvacksalvaren

*En utvärdering av stoppregler och strategival genom simulering*

Zara Fuhrmann

Kandidatuppsats 2026:10  
Matematisk statistik  
Maj 2026

[www.math.su.se](http://www.math.su.se)

Matematisk statistik  
Matematiska institutionen  
Stockholms universitet  
106 91 Stockholm

# Den kalkylerande kvacksalvaren

*En utvärdering av stoppregler och strategival genom simulering*

Zara Fuhrmann\*

Maj 2026

## Sammanfattning

Denna studie syftar till att undersöka en spelares optimala risknivåer och jämföra olika köpstrategier i en förenklad variant av spelet *Kvacksalvare* (originaltitel: *The Quacks of Quedlinburg*). Spelet modelleras som en sekventiell beslutsprocess där spelaren i varje steg väger risken för en ”explosion” mot den förväntade marginalnyttan som fås ifall processen fortsätter ytterligare ett steg. Genom Monte Carlo-simuleringar (10 000 spel per datapunkt) och med hjälp av teorier inom beslutsteori och resursallokering identifieras optimala risktrösklar ( $\alpha$ ) för att maximera den förväntade slutpoängen. Resultaten visar att det är mer fördelaktigt att investera i dyra resurser (kvalitet) framför flera billiga (kvantitet) som annars används i syfte att åstadkomma en utspädningseffekt. Vidare presterar modellen bättre när risktröskeln tillåts variera mellan spelets nio omgångar, vilket resulterar i ytterligare ökning av genomsnittliga poängen. Risknivån når sin högsta punkt i näst sista omgången för att sedan sjunka i finalen, då risken att gå miste om omgångens poäng överstiger nyttan av ytterligare framsteg.

---

\*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.  
E-post: [zaraminmin@hotmail.com](mailto:zaraminmin@hotmail.com). Handledare: Daniel Ahlberg och Maria Dejifen.

## Abstract

This study aims to examine a player's optimal risk levels and compare different buying strategies in a simplified version of the board game *Quacks of Quedlinburg*. The game is modeled as a sequential decision process where the player in each step weighs the risk of an "explosion" against the expected marginal utility that one will receive if the process continues one step further. With Monte Carlo simulations (10 000 per datapoint) and with theory about decision theory and resource allocation we identify optimal risk thresholds ( $\alpha$ ) to maximize the expected final score. The results show that it is better to invest in expensive resources (quality) rather than in multiple inexpensive ones (quantity), a strategy typically employed to achieve a dilution effect. Furthermore, the model performs better when the threshold is allowed to vary between the nine rounds of the game. The risk level reaches its highest point in the second to last round, before decreasing in the final round, where the risk of losing the points gained during the round exceeds the utility of further progress.

## Förord

Detta är ett examensarbete om 15 högskolepoäng inom matematisk statistik, skrivet vid Matematiska institutionen på Stockholms universitet. Jag vill rikta ett stort tack till mina handledare Daniel Ahlberg och Maria Deijfen för god vägledning och stöttande under hela processen.

Under arbetets gång har Google Gemini använts för att bolla idéer, granska koden till simuleringarna samt korrekturläsning.

Slutligen vill jag även tacka Sebastijan Babic som har läst igenom arbetet och kommit med värdefulla förslag på förändringar.

# Innehåll

|          |                                                              |           |
|----------|--------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Inledning</b>                                             | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Spelregler</b>                                            | <b>2</b>  |
| 2.1      | Komponenter och förberedelser . . . . .                      | 2         |
| 2.2      | Dragningsfasen (optimalt stopp) . . . . .                    | 2         |
| 2.3      | Köpfasen (resursallokering) . . . . .                        | 3         |
| <b>3</b> | <b>Teori</b>                                                 | <b>4</b>  |
| 3.1      | Beslutsteori och resursallokering . . . . .                  | 4         |
| 3.1.1    | Nytta och marginalnytta . . . . .                            | 4         |
| 3.1.2    | Optimalt stopp och risktrösklar . . . . .                    | 4         |
| 3.1.3    | Kappsäcksproblemet . . . . .                                 | 5         |
| 3.1.4    | Utspädningseffekt genom populationsökning . . . . .          | 6         |
| 3.1.5    | Tidsvärde via baklängesinduktion . . . . .                   | 6         |
| 3.1.6    | Stegvis optimering . . . . .                                 | 6         |
| 3.2      | Stokastisk simulering och Monte Carlo-estimering . . . . .   | 6         |
| <b>4</b> | <b>Modellering</b>                                           | <b>8</b>  |
| 4.1      | Förenklingar . . . . .                                       | 8         |
| 4.2      | Matematisk representation av spelet . . . . .                | 8         |
| 4.3      | Beräkning av explosionsrisk . . . . .                        | 9         |
| 4.4      | Beslutsmodell och risktröskel ( $\alpha$ ) . . . . .         | 10        |
| 4.5      | Köpstrategier . . . . .                                      | 10        |
| 4.5.1    | Köpstrategi 1 (kvalitet) . . . . .                           | 10        |
| 4.5.2    | Köpstrategi 2 (kvantitet) . . . . .                          | 11        |
| 4.6      | Stokastisk simulering och parameteroptimering . . . . .      | 11        |
| <b>5</b> | <b>Resultat</b>                                              | <b>13</b> |
| 5.1      | Konstant risktröskel ( $\alpha$ ) . . . . .                  | 13        |
| 5.2      | Analys av specifika omgångar . . . . .                       | 14        |
| 5.3      | Stegvis optimerade risktrösklar . . . . .                    | 16        |
| 5.4      | Slutgiltig jämförelse . . . . .                              | 17        |
| <b>6</b> | <b>Diskussion</b>                                            | <b>18</b> |
| 6.1      | Konstant risk $\alpha$ och utspädningseffekten . . . . .     | 18        |
| 6.2      | Köpstrategiernas effektivitet och resursallokering . . . . . | 18        |
| 6.3      | Dynamisk risk $\bar{\alpha}$ och tidsvärde . . . . .         | 19        |
| 6.4      | Modellens begränsningar och framtida forskning . . . . .     | 20        |
|          | <b>Appendix</b>                                              | <b>21</b> |
|          | <b>Referenser</b>                                            | <b>22</b> |

# 1 Inledning

Spelet *Kvacksalvare* (originaltitel: *The Quacks of Quedlinburg*) är ett modernt sällskapsspel som i denna studie används för att utforska beslutsfattande under osäkerhet. Spelet bygger på slumpmässiga dragningar utan återläggning. Det spelas i flera rundor där varje runda består av två faser. Den första fasen består av dragningarna. Det finns gynnsamma och icke gynnsamma element och ett kapital byggs upp för ju fler element som dragits. Spelaren står inför sekventiella val och behöver avgöra om belöningen vid en till lyckad dragning övervinner risken av en eventuell ogynnsam dragning som kan leda till totalt misslyckande. Detta påminner om kortspelet Black Jack som också inkluderar det klassiska problemet med optimalt stopp.

I spelets andra fas sker en resursallokering där det intjänade kapitalet från den första fasen investeras för att påverka framtida sannolikhetsfördelningen för framtida rundor.

Syftet med denna studie är att genom Monte Carlo-simuleringar jämföra olika strategier i optimalt stopp baserat på statistiskt framtagna tröskelvärden. Vidare undersöks hur olika investeringsstrategier påverkar den förväntade slutpoängen över spelets nio rundor.

## 2 Spelregler

*Kvacksalvare* spelas i nio rundor. Varje runda består av en dragningsfas följt av en köpfas. Nedan beskrivs de centrala momenten och de begrepp som ligger till grund för den statistiska modellen [6].

### 2.1 Komponenter och förberedelser

**Spelplanen (kitteln):** Varje spelare har en egen spelplan i form av en kittel med ett ökande numrerat spår. Positionen på spelplanen avgör hur mycket poäng och kapital spelaren erhåller, se Figur 1.



Figur 1: Spelplanen med det ökande numrerade spåret [6]. Rutorna och deras tillhörande siffervärden förklaras närmare i avsnitt 2.3.

**Startpåse:** Varje spelare börjar med en påse innehållande nio marker med tillhörande siffervärden:

- **Vita marker** ( $v_1, v_2, v_3$ ): Fyra marker med värde ett, två med värde två samt en mark med värde tre. Dessa utgör risken och finns med i påsen i hela spelet.
- **Färgade marker** ( $f_1$ ): Två marker med värde ett. De bidrar endast till förflyttning på spelplanen.

**Övriga markörer:** I originalspelet finns även "droppar", "spådomskort", "rättsvansar" med mera för att påverka startpositionen på spelplanen och ge olika bonusar, men för att isolera effekten av olika strategival exkluderas dessa från studien.

### 2.2 Dragningsfasen (optimalt stopp)

Under denna fas drar spelaren marker sekventiellt från sin påse och därefter placerar ut den på sin spelplan:

1. **Placering:** Alla marker är markerade med en siffra  $i$  som representerar antalet steg fram på det numrerade spåret på spelplanen som marken ska placeras vid dragning, där  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .
2. **Explosion:** Om den totala siffersumman av de dragna vita markerna ( $v_i$ ) överstiger sju, sker en explosion och dragningsfasen avslutas omedelbart.
3. **Stoppbeslut:** Efter varje dragning som inte leder till explosion kan spelaren besluta om att avsluta fasen eller att fortsätta dra marker ur påsen.

## 2.3 Köpfasen (resursallokering)

Efter avslutad dragningsfas sker en utvärdering:

1. **Belöning:** Slutpositionen på spelplanen ger segerpoäng och köppoäng (kapital):
  - **Segerpoäng:** Dessa är poängen som i slutet summeras till slutpoängen, det vill säga beloppet man vill maximera för att vinna. Ju längre fram på spelplanen ens sista mark är placerad desto mer segerpoäng erhålls. Segerpoängen är två i exemplet i Figur 1.
  - **Köppoäng:** Dessa poäng motsvarar siffran som står i det gröna fältet på det numrerade spåret på spelplanen (motsvarar 10 i Figur 1).
2. **Beslut vid explosion:** Enligt spelets regler får en spelare som drabbats av en explosion välja mellan att antingen erhålla rundans segerpoäng eller genomföra köp.
3. **Investering:** Nu fås möjligheten att expandera påsen genom att köpa maximalt två nya färgade marker ( $f_1, f_2, f_4$ ). Priserna definieras senare i Tabell 2. I originalspelet finns det flera färger på marker att köpa: röda, orange, gula, gröna, blåa, lila och svarta. Dessa har alla, förutom de orange, specialeffekter som tillämpas när de läggs eller efter dragningsfasen, men övriga färger har exkluderats för att förenkla analyserna av optimeringsproblemet.

**Slutet på spelet:** Efter dragningsfasen i runda nio fungerar köpfasen annorlunda. Eftersom inga ytterligare rundor återstår, används köppoäng för att köpa segerpoäng i stället för marker. Spelaren erhåller ett segerpoäng för var femte köppoäng som genererats under omgången. Notera att vid explosion i sista rundan måste spelaren välja mellan de erhållna segerpoängen eller konvertera sina köppoäng till segerpoäng enligt växelkursen fem till ett. Vinnaren är den som har flest segerpoäng efter alla nio rundor.

## 3 Teori

### 3.1 Beslutsteori och resursallokering

Här introduceras begrepp, metoder och kända statistiska problem som utgör grunden för att modellera och analysera beslutsfattande under osäkerhet. Med hjälp av dessa teorier kan en aktör optimera sitt agerande i ett system med begränsade resurser och riskfyllda utfall.

#### 3.1.1 Nyttan och marginalnyttan

Inom beslutsteori används begreppet nytta (eng. *utility*) för att kvantifiera en aktörs preferenser [5]. Ett rationellt beslutsfattande förutsätter att aktören vill maximera den förväntade nyttan baserat på den information som finns tillgänglig vid beslutstillfället.

Vidare definieras marginalnyttan (eng. *marginal utility*) som den tillkommande nyttan som erhålls i en process om en aktör väljer att fortsätta med processen ytterligare ett steg. I ett sekventiellt beslutsproblem vägs marginalnyttan av en lyckad handling mot den förväntade kostnaden av ett misslyckande.

#### 3.1.2 Optimalt stopp och risktrösklar

Inom matematisk statistik och beslutsteori studeras ofta problem som innefattar sekventiella val. Ett av de mest kända exemplen på detta är det klassiska sekreterarproblemet (eng. *the secretary problem*). I denna typ av problem agerar en aktör stegvis, utan att i förväg veta vad nyttan av framtida utfall kommer att vara. Under processens gång ställs aktören efter varje dragning inför det binära valet att avbryta och acceptera den nuvarande nyttan, eller att fortsätta processen.

Risken som aktören tar vid en fortsättning är att den framtida nyttan inte nödvändigtvis blir högre, och att processen till och med kan resultera i ett kritiskt misslyckande där hela belöningen går förlorad. Målet är att hitta exakt rätt tidpunkt att stanna för att maximera den förväntade slutnyttan. Denna typ av avvägning kallas i litteraturen för optimalt stopp (eng. *optimal stopping*) [2].

För att hantera detta rent matematiskt definieras en så kallad stoppregel (eng. *stopping rule*) som avgör när processen ska avslutas. En deterministisk stoppregel kan konstrueras genom att kontinuerligt utvärdera den betingade risken i varje steg. Regeln innebär i praktiken att aktören jämför sannolikheten för ett kritiskt misslyckande vid nästa drag med en fördefinierad maximal smärtgräns, en risktröskel. Processen tillåts fortsätta om och endast om den betingade risken understiger denna tröskel.

### 3.1.3 Kappsäcksproblemet

Kappsäcksproblemet (eng. *the knapsack problem*) är ett välkänt problem inom kombinatorisk optimering och bygger på att det finns en kappsäck som ska fyllas med olika objekt från en given mängd. Varje objekt  $i$  har en specifik vikt  $w_i$  och ett värde  $v_i$ . Målet är att packa kappsäcken så att den innehåller objekt med så högt totalt värde som möjligt, under bivillkoret att objektens vikt inte överskrider kappsäckens förutbestämda tillåtna maxvikt  $W$  [3].

I det mest grundläggande problemet, *0-1-kappsäcksproblemet*, antas det att det endast finns ett exemplar av varje objekt och att det antingen väljs att tas med eller inte. En mer komplex utvidgning av detta är det begränsade kappsäcksproblemet (eng. *bounded knapsack problem*) där det tillåts att flera kopior av samma objekt får packas i kappsäcken, upp till en fördefinierad övre gräns.

Låt  $x_i$  beteckna antalet valda kopior av objekt  $i$ , och låt  $c$  vara det maximala antalet kopior av objekten  $i$ . Det begränsade kappsäcksproblemet kan då formuleras matematiskt som följande maximeringsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Maximera} \quad & \sum_{i=1}^n v_i x_i \\ \text{med bivillkoren:} \quad & \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W \\ & x_i \in \{0, 1, 2, \dots, c_i\} \quad \text{för } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Det förändrar problemet eftersom det nu finns betydligt fler kombinationer jämfört med 0-1-fallet, eftersom Lösningssrummet växer och beslutsvägar att packa kappsäcken på ökar markant.

För att finna den teoretiskt optimala lösningen till kappsäcksproblem tillämpas exakta metoder såsom dynamisk programmering. Algoritmen itererar över objekten och beräknar systematiskt det maximala värdet för varje kombination i kappsäcken. Det maximala värdet används för att med baklängesuträkningar avgöra vilka föremål som packades.

Att få fram den bästa kombinationen att packa kappsäcken på blir snabbt beräkningstungt ju fler objekt som ingår i systemet. Därför finns det andra tumregler som kan användas för att hitta bra strategier. En är giriga algoritmer (eng. *greedy algorithms*) som prioriterar objekt med enskild hög nytta, men som inte nödvändigtvis resulterar i den högsta totala nyttan.

### 3.1.4 Utspädningseffekt genom populationsökning

Om vi studerar en Bernoullifördelad slumpvariabel  $X \sim \text{Be}(p)$ , så är  $p$  sannolikheten att dra ett element med en viss egenskap, och beräknas som  $p = \frac{m}{n}$ , där  $m$  är antalet kritiska element och  $n$  är den totala populationen. Detta är även fördelningens väntevärde. För att minska risken att dra ett element med den kritiska egenskapen i ett system med dragning utan återläggning, det vill säga upprepade Bernoulli-fördelade dragningar med minskad population, kan en utspädningseffekt tillämpas. Sannolikheten att dra ett kritiskt element minskar om populationen ökar samtidigt som antalet kritiska element förblir konstant.

### 3.1.5 Tidsvärde via baklängesinduktion

Värdet på en resurs är beroende av när i en processen som den införskaffas. En resurs som köps tidigt har ett högre förväntat värde eftersom den hinner användas flera gånger innan slutet på processen. Om den i stället införskaffas nära systemslutet är sannolikheten låg att den hinner utnyttjas, och värdet på resursen är därmed lågt.

Via baklängesinduktion (eng. *backward induction*) går det att stegvis baktill från beräkna vad som avger bäst nytta i varje steg [4]. Metoden kan därmed visa att en strategi fungerar bättre än en annan fram till och med en viss gräns. Den brytpunkten kan beräknas och användas för att ha som tillfälle att växla strategival i ett system.

### 3.1.6 Stegvis optimering

I komplexa system tillämpas ofta stegvis optimering (eng. *stepwise optimization*) för att hantera beslutsprocesser som förändras över tid. Metoden innebär att man sekventiellt optimerar sitt val i varje steg och bygger nästa optimerade val på tidigare val i systemet. Stegvis optimering används för att det inte är lika beräkningstungt jämfört med att söka en global, optimal lösning i ett stort system [4].

## 3.2 Stokastisk simulering och Monte Carlo-estimering

För att undersöka resultat som är för komplicerade att beräkna analytiskt används stokastiska simuleringar. Genom att upprepa ett experiment ett stort antal gånger kan man estimerar det systemets förväntade värde. Stora talens lag är grunden till Monte Carlo-estimatoren. Låt  $X_1, X_2, \dots, X_n$  vara oberoende likafördelade slumpvariabler. Populationens aritmetiska medelvärde beräknas  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  och konvergerar mot den sanna fördelningens väntevärde  $\mu$  ju fler försök som görs. Satsen formuleras sådan att sannolikheten att skillnaden mellan medelvärdet och väntevärdet är större än ett godtyckligt tal  $\varepsilon$  går mot noll

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0.$$

Inom simuleringsmetodik kallas detta medelvärde för en Monte Carlo-estimator och betecknas ofta  $\hat{\mu}_{MC}$  [1]. För många oberoende simuleringar är skattningen väntevärdesriktig och kan fås fram, även när det är svårt att beräkna analytiskt.

## 4 Modellering

I detta kapitel beskrivs den statistiska modellen som ligger till grund för simuleringarna.

### 4.1 Förenklingar

För att kunna isolera och analysera de strategiska valen har modellen förklats i förhållande till spelets fullständiga regelverk. Nedan listas de moment som exkluderas; terminologin i detta avsnitt riktar sig främst till läsare med kännedom om spelets specifika mekanismer:

- **Interaktioner:** Råttsvansar, droppen, bonusar och moment som beror på en motståndares prestationer.
- **Specialeffekter:** Alla färgade marker antas vara utan specialeffekter utöver sitt siffervärde. Detta för att undvika brus från externa variabler vid optimering av strategier.
- **Externa slumpmoment:** Spådomskort och flaskan.
- **Manuella val:** Vid explosion automatiseras valet mellan segerpoäng och köp. Modellen prioriterar köpfasen fram till och med omgång sex, varefter segerpoäng prioriteras, baserat på tidsvärdet av resurser (se avsnitt 3.1.5).

### 4.2 Matematisk representation av spelet

Vi börjar med att definiera hur de olika markerna i spelet representeras. Påsens innehåll definieras som en multimängd, det vill säga en mängd där objekt kan förekomma mer än en gång.

#### Marker och notation

Då studien begränsas till att analysera en enskild färg på markerna, utöver de vita, definieras markerna enligt följande:

- $v_i$ : En vit mark med siffervärde  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
- $f_i$ : En färgad mark med siffervärde  $i \in \{1, 2, 4\}$ .

Utifrån spelreglerna som presenterades i kapitel 2 kan startpåsen  $S$  representeras av multimängden:

$$S = \{v_1, v_1, v_1, v_1, v_2, v_2, v_3, f_1, f_1\}.$$

#### Position och poängberäkning

Låt  $P$  vara variabeln som beskriver belöningsrutan på spelplanen. Enligt reglerna definieras denna som rutan direkt efter den sista placerade marken.

Det numrerade spåret börjar med ett och därmed fås startvärdet  $P = 1$ . För varje placerad mark med siffervärde  $i$  uppdateras belöningsrutan enligt:

$$P_{n+1} = P_n + i.$$

Efter avslutad dragningsfas erhålls rundans belöning baserat på rundans slutposition  $P$ . Köppoängen (kapitalet) motsvarar värdet på  $P$ , medan segerpoängen erhålls enligt följande formel:

$$\text{segerpoäng} = \left\lfloor \frac{P}{4} \right\rfloor.$$

Efter spelets sista runda (nionde rundan) konverterar erhållna köppoäng till segerpoäng enligt detta samband:

$$\text{segerpoäng} = \left\lfloor \frac{\text{köppoäng}}{5} \right\rfloor.$$

### 4.3 Beräkning av explosionsrisk

När marker dras ur påsen ändras andelen vita marker i påsen. Endast de vita markernas siffersumma avgör om en explosion kommer att ske eller ej och en explosion inträffar när siffersumman av de dragna vita markerna är strikt större än sju.

Eftersom man inte vet i början av en omgång hur många marker som kommer att dras beräknas risken på nytt inför varje enskild dragning. Modellen undersöker hur många av de kvarvarande vita markerna i påsen som skulle orsaka en explosion om de drogs. Sannolikheten för en explosion vid ytterligare en dragning beräknas enligt:

$$P(\text{explosion}) = \frac{\text{antalet vita marker som orsakar explosion}}{\text{totala antalet marker i påsen}}.$$

Det finns sex unika kombinationer av vita marker som orsakar en explosion. Dessa kombinationer redovisas i Tabell 1.

Tabell 1: Unika kombinationer av vita marker som resulterar i en explosion.

| Antal $v_1$ | Antal $v_2$ | Antal $v_3$ | Total summa |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 4           | 2           | 0           | 8           |
| 3           | 1           | 1           | 8           |
| 1           | 2           | 1           | 8           |
| 4           | 1           | 1           | 9           |
| 2           | 2           | 1           | 9           |
| 3           | 2           | 1           | 10          |

#### 4.4 Beslutsmodell och risktröskel ( $\alpha$ )

För att fastställa en statistiskt grundad stoppregel används en beslutsmodell som grundar sig i en risktröskel, som betecknas med parametern  $\alpha$ . Som beskrivits i avsnitt 4.3 beräknas sannolikheten för en explosion på nytt efter varje dragning. Därefter jämförs sannolikheten med parametern  $\alpha$  för att avgöra om dragningsprocessen ska fortsätta eller avbrytas. Beslutsregeln definieras enligt följande:

- Om  $P(\text{explosion}) \leq \alpha$ : Fortsätt dra ytterligare en mark.
- Om  $P(\text{explosion}) > \alpha$ : Avbryt dragningsfasen och stanna på nuvarande position.

Genom att variera  $\alpha \in [0, 1]$  kan modellen simulera allt från en spelare som inte tar någon risk ( $\alpha = 0$ ) till en riskbenägen spelare som tar maximal risk ( $\alpha = 1$ ).

#### 4.5 Köpstrategier

För att kunna besvara frågeställningen gällande skillnader i resultat beroende på vilken köpstrategi som används behöver vi nu definiera två olika köpstrategier. Det görs med hjälp av avsnitt 3.1.3 och 3.1.4. Först definierar vi priserna för de färgade markerna.

Tabell 2: Priserna för nya färgade marker i valutan köppoäng.

| Siffervärde på färgad mark | Pris (köppoäng) |
|----------------------------|-----------------|
| 1                          | 4               |
| 2                          | 10              |
| 4                          | 17              |

Enligt spelets regler är det tillåtet att köpa max två marker per runda under köpfasen. Hade förutsättningarna varit annorlunda och det hade varit tillåtet att köpa fler än två marker hade utspädningseffekten fungerat annorlunda. Detta eftersom köppoängen i många rundor hade räckt till fler än två färgade marker och det medför även att antalet kombinationer av marker för att hitta det mest optimala sättet att packa kappsäcken på hade ökat.

##### 4.5.1 Köpstrategi 1 (kvalitet)

Denna strategi bygger på en girig algoritm. Den börjar med att köpa den dyraste marken som köppoängen räcker till och därefter köper den återigen den dyraste marken som köppoängen räcker till. Det medför att det finns en risk att den bara har råd med en mark och att det återstår oanvända köppoäng efter köpfasen.

### 4.5.2 Köpstrategi 2 (kvantitet)

Till skillnad från Kvalitetsstrategin prioriterar denna strategi att maximera antalet marker i påsen för att reducera risken för explosion. Om och endast om köppoängen räcker till att köpa två marker kommer kvantitetsstrategi att välja det, även om det innebär att det finns återstående köppoäng. Exempelvis om köppoängen motsvarar 10 kommer Kvalitetsstrategin att köpa  $f_2$  (pris 10), medan Kvantitetsstrategin väljer två  $f_1$  (pris  $4 + 4 = 8$ ) för att snabbare späda ut påsens innehåll.

## 4.6 Stokastisk simulering och parameteroptimering

Vi simulerar med Python 10 000 fullständiga spel per varje tröskelvärde i mängden

$$\alpha = \{0; 0,01; 0,02; \dots; 0,99; 1\}$$

Därefter beräknas medelvärdet på summan av totalvärdena för varje  $\alpha$ , vilket ger en uppskattning av det förväntade värdet av ett spel för respektive stoppregel. Detta görs för båda köpstrategierna för att identifiera vilken kombination av risktröskel och strategi som genererar mest totala segerpoäng.

### Analys av specifika omgångar

För att undersöka köpstrategiernas effektivitet utförs en känslighetsanalys av de specifika omgångarna där investeringsvalen divergerar. Syftet är att isolera utfallen där köpstrategierna ställs mot varandra, och därför fixeras köppoängen till de kritiska poänggränsnivåerna: 10, 17 samt 20 poäng (gränsvalet motiveras i Tabell 3). Dessa nivåer representerar typiska poängutfall i de tidiga, mittersta respektive sista spelrundorna.

Därefter simuleras en omgång för att se hur de nyinköpta markerna presterar. För att simulera det så likt det verkliga spelet som möjligt simulerar vi spel med olika innehåll i påsen. Medan antalet vita marker i påsen hålls konstant (motsvarande startpåsen), varieras mängden färgade marker ( $f_1$ ) stegvis mellan 2 och 16. Detta representerar påsens utveckling från omgång ett till åtta. För varje konfiguration av påsen utförs 10 000 (alfa väljs till den risk som genererar högst slutpoäng i föregående test) simuleringar av två spelomgångar för att erhålla ett stabilt förväntat värde.

Tabell 3: Investeringar för köpstrategierna vid olika poängnivåer.

| Köppoäng      | Köpstrategi 1 (kvalitet) | Köpstrategi 2 (kvantitet) |
|---------------|--------------------------|---------------------------|
| $\leq 7$      | $f_1$                    | $f_1$                     |
| 8–9           | $f_1, f_1$               | $f_1, f_1$                |
| <b>10–13*</b> | $f_2$                    | $f_1, f_1$                |
| 14–16         | $f_2, f_1$               | $f_2, f_1$                |
| <b>17–19*</b> | $f_4$                    | $f_2, f_1$                |
| <b>20*</b>    | $f_4$                    | $f_2, f_2$                |
| $\geq 21$     | $f_4, f_4$               | $f_4, f_4$                |

\* Markörerna 10, 17 och 20 indikerar de lägsta poängnivåerna där strategierna divergerar i sina val.

### Stegvis optimering av dynamisk risk

Vidare undersöks effekten av att använda en dynamisk risktröskel, där  $\alpha$  representeras av en vektor  $\vec{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_9]$  i stället för en konstant variabel. Risken kan alltså variera mellan omgångarna. Detta simuleras som tidigare 10 000 gånger per risktröskel för att med stegvis optimering hitta vilken risk som är bäst att ta per omgång och strategi enligt följande process:

1.  $\alpha_2$  till  $\alpha_9$  fixeras till ett initialvärde (testar det som genererade högst förväntad avkastning per respektive köpstrategi i tidigare test samt 0 och 1).
2.  $\alpha_1$  itererar mellan 0 och 1 med steglängd 0.01 för att maximera slutpoängen.
3. Det optimerade värdet på  $\alpha_1$  fixeras, och processen upprepas för  $\alpha_2$  och så vidare för alla omgångar  $n \in \{1, \dots, 9\}$ .

På så sätt fås en vektor över optimala sannolikheter att sluta dra marker för varje omgång och för båda köpstrategierna.

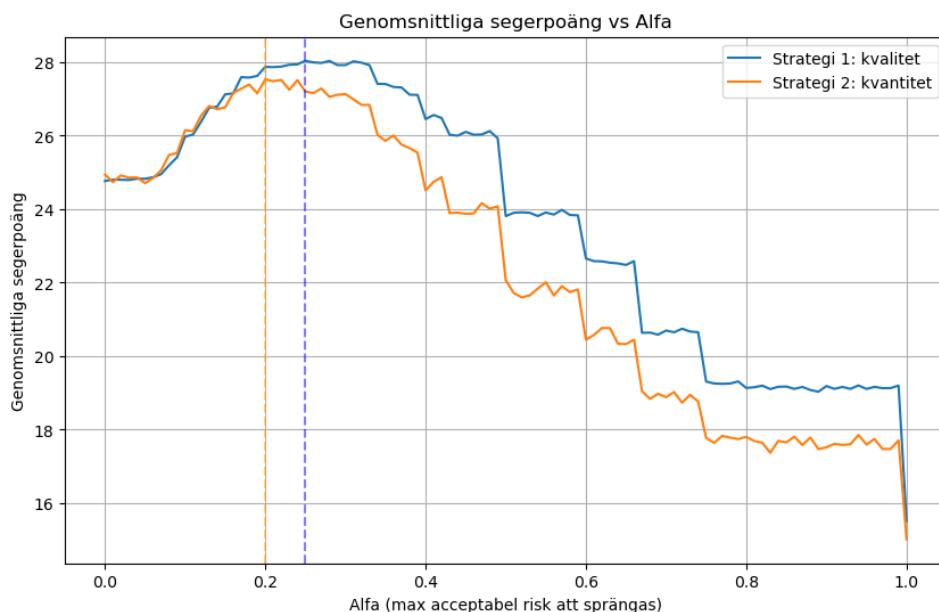
### Jämförelse mellan konstant risk och dynamisk risk

Slutligen jämförs resultatet av en optimerad, konstant risktröskel  $\alpha$  genom alla omgångar med resultatet av en stegvis optimerad, dynamisk risk  $\vec{\alpha}$  (bägg med den mest optimala köpstrategin enligt föregående test). Detta för att undersöka ifall det finns någon mätbar skillnad om man spelar med samma risk jämfört med om den tillåts variera.

## 5 Resultat

### 5.1 Konstant risktröskel ( $\alpha$ )

För ett konstant värde på risktröskeln  $\alpha$  erhöles dessa resultat för den förväntade slutpoängen vid test med bägge köpstrategierna.



Figur 2: Riskparametern  $\alpha$  varierar mellan 0 och 1 med en steglängd 0,01 och respektive Monte Carlo-estimatorer plottas för alla risknivåer för bägge köpstrategierna.

I Figur 2 observeras att köpstrategierna genererar likvärdiga slutpoäng vid låga risknivåer, med en ökning fram till  $\alpha \approx 0,2$  (Köpstrategi 2:s max). För Köpstrategi 1 ligger poängen därefter stabilt kring 28 fram tills  $\alpha \approx 0,3$ . För Köpstrategi 2 avtar dock poängen redan efter  $\alpha \approx 0,25$  (Köpstrategi 1:s max), varefter båda strategierna sjunker nästan linjärt ned till  $\alpha \approx 0,8$ . Poängen är nästan oförändrad fram till risker nära 1, men därefter dalar den för bägge köpstrategierna. Graferna visar ett snarlikt beteende, men med en konsekvent skillnad på cirka två poäng från  $\alpha = 0,3$  till ungefär  $\alpha = 0,95$ .

För att utvärdera effektiviteten hos de två köpstrategierna beräknas respektive medelvärde och standardavvikelse för slutpoängen baserat på 10 000 simuleringar vid de optimerade risktrösklarna  $\alpha = 0,25$  (Köpstrategi 1) och  $\alpha = 0,20$  (Köpstrategi 2). Resultatet presenteras i Tabell 4.

Tabell 4: Statistisk jämförelse mellan Köpstrategi 1 och Köpstrategi 2.

| Strategi      | Medelpoäng ( $\bar{X}$ ) | Standardavvikelse ( $s$ ) | $n$    |
|---------------|--------------------------|---------------------------|--------|
| 1 (Kvalitet)  | 28,00                    | 4,43                      | 10 000 |
| 2 (Kvantitet) | 27,58                    | 4,12                      | 10 000 |

Skillnaden i förväntade slutpoäng för köpstrategierna med deras respektive bästa konstanta risktröskel  $\alpha$  är 0,42 poäng. Att prioritera kvalitet över kvantitet genererade i snitt nästan ett halvt poäng mer än om man prioriterade kvantitet.

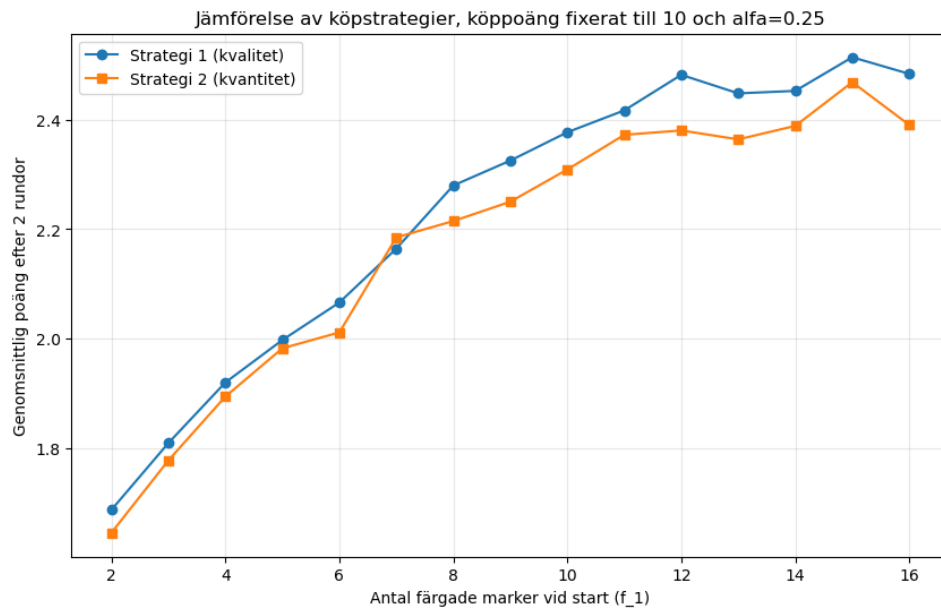
## 5.2 Analys av specifika omgångar

När vi fixerade köppoängen till gränsnivåerna, det vill säga där köpstrategierna började välja annorlunda, och simulerade en omgång med den optimerade risktröskeln  $\alpha = 0,25$  kunde vi jämföra köpstrategierna. Vi observerar att i alla tre fallen, det vill säga vid kapitalnivåerna 10, 17 och 20, genererade Köpstrategi 1 fler poäng för alla olika antal färgade marker med siffervärde ett ( $f_1$ ) förutom i enstaka fall (se Figur 3, Figur 4 och Figur 5).

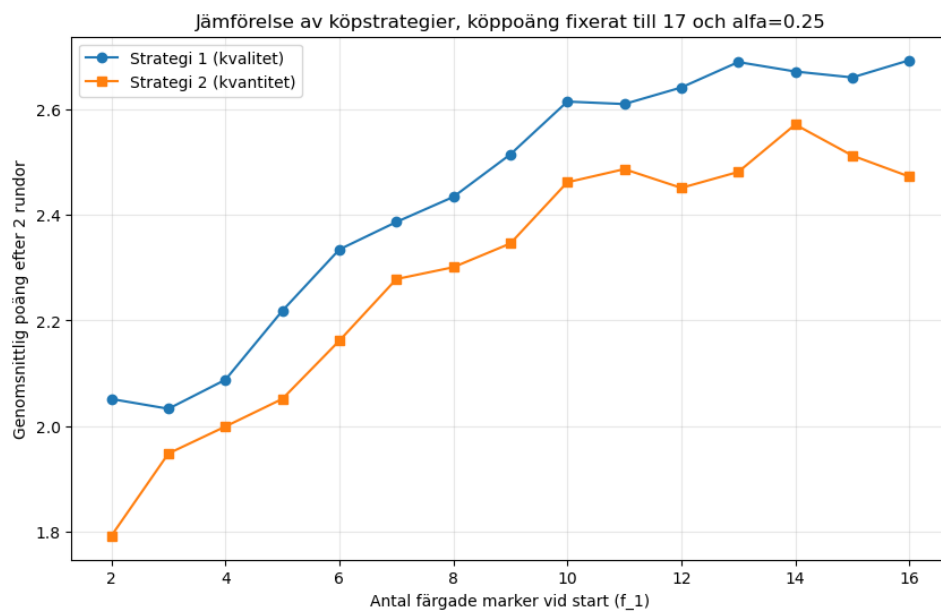
Då köppoängen fixerades till 10 presterade Köpstrategi 1 i genomsnitt 0,86 poäng bättre än Köpstrategi 2. I båda fallen när köppoängen sattes till 17 och 20 genererade Köpstrategi 1 i snitt 0,94 poäng mer. Resultaten redovisas i Tabell 5.

Tabell 5: Sammanställning av statistisk jämförelse vid specifika köppoäng.

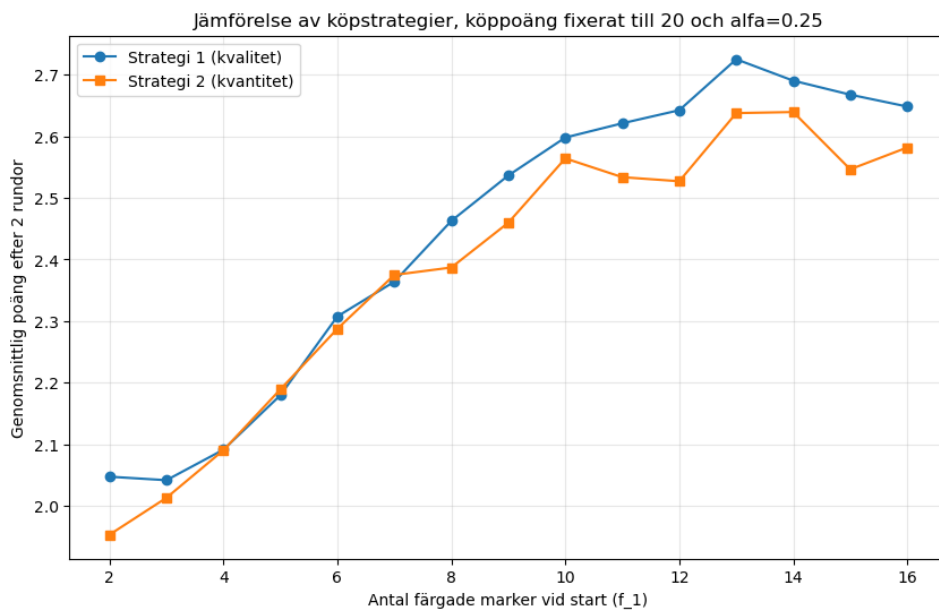
| Köppoäng | Strategi 1 (Kvalitet) |                  | Strategi 2 (Kvantitet) |                  |
|----------|-----------------------|------------------|------------------------|------------------|
|          | Medel ( $\bar{X}$ )   | Std.avv. ( $s$ ) | Medel ( $\bar{X}$ )    | Std.avv. ( $s$ ) |
| 10       | 1,68                  | 0,84             | 1,64                   | 0,84             |
| 17       | 2,04                  | 1,10             | 1,80                   | 0,98             |
| 20       | 2,04                  | 1,10             | 1,95                   | 1,06             |



Figur 3: Resultat vid 10 köppoäng.



Figur 4: Resultat vid 17 köppoäng.



Figur 5: Resultat vid 20 köppoäng.

### 5.3 Stegvis optimerade risktrösklar

När riskparametern i stället undersöks som en vektor, det vill säga när  $\alpha$  inte nödvändigtvis är konstant, fås resultatet som visas i Tabell 6.

Tabell 6: Optimala risktrösklar (med initalvärden  $\alpha = 0.25$  och  $\alpha = 0.20$ ) per runda baserat på stegvis optimering.

| Runda                     | Köpstrategi 1 (kvalitet) | Köpstrategi 2 (kvantitet) |
|---------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1                         | 0,30                     | 0,44                      |
| 2                         | 0,17                     | 0,19                      |
| 3                         | 0,33                     | 0,26                      |
| 4                         | 0,23                     | 0,18                      |
| 5                         | 0,22                     | 0,15                      |
| 6                         | 0,15                     | 0,12                      |
| 7                         | 0,32                     | 0,37                      |
| 8                         | 0,39                     | 0,48                      |
| 9                         | 0,19                     | 0,22                      |
| Medelpoäng ( $\bar{X}$ )  | 28,48                    | 28,11                     |
| Standardavvikelse ( $s$ ) | 4,07                     | 3,71                      |

De stegvis optimerade riskerna varierade per omgång och strategi. Båda strategierna hade högst risktolerans omgång åtta och tog en hög risk första omgången. Köpstrategi 1 gav en högre slutpoäng med ett snitt på 0,37 poäng

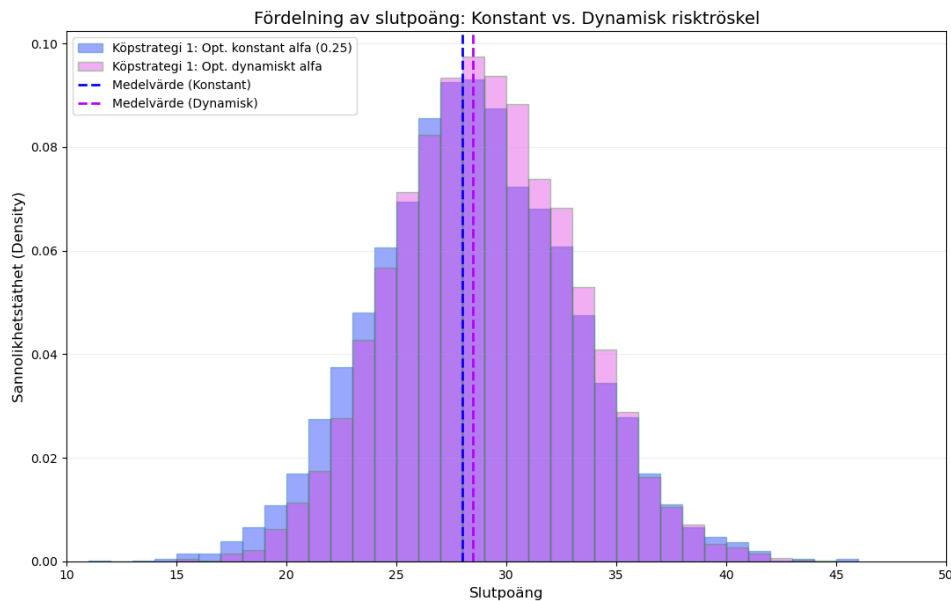
mer än vad köpstrategi 2 genererade med sin optimerade vektor  $\vec{\alpha}$ . Även testen med initialvärdena 0 och 1 resulterade i att Köpstrategi 1 presterade bättre med 0,22 respektive 0,24 poäng, för detaljer se Tabell 8 respektive Tabell 9 i Appendix.

## 5.4 Slutgiltig jämförelse

Den förväntade slutpoängen för den optimerade risktröskeln  $\alpha = 0.25$  (Köpstrategi 1) jämfördes med den förväntade slutpoängen för den optimerade vektorn  $\vec{\alpha} = [0.30, 0.17, 0.33, 0.23, 0.22, 0.15, 0.32, 0.39, 0.19]$  (Köpstrategi 1).

Tabell 7: Statistisk jämförelse mellan Köpstrategi 1 med olika  $\alpha$ .

| Strategi                       | Medelpoäng ( $\bar{X}$ ) | Standardavvikelse ( $s$ ) |
|--------------------------------|--------------------------|---------------------------|
| Kvalitet (opt. konstant alfa)  | 28,00                    | 4,43                      |
| Kvalitet (opt. dynamiskt alfa) | 28,48                    | 4,07                      |



Figur 6: Histogram som visar sannolikhetstätheterna för 10 000 spel med konstant risk samt dynamisk risk, båda med Köpstrategi 1.

Vi observerar att simuleringarna genererade slutpoäng mellan 11 och 45 segerpoäng. Den förväntade slutpoängen är 0,48 poäng bättre för den stegvis optimerade dynamiska risken än den optimerade konstanta risknivån  $\alpha$ .

## 6 Diskussion

I detta kapitel analyseras resultaten i syfte att utvärdera de olika risktrösklarna samt att avgöra vilken av Köpstrategierna 1 (kvalitet) och 2 (kvantitet) som är effektivast.

### 6.1 Konstant risk $\alpha$ och utspädningseffekten

Vid optimering av den konstanta risktröskeln  $\alpha$  observeras att båda köpstrategierna genererar likvärdiga förväntade slutpoäng för risknivåer upp till  $\alpha = 0,2$ . Detta förklaras av att en låg risktolerans tvingar spelaren att avbryta dragningsfasen tidigt, vilket resulterar i att kapitalet (köppoängen) inte hinner byggas upp. Följaktligen når spelaren ofta inte över den första kritiska poängnivån 10, vilket innebär att i tidiga rundor hinner modellen inte separera köpstrategierna (se Tabell 3).

Vidare när risktoleransen överstiger  $\alpha = 0,2$  presterar Köpstrategi 1 konsekvent bättre. Vid en första anblick kan det framstå som att Köpstrategi 2 borde ge en bättre utspädningseffekt eftersom den satsar på att fylla ut påsens innehåll med två nya marker. Isoleras ett enskilt drag stämmer det att risken är lägre om det finns en större andel icke-vita marker i påsen. Observeras däremot dragningsfasen som en helhet, kräver Köpstrategi 2 ett större antal dragningar för att nå samma belöningsruta på spelplanen. Fler dragningar implicerar fler riskfyllda beslut. Köpstrategi 1 är effektivare då den investerar i högre siffervärden, vilket leder till längre förflyttningar på spelplanen. Detta minimerar den ackumulerade risken. Simuleringarna bekräftar detta då kombinationen av den konstanta risktröskeln  $\alpha = 0,25$  och Köpstrategi 1 visade sig vara dominant och generera i snitt 0,42 poäng mer.

### 6.2 Köpstrategiernas effektivitet och resursallokering

Hela dragningsfasen består av sekventiella beslut där spelaren väger risken för explosion mot den förväntade marginalnyttan av att fortsätta. På grund av att Köpstrategi 1 systematiskt prioriterar att investera i marker med höga siffervärden, maximeras den förväntade belöningen av varje enskild lyckad dragning. När spelaren sedan står vid ett stoppbeslut skulle en rationell spelare anse det väga tyngre att fortsätta dra om påsens innehåll består av marker med högre siffervärde. Köpstrategi 1 genererar därmed högre marginalnytta och simuleringarna från testet av ”specifika omgångar” visar dessutom att oavsett hur många färgade marker med siffervärde ett som finns i påsen dominerar Köpstrategi 1.

Med det sagt så begränsas dock Köpstrategi 2. Kappsäcksproblemet påverkas av begränsningen ”max två marker per köpfas”. Köpstrategi 2 (kvantitet) hade gynnats mer om det var tillåtet att köpa flera marker än två eftersom

det då hade gått att späda ut påsens innehåll från vita marker mer. Till exempel om 20 köppoäng erhålls i en omgång, då väljer Köpstrategi 2 att köpa  $\{f_2, f_2\}$  men om det i stället hade varit tillåtet att köpa fem färgade marker med siffervärde ett  $f_1$  hade påsen snabbt fyllts ut med icke-vita marker. Det totala inhandlade siffervärdet hade i detta exempel även ökat från fyra till fem, vilket också påverkar hur långt fram på spelplanen en spelare kan ta sig i kommande rundor.

### 6.3 Dynamisk risk $\bar{\alpha}$ och tidsvärde

Vid test av en dynamisk risktröskel som tillåts variera mellan spelets nio omgångar ser alla riskvektorer likartade ut. Modellen är så pass robust att initialvärdet knappt förändrar resultatet på vektorn. Det gemensamma beteendet för omgångarna ett, åtta och nio är anmärkningsvärt och tolkas mer i detalj nedan.

Anledningen till att modellen tar en relativt hög risk i början  $\alpha \approx 0,30$  är eftersom den förväntade nyttan som erhålls av att dra fler marker är högre än om dragningsfasen avslutas. Om det skulle ske en explosion mister spelaren inte många segerpoäng, eftersom det i tidiga skeden i spelet inte brukar erhållas mer än ett till tre segerpoäng per omgång. Nyttan är hög på grund av att en mark som införskaffas redan i tidiga omgångar sannolikt kommer att dras under flera kommande rundor jämfört med en mark som köps senare då påsens innehåll dessutom har växt, vilket minskar sannolikheten ännu mer.

Omgång åtta har högst risktröskel för de optimerade framtagna initialvärden samt extremvärdena 0 och 1. Detta förklaras som sagt av att nyinköpta marker i omgång åtta troligtvis inte lär dras under omgång nio. Det innebär att det kan vara mer gynnsamt att fortsätta dragningsprocessen och vid explosion prioritera att få segerpoäng framför köppoäng. Köppoäng som används på marker som inte dras skulle kunna ses som bortslösade köppoäng, därmed är det bättre att ta en högre risk i näst sista och eventuellt även redan i sjunde omgången. Värt att nämna är dock att i spelet finns frestelsen att ändå vilja använda köppoängen i senare omgångar eftersom det oftast är först då som möjlighet fås att kunna köpa dyrare marker.

Att risknivån sedan sjunker till sista omgången beror på att det är sista möjligheten att få poäng. Eftersom segerpoäng erhålls på två sätt; genom att komma långt på spelplanen och erhålla segerpoäng som vanligt samt att komma långt och konvertera köppoäng till segerpoäng. Båda sätten bygger på att spelaren kommer så långt fram på spelplanen som möjligt. Om en explosion inträffar nu, förloras hårt intjänade poäng som förmodligen skulle kunna vara avgörande för ifall vinst mot en annan spelare skulle ske eller ej. Växelkursen att köpa segerpoäng för köppoäng sista omgången definieras som 5:1 i reglerna i kapitel 2. Det är ett relativt stort hopp på spelplanen

med tanke på att majoriteten av markerna i påsen har siffervärdena ett och två. Att riskera att förlora köppoängen (som har en dyrare kurs än hur segerpoängen definierades) är ofta inte värt ett eventuellt extra segerpoäng som skulle tillkomma vid ytterligare en dragning. I sista omgången finns det fler marker i påsen och därför förväntas man komma längre på spelplanen och därmed även tjäna fler segerpoäng samt köppoäng. Spelaren har därmed inte råd att låta en explosion ske i sista omgången och spelar bäst med en lägre risktolerans.

Slutsatsen är att Köpstrategi 1 i kombination med en stegvis optimerad risktröskel  $\bar{\alpha}$ , där initialrisken var  $\alpha = 0,25$  (den optimerade konstanta risktoleransen), genererade den högsta förväntade slutpoängen.

## 6.4 Modellens begränsningar och framtida forskning

Trots att simuleringarna visar på statistiska trender finns det begränsningar i den valda beslutsmodellen. Framtida forskning skulle kunna utföras för att undersöka flera exkluderade moment. I denna studie begränsade vi oss till att undersöka spelet utifrån en spelare. Det innebär att flera komponenter som bonusar, hjälp om man ligger långt bak poängmässigt jämfört med andra samt den psykologiska stressen vid jämförelse av hur långt andra kommit, har ej inkluderats i modellen. Att simulera ur ett mer spelteoretiskt perspektiv där man till exempel inte vet hur andra spelare spelar hade varit intressant att undersöka då det mer hade liknat det riktiga spelet.

Ett ytterligare moment som exkluderats var specialeffekterna hos de olikfärgade markerna. Att inkludera detta hade gjort spelet mer komplext eftersom det hade funnits många fler kombinationer att packa kappsäcken på. Dessutom hade priserna på markerna redan varit definierade. Eftersom vi endast begränsade oss till en färg behövde kostnaderna för markerna definieras utifrån ett ungefärligt medelvärde från originalspelets regler. Det finns en risk för att hoppen mellan priserna på markerna som kunde inhandlas var för höga, vilket medförde att skillnaden på köpstrategierna inte var så stor. Det skiljer sig bara på totalt åtta ställen, då köppoängen är 10–13 och 17–20 (se Tabell 3).

Beslutsmodellen antog att efter omgång sex är brytpunkten för när spelaren väljer att erhålla segerpoäng eller spendera rundans erhållna köppoäng. Att undersöka noggrannare för vilken omgång som är optimal att ha brytpunkten vid eller eventuellt om det hade varit mer optimalt att variera mer mellan omgångarna hade varit en intressant framtida undersökning.

Slutligen, hade det även varit givande att undersöka skillnaden i resultat ifall en baklänges stegvis optimering hade utförts för att finna en eventuellt ännu bättre risktolerans som genererar ännu högre förväntad slutpoäng.

## Appendix

### Kompletterande resultat för extrema initial-risktrösklar

Nedan redovisas tabellerna för de stegvis optimerade risktrösklarna när initialvärdet för  $\bar{\alpha}$  sattes till extremfallen 0 och 1.

Tabell 8: Optimala risktrösklar (med initialvärden  $\alpha_1 = \dots = \alpha_9 = 1$ ) per runda baserat på stegvis optimering.

| Runda                     | Köpstrategi 1 (kvalitet) | Köpstrategi 2 (kvantitet) |
|---------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1                         | 0,28                     | 0,26                      |
| 2                         | 0,17                     | 0,19                      |
| 3                         | 0,14                     | 0,14                      |
| 4                         | 0,24                     | 0,19                      |
| 5                         | 0,21                     | 0,19                      |
| 6                         | 0,16                     | 0,10                      |
| 7                         | 0,41                     | 0,42                      |
| 8                         | 0,57                     | 0,43                      |
| 9                         | 0,24                     | 0,17                      |
| Medelpoäng ( $\bar{X}$ )  | 28,47                    | 28,23                     |
| Standardavvikelse ( $s$ ) | 3,91                     | 3,52                      |

Tabell 9: Optimala risktrösklar (med initialvärde  $\alpha_1 = \dots = \alpha_9 = 0$ ) per runda baserat på stegvis optimering.

| Runda                     | Köpstrategi 1 (kvalitet) | Köpstrategi 2 (kvantitet) |
|---------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1                         | 0,29                     | 0,30                      |
| 2                         | 0,19                     | 0,19                      |
| 3                         | 0,14                     | 0,13                      |
| 4                         | 0,18                     | 0,19                      |
| 5                         | 0,13                     | 0,13                      |
| 6                         | 0,19                     | 0,12                      |
| 7                         | 0,31                     | 0,45                      |
| 8                         | 0,55                     | 0,70                      |
| 9                         | 0,24                     | 0,22                      |
| Medelpoäng ( $\bar{X}$ )  | 28,40                    | 28,18                     |
| Standardavvikelse ( $s$ ) | 3,87                     | 3,45                      |

Dessa tabeller följer samma mönster som den med optimerade initialrisker. Första omgången startar med en relativt hög risk, sjunker i omgångarna två till sex för att sedan öka kraftigt i omgång sju och nå sitt maximum i omgång åtta. Slutligen sjunker risktoleransen i sista omgången.

## Referenser

- [1] Blom, G., Enger, J., Englund, G., Grandell, J., & Holst, L. (2017). *Sannolikhhetsteori och statistikteori med tillämpningar*. Studentlitteratur.
- [2] Ferguson, T. S. (2007). *Optimal Stopping and Applications*. University of California.
- [3] Kellerer, H., Pferschy, U., & Pisinger, D. (2004). *Knapsack Problems*. Springer Berlin, Heidelberg.
- [4] Osborne, M. J. (2004). *An Introduction to Game Theory*. Oxford University Press.
- [5] Varian, H. R. (2014). *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*. W.W. Norton & Company.
- [6] Warsch, W. (2024). *The Quacks of Quedlinburg: Game Instructions*. Schmidt Spiele GmbH. [https://www.schmidtspiele.de/files/Retail/72dpi\\_PNG/88220\\_Quack\\_rules\\_english\\_2024.pdf](https://www.schmidtspiele.de/files/Retail/72dpi_PNG/88220_Quack_rules_english_2024.pdf) (Hämtad: 2026-04-10)