Stockholms universitet

Cat bonds som försäkring vid tropiska cykloner

Manne Norman

Masteruppsats i försäkringsmatematik
Master Thesis in Actuarial Mathematics

Masteruppsats 2019:10
Försäkringsmatematik
September 2019

www.math.su.se

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm

Matematisk statistik
Stockholms universitet
Masteruppsats **2019:10**
http://www.math.su.se/matstat

Cat bonds som försäkring vid tropiska cykloner

Manne Norman*

September 2019

Sammanfattning

Till följd av en global trend med ökande kostnader från naturkatastrofer så har så kallade cat bonds, obligationer vars värde är beroende av inträffandet av katastrofer, uppstått som ett verktyg att överföra katastrofrisk till finansmarknaden. För försäkringsgivare i områden med relativt hög katastrofrisk kan dessa obligationer fungera som ett alternativ till traditionell återförsäkring. Puerto Rico är under risk att träffas av tropiska cykloner och i det här arbetet undersöker vi möjliga effekter av om Puerto Rico skulle ge ut cat bonds för att finansiera återuppbyggnad av infrastruktur som skadas i samband med tropiska cykloner. Vi föreslår en modell för att beräkna risken att Puerto Rico påverkas av tropiska cykloner och kombinerar sedan denna med en modell av finansmarknaden för att kunna prissätta cat bonds. Vi tar fram priser på ett antal olika cat bonds där skillnader i deras utformning gör det tydligt hur denna typ av värdepapper kan användas för att konstruera försäkringsskydd som är väl anpassade till den aktuella risken.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige. E-post:manne.norman@gmail.com. Handledare: Filip Lindskog.

Abstract

In the past dacades, the damages and insured losses caused by natural disasters has increased rapidly on a global scale. Catastrophe risk bonds (cat bonds), bonds where the payouts are linked to catastrophic events, was introduced in the early nineties as a means of transferring catastrophe risk to the capital markets. For insurers in catastrophe prone areas, cat bonds can function as an alternative to traditional reinsurance. In this project, we examine possible effects if Puerto Rico's government would sponsor cat bonds to finance reconstruction of infrastructure in the wake of tropical cyclones. We propose a model for calculating the risk of Puerto Rico being hit by tropical cyclones and combine this model with a model of the financial markets in order to price the cat bonds. We price several cat bonds, where their difference in design makes it clear how this type of asset may be used to construct layers of cover well adopted to the current risk.

Förord

Jag vill rikta ett stort tack till min handledare Filip Lindskog för hans värdefulla vägledning, feedback och hjälp genom arbetets gång.

Innehåll

1 Inledning **6**

2 Försäkringsskydd mot naturkatastrofer **8**
2.1 Återförsäkring . . . 9
2.2 Cat bonds . . . 10

3 Frågeställning **12**

4 Metodbeskrivning **13**

5 Modeller för tropiska cykloner **14**
5.1 Orkansäsongen . . . 15
5.2 Klimatfenomen att ta hänsyn till . . . 15
5.2.1 El Niño Southern Oscillation . . . 15
5.2.2 Atlantic Multidecadal Oscillation . . . 16
5.3 Risken att Puerto Rico träffas av tropiska cykloner . . . 17
5.3.1 En utökning av datamaterialet . . . 20
5.3.2 Skattning av effekterna från ENSO och AMO . . . 21
5.3.3 Skattning av sannolikheten $p_{träff}$ . . . 23
5.4 Analys av vindstyrkan för tropiska cykloner . . . 24
5.5 Vindstyrkans fördelning; tropiska cykloner som träffar Puerto Rico . . . 26
5.5.1 Extremvärdesteori och generaliserad paretofördelning . . . 30
5.6 Modellering av ENSO och AMO . . . 37

6 Prissättning av cat bonds **38**
6.1 En inkomplett marknad . . . 39
6.2 Prissättning i en nyttomaximerande marknad . . . 41
6.3 En modell för prissättning av cat bonds . . . 43

7 Resultat **46**
7.1 Cat bond 1 . . . 47
7.2 Cat bond 2 . . . 48
7.3 Cat bond 3 . . . 50
7.4 Cat bond 4 . . . 50

8 Diskussion **52**

Referenser **55**

1 Inledning

I det här arbetet kommer vi att gå igenom vilka komplikationer som kan uppstå för försäkringsgivare då försäkringsbestånden är under risk att utsättas för naturkatastrofer. Vi ser på verktyg utöver traditionell återförsäkring som försäkringsbolag, men också stater kan använda sig av för att hantera risken med naturkatastrofer. Speciellt så tar vi fram och prissätter olika hypotetiska lager av försäkring mot tropiska cykloner för Puerto Rico. Valet av område för vårt räkneexempel grundar sig i att Puerto Rico, på grund av sin geografiska position, löper stor risk att utsättas för tropiska cykloner. Att Puerto Rico under 2017 träffades av en kraftig orkan med många dödsfall och enorma materiella skador som följd gör frågan om hur man ska skydda sig mot framtida katastrofer än mer aktuell. Dock så är målsättningen att de riskmodeller vi använder i det här arbetet ska vara så generella att de lätt ska kunna anpassas till andra områden utsatta för tropiska cykloner.

Genom det här arbetet kommer vi att använda termen *tropisk cyklon* som samlingsnamn för kraftiga lågtryck som bildas över tropiska vatten. De tropiska cyklonerna kan sedan delas in i olika kategorier beroende på lågtryckets vindstyrka, där det som anges är den maximala medelvinden under en minut. En tropisk cyklon med vindstyrka under 34 knop kallas tropiskt lågtryck, mellan 34 och 63 knop kallas det för en tropisk storm och om vindstyrkan överstiger 63 knop så kallas det (i det geografiska området som vi är intresserade av) för en orkan. Orkanerna i sin tur klassas mellan kategori 1 och kategori 5 beroende på vindstyrka enligt Saffir-Simpsonskalan, se Tabell 1.

Saffir-Simpsonskalan	
Kategori	Vindstyrka (knop)
5	$\geq$ 137
4	113-136
3	96-112
2	83-95
1	64-82

Tabell 1: Saffir-Simpsonskalan med vindstyrkor i knop.

Puerto Rico, det område som vi kommer koncentrera oss på genom det här arbetet, är ett självstyrande område men tillhör USA. Ön som ligger i mexikanska golfen räknas till Stora Antillerna har en yta på drygt 9000 kvadratkilometer (som en jämförelse är Gotlands yta omkring 3000 kvadratkilometer) och en folkmängd på omkring 3.2 miljoner.

Förutom risken för orkaner så är Puerto Rico, som är beläget på gränsen mellan den karibiska plattan och den nordamerikanska kontinentalplattan, också under risk att drabbas av kraftiga jordbävningar och efterföljande tsunamier. Dessa är inte så frekventa då den senaste förödande jordbävningen som drabbade Puerto Rico var för drygt hundra år sedan,

när ett skalv som uppmätte 7.5 på Richterskalan inträffade utanför Puerto Ricos kust. Dock så vittnar den katastrofala jordbävningen i det närbelägna Haiti 2010 om att risken för framtida skalv är något som myndigheter och försäkringsbolag i Puerto Rico måste ta hänsyn till. Beräkningarna av risken för jordbävningar respektive tropiska cykloner skiljer sig dock mycket åt varför vi inte kommer behandla jordbävningsrisk i det här arbetet. För Puerto Rico är också tropiska cykloner och bihändelser som är kopplade till dessa, så som översvämningar och jordskred till följd av de kraftiga regn som de tropiska cyklonerna ofta för med sig, ett långt mer frekvent och historiskt sett kostsamt problem.

För att få en uppfattning om omfattningen av de tropiska cyklonernas påverkan på Puerto Rico så visas i Tabell 2 en lista över tropiska cykloner som orsakat stor ekonomisk skada under tidsperioden 1988-2017. Vi kan se att skador på minst 5 miljoner dollar uppkommit av 16 tropiska cykloner de senaste 30 åren och värt att notera är att även några av de som passerat relativt långt från ön har orsakat stor skada. Medan vinden är som kraftigast och i regel endast orsakar förödelse nära stormens centrum så kan översvämningar och jordskred till följd av stora regnmängder orsaka omfattande skada hundratals kilometer därifrån. Även kraftiga vågor och så kallad stormflod, en till följd av kraftiga vindar förhöjning av havsnivån, hör till bihändelser som ofta behöver adderas för att få fram den totala kostnaden som en tropisk cyklon orsakar. Vi ser också att skadorna från olika tropiska cykloner varierar kraftigt och att kostnaderna från den senaste tropiska cyklonen som påverkade Puerto Rico vida överstiger summan av skadorna från samtliga övriga tropiska cykloner inom det här tidsspannet.

Den tropiska cyklonen Maria träffade Puerto Rico den 20 september 2017 med omkring 3000 direkta eller indirekta dödsfall och enorm ekonomisk skada som följd. Maria var, då den nådde Puerto Rico, en kategori 4-orkan på Saffir-Simpsonskalan och den kraftigaste tropiska cyklonen att träffa ön på nära 100 år. Marias skadeverkningar innebar också ett hårt slag för flera försäkringsgivare som verkar på ön. På grund av det höga antalet försäkringsfall så var det så sent som i oktober 2018, mer än ett år efter den tropiska cyklonen, fortfarande tusentals försäkringsanspråk som ännu inte hade behandlats och trots att alla försäkringsgivare nyttjade någon form av återförsäkring så blev förlusterna för företagen stora och en viktig försäkringsgivare, Real Legacy, tvingades i konkurs (Coto, 2018).

Orkanen Maria fick också stora konsekvenser för Puerto Ricos infrastruktur. Elnätet som redan innan orkanen träffade led av eftersatt underhåll slogs ut totalt och tre månader efter att orkanen träffade så hade endast omkring hälften av invånarna fått strömmen tillbaka (Robles & Bidgood, 2017). Som amerikanskt territorium så beviljades Puerto Rico både akut nödhjälp så som dricksvatten, mat och mediciner och hjälp med återuppbyggnad av infrastruktur samt finansiella medel från den amerikanska regeringen. Men omfattningen av denna hjälp var begränsad. Som exempel så beviljade senaten 2 miljarder dollar till återställning av kraftnätet jämfört med de 17 miljarder som Puerto Rico själva hade ansökt

År	Namn	Kostnad (milj US $)	Avstånd (miles)	Regnmängd (inches)	Uppmätt vind (kt)	Månad
1989	Hugo	1000	L	18	90	sep
1995	Luis	200	120	-	-	sep
1995	Marilyn	300	30	6	36	sep
1996	Bertha	7	50	2	42	jul
1996	Hortense	153	L	20	70	sep
1998	George	3776	L	25	100	okt
1999	Lenny	105	80	12	29	nov
2001	Dean	8	40	13	-	sep
2004	Jeanne	170	L	19	60	sep
2008	Kyle	48	250	30	-	sep
2010	Otto	8	250	17	-	okt
2011	Emily	5	170	8	-	aug
2011	Irene	500	L	20	60	aug
2015	Erika	17	30	4	36	aug
2017	Irma	1000	60	15	48	sep
2017	Maria	90000	L	38	135	sep

Tabell 2: Tropiska cykloner som påverkat Puerto Rico de senaste 30 åren. I kolumnen Avstånd så betecknar "L" landfall, att den tropiska cyklonen träffade Puerto Rico. Några av de tropiska cyklonerna passerade på så långt avstånd att vindstyrkan varit oproblematisk och därför inte dokumenterats. Regnmängden betecknar den maximala regnmängden som uppmätts någonstans på ön i samband med att den tropiska cyklonen passerade. För orkanen Luis saknas tillförlitlig data om nederbörd. Källa: National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA).

om (Mazzei, 2018). Samtidigt hade Puerto Ricos regering endast avsatt 20 miljoner dollar till katastrofhjälp för 2017 (Mufson, 2017), en försvinnande liten summa i sammanhanget.

Vi avrundar det här avsnittet med att konstatera att alltmedan Puerto Ricos regering och försäkringsgivare försöker återhämta sig från orkanen Maria så finns all anledning för dem att samtidigt blicka framåt och säkerställa att de står väl rustade inför kommande tropiska cykloner.

2 Försäkringsskydd mot naturkatastrofer

Försäkringsgivare fyller en viktig roll i samhället genom att erbjuda skydd mot plötslig, oförutsägbar ekonomisk skada. Detta skydd är nödvändigt för att företagande effektivt ska kunna bedrivas såväl som för att skydda den enskilda individen. Genom att betala en relativt liten premie så kan företag och privatpersoner överföra den ekonomiska risken till försäkringsgivaren. För försäkringsgivaren kan denna risk effektivt hanteras givet att risken mellan olika försäkringstagare är oberoende och likafördelad. I detta fall konvergerar summan av kvoten mellan utbetalningarna och antalet försäkringstagare mot sitt väntevärde

när antalet försäkringstagare blir stort. Så om bara försäkringsgivaren har ett tillräckligt antal försäkringstagare så kan risken diversifieras och därmed kan en premie som inte är långt över den förväntade skadekostnaden täcka försäkringsrisken.

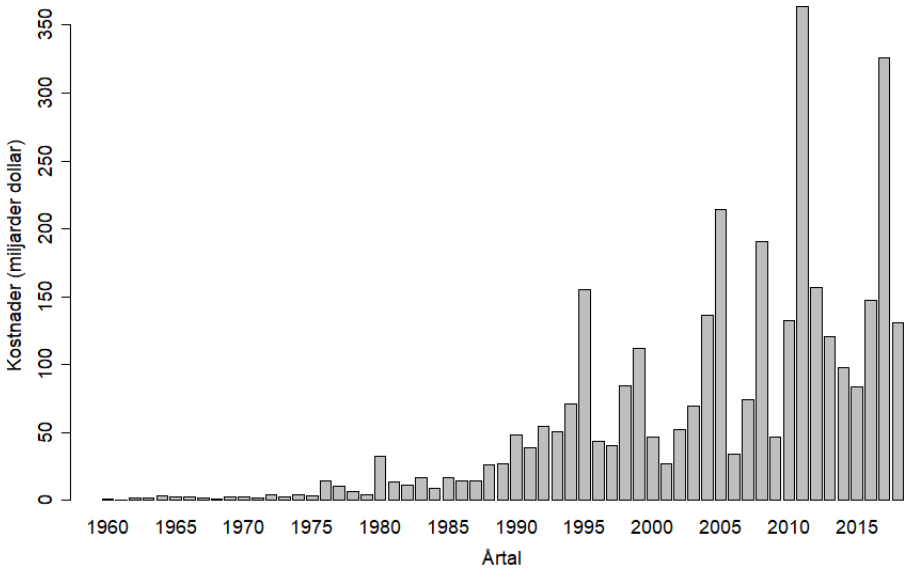
För naturkatastrofer så är antagandet om oberoende mellan försäkringskontrakt inte längre giltigt. Det är lätt att inse att sannolikheten att ditt hus kommer skadas av en jordbävning inte är oberoende av om din grannes hus skadas av jordbävning eller inte. När det kommer till tropiska cykloner så kan dessa orsaka ekonomisk skada över stora landområden vilket lätt blir problematiskt för försäkringsgivare då hela eller stora delar av deras bestånd kan drabbas simultant. Att naturkatastrofer i regel inte är lokalt diversifierbara är alltså intuitivt men det kan även formuleras mer formellt matematiskt, se till exempel Cosette, Duchense och Marceau (2003).

Att naturkatastrofer inte är lokalt diversifierbara är ett faktum som försäkringsgivare i drabbade områden länge varit tvungna att förhålla sig till. Något som gör försäkringsskydd mot naturkatastrofer aktuellt i dagsläget är den trend med ökande kostnader från naturkatastrofer som vi ser globalt. I Figur 1 redovisas de globala skadorna för naturkatastrofer sedan 1960 och vi kan där tydligt se att dessa har blivit mer kostsamma. Att så är fallet beror på en kombination av flertalet faktorer. Bland annat så kan befolkningsökning och en värdeökning av folks tillgångar tillskrivas en naturlig del av förklaringen. Detta ger givetvis försäkringsbolag en ökning av premieintäkter som bör stå i proportion med värdeökningen. Trots detta så kan det medföra svårigheter för försäkringsgivare att förbli solventa vid en allvarlig naturkatastrof. En annan faktor som över tid inverkat negativt på försäkringsgivares förmåga att möta katastrofer är den geografiska riskkoncentrationen till följd av urbanisering (Hoeppe, 2015). En kraftig jordbävning med epicentrum i en storstad riskerar idag att orsaka ekonomisk skada mångfalt den som samma jordbävning skulle orsakat för bara några årtionden sedan. Dessutom antas det att klimatförändringarna påverkar vissa typer av väderrelaterade katastrofer och att dess påverkan på katastrofrisken i framtiden kommer att öka (Hoeppe, 2015).

2.1 Återförsäkring

Traditionellt så har försäkringsbolag som vill begränsa sin risk använt sig av återförsäkring. Återförsäkringsbolaget åtar sig att mot en premie ersätta försäkringsbolaget utifall vissa förutbestämda händelser inträffar. Det kan vara att återförsäkringsbolaget står för en viss procentsats av försäkringsbolagets totala kostnader under ett år. Här kan det också handla om en andel av försäkringsbolagets kostnader över ett visst tröskelvärde. Ytterligare en vanlig modell för återförsäkring är att återförsäkraren tar över en andel av risken för försäkringsfall om de överstiger ett visst tröskelvärde.

I områden där naturkatastrofer är vanligt förekommande har återförsäkring en viktig roll för att försäkringsbolag ska kunna erbjuda försäkring och kunna stå för sina åtaganden när katastrofen är ett faktum. På återförsäkringsmarkanden kan risken för katastrofer som inte



Figur 1: Globala skador orsakade av naturkatastrofer för perioden från 1960 till 2018. Data är inte justerat för inflation. Data från EM-DAT: The Emergency Events Database.

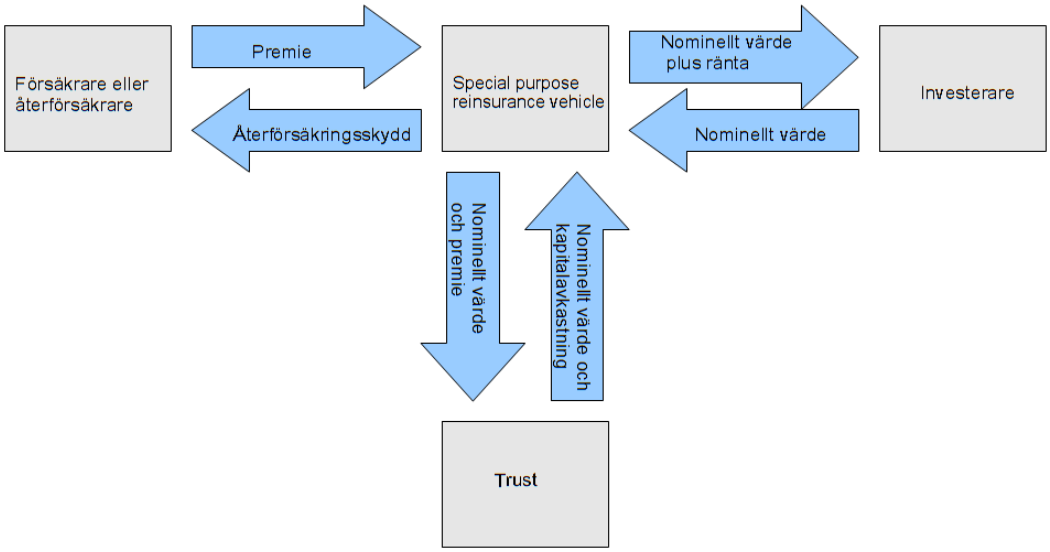
är lokalt diversifierbara spridas globalt. Men även denna marknad har sina begränsningar. De tre orkanerna Maria, Irma och Harvey orsakade under hösten 2017 försäkrade förluster på omkring 92 miljarder dollar, ett klart högre belopp än förväntat för orkansäsongen i Atlanten som fick till följd att ett flertal återförsäkringsbolag valde att minska sina investeringar i katastrofrisk. Samtidigt menar återförsäkringsföretaget Swiss Re att om än ovanligt högt så var kostnaderna från orkansäsongen 2017 långt ifrån det värsta möjliga utfallet och att de i deras modeller simulerar scenarier där de försäkrade förlusterna väl överstiger 250 miljarder dollar (Swiss Re Institute, 2018).

2.2 Cat bonds

Katastrofernas ökande skadeverkningar och återförsäkringsmarknadens begränsningar fick till följd att man i början av 1990-talet började undersöka möjligheten att sprida katastrofrisk till den klart robustare finansmarknaden. Bedömningar har gjorts att försäkringsbranschen vid den tiden skulle drabbats mycket hårt vid en extrem naturkatastrof med försäkrade förluster på 100 miljarder dollar (Cummins, Doherty & Lo, 2002), samtidigt som den globala finansmarknaden med dagliga fluktuationer på tiotals miljarder dollar bättre skulle kunna stå emot sådana förluster (Nowak & Romaniuk, 2013). Detta banade väg för introduktionen av *catastrophe bonds*, eller cat bonds, ett värdepapper vars värde

på något sätt är beroende av om någon specifik katastrof inträffar. För investerare kan cat bonds innebära en möjlighet att minska den totala risken inom portföljen då risken från cat bonds är närmast okorrelerade med risken från övriga obligationer och aktier på finansmarknaden (Froot, Murphy, Stern & Usher, 1995).

Olika cat bonds skiljer sig mycket åt beroende på vilket sponsor som vill ha försäkringsskyddet, mot vilken risk som denna cat bond är tänkt att skydda, vilken omfattning skyddet ska ha och vilka investerare som man hoppas locka. Utformningen har dock vanligen vissa grunddrag gemensamt som vi går igenom här. Vi tänker oss att en sponsor, vanligtvis en försäkringsgivare, vill låta ge ut en cat bond. Ett specialföretag, ett så kallat *special purpose reinsurance vehicle* eller SPRV, vilket alla transaktioner går igenom, inrättas för ändamålet. Sponsor betalar in en premie och investerare betalar in ett belopp enligt ett överenskommet nominellt värde till ett SPRV som i sin tur investerar tillgångarna i till exempel statsobligationer. Om den katastrof avtalet gäller inte inträffar så betalar SPRV tillbaka det nominella värdet och ränta till investerarna varpå det sedan upplöses. Om däremot katastrofen inträffar säger vi att denna cat bond *triggas* varpå tillgångarna fördelas från SPRV till sponsor och investerare i enlighet med vad som är bestämt för denna specifika cat bond. En schematisk skiss över kassaflödena visas i Figur 2.



Figur 2: Kassaflöden mellan olika aktörer för en generell cat bond. Bearbetning av figur från General Accountability Office (GAO) (2002).

Cat bonds brukar delas in i olika kategorier beroende på vad det är för händelse som triggar dem. Om en cat bonds trigger är kopplad till sponsorns faktiska kostnader, till exempel en cat bond som triggas då en försäkringsgivares utbetalningar till följd av skador från

jordbävningar överstiger ett visst belopp, sägs den vara av typ *indemnity*. Ett närstående alternativ är en cat bonds av typ *industry loss index*. Där är det inte längre sponsorns faktiska kostnader som avgör när denna cat bond triggas utan ett utomståendes företags modeller av vad kostnaden för sponsorn kan förväntas bli. Ytterligare en sorts trigger är den som endast är beroende av den faktiska katastrofen men inte vilka kostnader denna medför. En sådan cat bond kallas *parametrisk*. En uppenbar nackdel med parametriska cat bonds är att en sponsor kan ha svårt att kalibrera en sådan cat bond till sina faktiska kostnader till följd av den triggande katastrofen varpå återförsäkringsskyddet kan visa sig otillräckligt eller överflödigt så att sponsorn berikar sig. För investerare kan denna cat bond dock vara mer attraktiv än den av typ indemnity dels då de oftast är enklare att analysera (de kräver ingen inblick i en försäkringsgivares försäkringsbestånd), dels eftersom de eliminerar den moraliska risk som annars kan vara ett problem.

Det kan i det här skedet vara illustrativt att gå igenom några konkreta exempel. Ett sådant är de cat bonds som Winterthur Insurance gav ut 1997. Det gällde en treårig obligation där det nominella värdet för investerarna inte var under risk. Däremot så betalades inte den årliga räntekupongen på 2.25 procent ut om minst 6000 motorfordon försäkrade vid Winterthur i Schweiz skadades av hagel eller storm under en och samma dag (Schmock, 1999). Ett annat exempel, också det från 1997, är då den amerikanska försäkringsgivaren USAA lät ge ut två serier av ettåriga cat bonds för att få återförsäkringsskydd mot orkaner. I den första serien var likt Winterthurs cat bond endast kupongen under risk medan både kupongen och det nominella värdet var under risk i den andra serien. För att investerare skulle drabbas så krävdes att kostnaderna för skador till följd av orkaner för USAA uppnådde gränsen en miljard dollar under året. Om kostnaderna översteg 1.5 miljarder dollar så var kupongen helt förlorad i den första serien och både kupongen och det nominella värdet för den andra serien. Investerare fick i det här fallet en kupong på 2.73 procent över LIBOR (London Inter-Bank Offered Rate) för den första serien och 5.76 procent över LIBOR för den andra serien (Cox & Pedersen, 2000). Vi ger också ett tredje exempel på en cat bond som skiljer sig en del från de första två. Mexiko har en fond (FONDEN) vars medel är tänkt att användas för återuppbyggnad av infrastruktur i händelse av naturkatastrofer. Under 2006 lät den mexikanska regeringen ge ut en cat bond för att stärka medlen i FONDEN vid händelse av en kraftig jordbävning. Denna cat bond var parametrisk då den triggades om skalv som uppmätte specifika värden på Richterskalan uppmättes inom olika zoner i landet. Löptiden var tre år och för en premie på totalt 26 miljoner dollar så gavs ett försäkringsskydd på 160 miljoner dollar (Härdle & Cabrera, 2010).

3 Frågeställning

Inspirerad av den cat bond som Mexiko lät ge ut för att stärka sin naturkatastroffond i händelse av en kraftig jordbävning så ska vi i det här arbetet undersöka möjliga effekter av om Puerto Ricos regering skulle ge ut cat bonds för att finansiera uppbyggnad av infra-

struktur som skadas i samband med framtida tropiska cykloner och vilken kostnaden för detta försäkringsskydd skulle bli. För att svara på den frågan så kommer vi, givet detaljer om vad som triggar dessa cat bonds, behöva tillförlitliga modeller över tropiska cykloner för att bedöma sannolikheten att de triggas. Vi kommer också behöva en marknadsmodell inom vilken vi kan prissätta cat bonds efter att vi uppskattat sannolikheten att de triggas. Vi kommer att skissa på en modell för att bygga upp försäkringsskyddet för Puerto Rico utifrån följande fyra serier av parametriska cat bonds, där dessa har utformats för att visa på det breda spektrum av möjligt försäkringsskydd som kan åstadkommas med hjälp av cat bonds snarare än för att en kombination av dessa skulle utgöra det optimala försäkringsskyddet för Puerto Rico.

Cat bond 1: Löptid 1 år. En kupong betalas ut tillsammans med det nominella värdet om och endast om ingen tropisk storm eller orkan träffar Puerto Rico under året. Om obligationen triggas så är betalas 80 procent av det nominella värdet tillbaka till investerarna.

Cat bond 2: Löptid 10 år. En kupong betalas ut varje år om och endast om ingen tropisk storm eller orkan träffat Puerto Rico under året. Det nominella värdet är skyddat och betalas garanterat ut efter 10 år tillsammans med den sista kupongen.

Cat bond 3: Löptid 1 år. En kupong betalas ut tillsammans med det nominella värdet om och endast om ingen tropisk storm eller orkan träffar Puerto Rico under året. En andel av det nominella värdet betalas tillbaka beroende på den tropiska cyklonens intensitet enligt Tabell 3.

Maximal intensitet:	TS	1	2	3	4	5
Andel utbetalat nominellt värde:	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0

Tabell 3: Beskrivning av utbetalningsplan för nominellt värde för cat bond 3. TS= tropisk storm, 1-5 är kategorierna från Saffir-Simpsonskalan.

Cat bond 4: Löptid 10 år. En kupong betalas ut varje år om och endast om ingen tropisk cyklon av orkanstyrka träffar Puerto Rico under året. Om en orkan av kategori 4 eller 5 träffar Puerto Rico avslutas obligationen och det nominella värdet är förlorat.

4 Metodbeskrivning

Då detta arbete inriktats mot att behandla prissättning av cat bonds har sökningar efter tillförlitlig data över naturkatastrofer inledningsvis varit ett viktigt fokus. Tropiska cykloner var av intresse då de orsakar stora skador som kan vara svåra för försäkringsgivare att hantera. Det amerikanska regeringsorganet *National Oceanic and Atmospheric Administration*, förkortat NOAA, samlar in stora datamängder om olika väderfenomen runtom i världen. Bland annat så har man i sin databas HURDAT2 sammanställt information om samtliga kända tropiska stormar och orkaner i Atlanten sedan 1851. Man har kartlagt rörelsebanor,

vindstyrkor, lufttryck med mera. Tillsammans med rapporter från individuella tropiska cykloner sedan 1958 från NOAA och månadsvisa summeringar av orkansäsongen utgivna från *U.S Weather Service* för perioden 1872-1957 blir även information om dödsfall, uppskattad ekonomisk kostnad och ytterliggare parametrar för de tropiska cyklonerna så som regnmängder tillgängliga.

Data om kostnader är inte uteslutande från USA men saknas oftare från andra stater vilket gjorde amerikanska territorier så som Puerto Rico speciellt intressanta att analysera. Då arbetet avgränsades till att fokusera på Puerto Rico så var den ursprungliga planen att ta fram en modell som behandlade risken inte bara för att tropiska cykloner skulle träffa Puerto Rico utan även de kostnader som dessa skulle medföra. Det visade sig dock att datamaterialet över de historiska kostnaderna var otillräckligt för att modellera framtida kostnader varpå den delen fick strykas.

Vid inläsning på området visade flertalet studier på att klimatfenomen som *El Niño Southern Oscillation* och *Atlantic Multidecadal Oscillation* kunde tillskrivas påverkan på tropiska cykloner i Atlanten. För att modellera dessa processer och för att skatta deras effekter på de tropiska cyklonerna så behövdes data. Även här så visade sig NOAA vara en användbar källa då de har månadsvisa temperaturer registrerade för områden i Stilla havet och Atlanten sedan 1870 respektive 1856 som kan användas för beräkna avvikelser från det normala och därmed klassificera perioder efter olika faser för dessa klimatfenomen.

För att prissätta cat bonds så krävs utöver riskmodeller även en modell som tar hänsyn till finansiella aspekter. Sedan cat bonds introducerades på finansmarknaden så har flertalet sådana modeller tagits fram. Med avsikt att hålla detta avsnitt relativt enkelt och inte alltför omfattande så har här ett försök gjorts att applicera riskmodeller till en övergripande modell av Cox och Pedersen. Den teoretiska motiveringen av modellen återges här inte i sin helhet, för detta refereras istället till artikeln där modellen presenteras. Däremot förklaras de centrala begreppen från modellen och de antaganden som krävs för modellens giltighet lyfts fram och tydliggörs.

5 Modeller för tropiska cykloner

I det här avsnittet kommer vi att bygga upp de riskmodeller som vi senare kommer använda oss av för att skatta sannolikheterna att de cat bonds som vi definierat tidigare kommer att triggas. Vi vill givetvis att modellerna ska vara tillförlitlig och effektiva i den mening att de skattningar som de ger ska vara så exakta som möjligt. Men vi vill också att modellerna ska vara så pass enkla att de är intuitiva och lätta att förstå. Dessutom är målsättningen att modellerna som vi tar fram här ska vara generella nog att kunna appliceras på liknande problem, till exempel till att gälla en annan östat i det karibiska havet.

Vi inleder med att gå igenom en del bakgrund kring när tropiska cykloner tenderar att upp-

komma under året och också vilka klimatfenomen som kan påverka de tropiska cyklonernas aktivitet under längre perioder om flera år eller decennier. Vi konstruerar sedan modellen för tropiska cykloner i två separata delar, där den första behandlar risken att Puerto Rico träffas av tropiska cykloner kraftiga nog att klassas som tropiska stormar. Denna del är tillräcklig för att skatta sannolikheten att cat bond 1 och cat bond 2 triggas. I den andra delen modelleras fördelningen av vindstyrka för de tropiska cykloner som träffar Puerto Rico. För att analysera cat bond 3 och cat bond 4 så krävs att de båda delarna av modellen kombineras.

5.1 Orkansäsongen

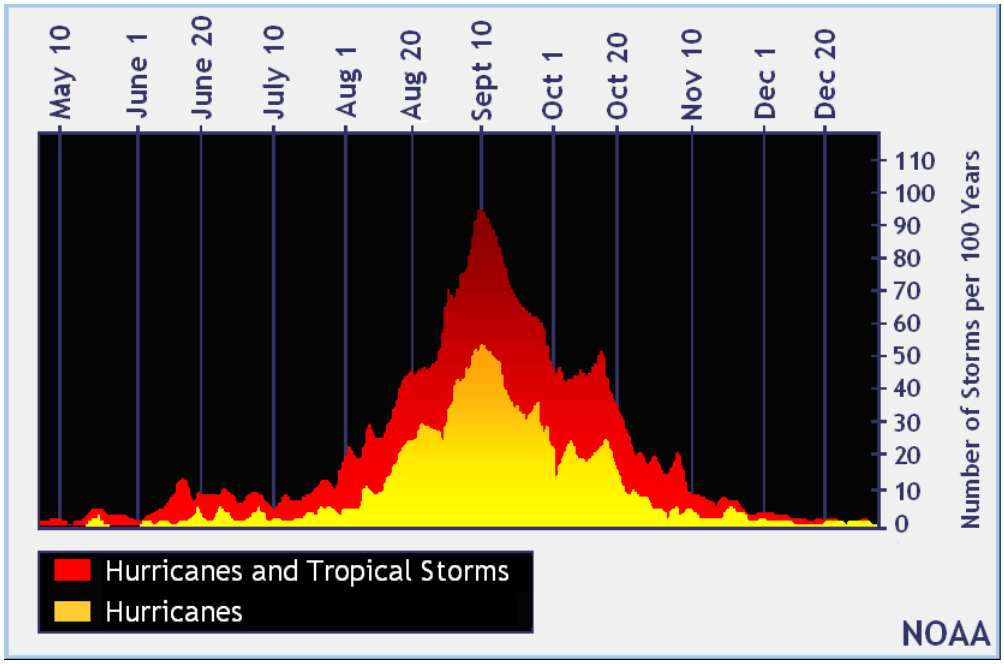
Så som vi har utformat de cat bonds som vi analyserar i det här projektet så är hela kalenderåret på risk, och tidpunkten då dessa cat bonds triggas saknar betydelse. Det är dock bra att ha förståelse för att risken att tropiska cykloner ska träffa Puerto Rico är långt ifrån likformigt fördelad under året. Den så kallade orkansäsongen i Atlanten sträcker sig från första juni till sista november och där inträffar den absoluta merparten av de tropiska stormarna och orkanerna, vilket kan ses i Figur 3. Att så få tropiska stormar och orkaner bildas utanför orkansäsongen beror på att det krävs tillräckligt höga ytvattentemperaturer för att tropiska cykloner ska kunna formas, något som sällan är uppfyllt i Atlanten under vinter och vår.

5.2 Klimatfenomen att ta hänsyn till

För att uppskatta sannolikheten att en tropisk storm eller orkan kommer att träffa Puerto Rico i framtiden så är det lockande att anta att den sannolikheten är oberoende och likafördelad mellan olika år. I sådant fall skulle vi helt enkelt kunna genomföra skattningen genom att beräkna den historiska andelen år som sådana händelser inträffat. Men likafördelningen kan i det här fallet ifrågasättas. Det har tidigare beskrivits hur olika klimatfenomen som *El Niño Southern Oscillation* (ENSO) och *Atlantic Multidecadal Oscillation* (AMO) har inverkan både på uppkomsten och intensiteten hos orkaner i Atlanten (Caron, Boudreault & Bruyère, 2015). Dessutom är det möjligt att den globala uppvärmningen till följd av människans utsläpp av växthusgaser har en viss påverkan (Cummins, Doherty & Lo, 2005).

5.2.1 El Niño Southern Oscillation

Klimatfenomenet El Niño, eller ENSO, refererar till de temperaturväxlingar som sker i de tropiska vattnen mellan östra och centrala Stilla havet. När ytvattnet är varmare än normalt så befinner vi oss i en El Niño-period och när det växlar och blir kallare än normalt så befinner vi oss i en La Niña-period. Klimatfenomenet har stark påverkan inte bara lokalt utan även globalt. ENSOs koppling till tropiska cykloner i Atlanten är välbelagt i flertalet studier, se till exempel (Klotzbach, 2011). Stor skillnad mellan vindriktning eller vindstyrka



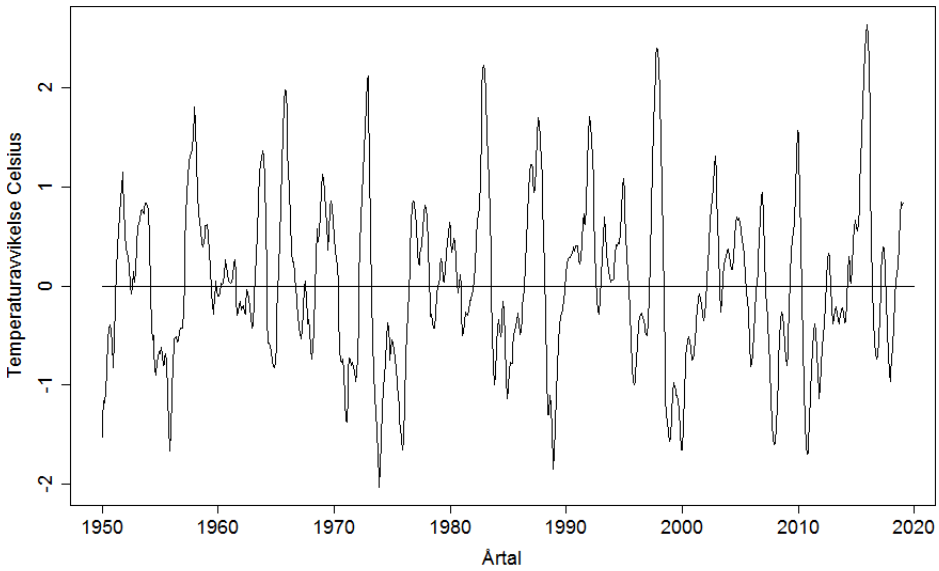
Figur 3: Antalet tropiska stormar och orkaner som uppkommer per hundra år under olika delar av orkansäsongen. Källa: NOAA.

på olika altituder, så kallat *vertical shear*, har visats ha kraftigt negativ inverkan på tropiska cykloners möjlighet att formas såväl som att växa i intensitet (Aiyyer & Thorncroft, 2006). Under ENSO:s varma/kalla fas uppstår en förstärkning/försvagning av vertical shear som alltså försvårar/underlättar bildandet av tropiska cykloner i Atlanten (Kim, Webster & Curry, 2009).

Växlingarna mellan El Niño och La Niña är svåra att förutsäga långt i förväg och faserna varierar kraftigt i längd, från några månader till flera år. Från Figur 4, där det tremånaders löpande genomsnittet av skillnader från normala ytvattentemperaturer i Niño 3.4 visas, ges en uppfattning av den oregelbundenhet som ENSO uppvisar.

5.2.2 Atlantic Multidecadal Oscillation

Klimatfenomenet Atlantic Multidecadal Oscillation, eller AMO, är en växelvis ökning och minskning av ytvattentemperaturen i Nordatlanten. Jämfört med ENSO så har AMO en klart längre period, på omkring 60 år och sedan omkring 1995 befinner vi oss i en varm fas. Det finns gott om forskning som visar på att varm fas av AMO, jämfört kall fas, medför ökad risk för tropiska cykloner i Atlanten, se till exempel Caron m. fl. (2015). Som kan ses från Figur 5 så är det lämpligt att ange AMO-värdet som en längre tids löpande



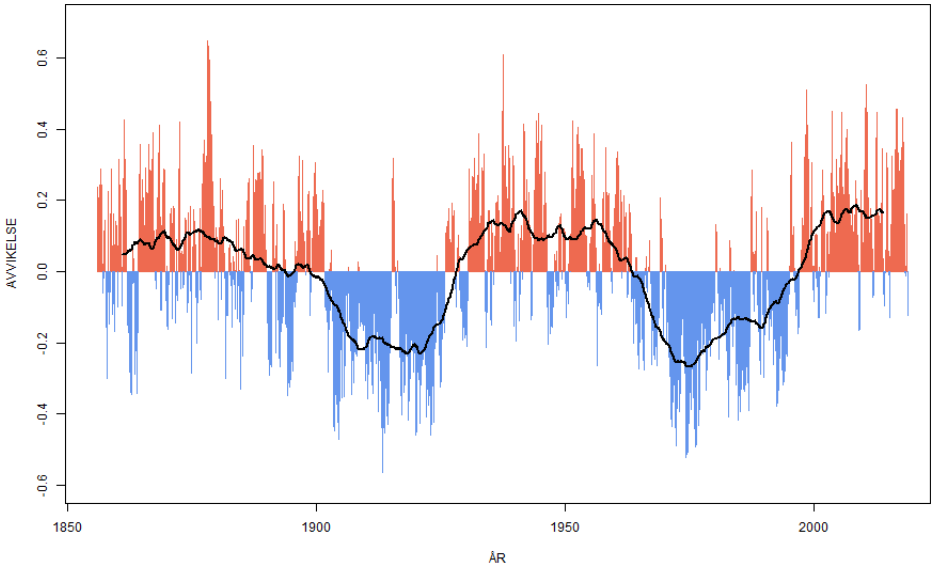
Figur 4: Temperaturavvikelser från det normala i området Niño 3.4 sedan 1950.

medelvärde (i figuren är denna tid 10 år) för att mönstret inte ska störas av de kraftiga månadsvisa fluktuationerna.

5.3 Risken att Puerto Rico träffas av tropiska cykloner

Under den 167 år långa perioden mellan 1851 och 2017 så har 28 tropiska stormar eller orkaner träffat Puerto Rico vid 25 olika kalenderår. Vi inleder analysen av risken för framtida tropiska cykloner utgående från detta datamaterial. Det är intressant att undersöka hur dessa händelser är fördelade över tidsperioden för att avgöra om vi kan se något mönster som tyder på att risken under olika år inte är likafördelad. I Figur 6 visas fördelningen över när de tropiska cyklonerna har träffat tillsammans med en graf över tiderna mellan träffar och en graf över autokorrelationen för dessa tider. Ingen av dessa figurer visar på någon systematisk inhomogenitet som skulle tyda på att vi kan förkasta ett antagande om likafördelning för träffsannolikheten mellan olika år. Det är svårt att avgöra om tiden mellan träffar ökar eller minskar under perioden och att autokorrelationen är ickesignifikant för intilliggande tider tyder på att det inte finns någon samvariation mellan risken för träffar för näraliggande år.

Vid första anblick ter sig alltså datamaterialet som utfallet av 167 likafördelade år. Men som vi nämnde i avsnitt 5.2 så har samband mellan tropiska cykloner i Atlanten och olika



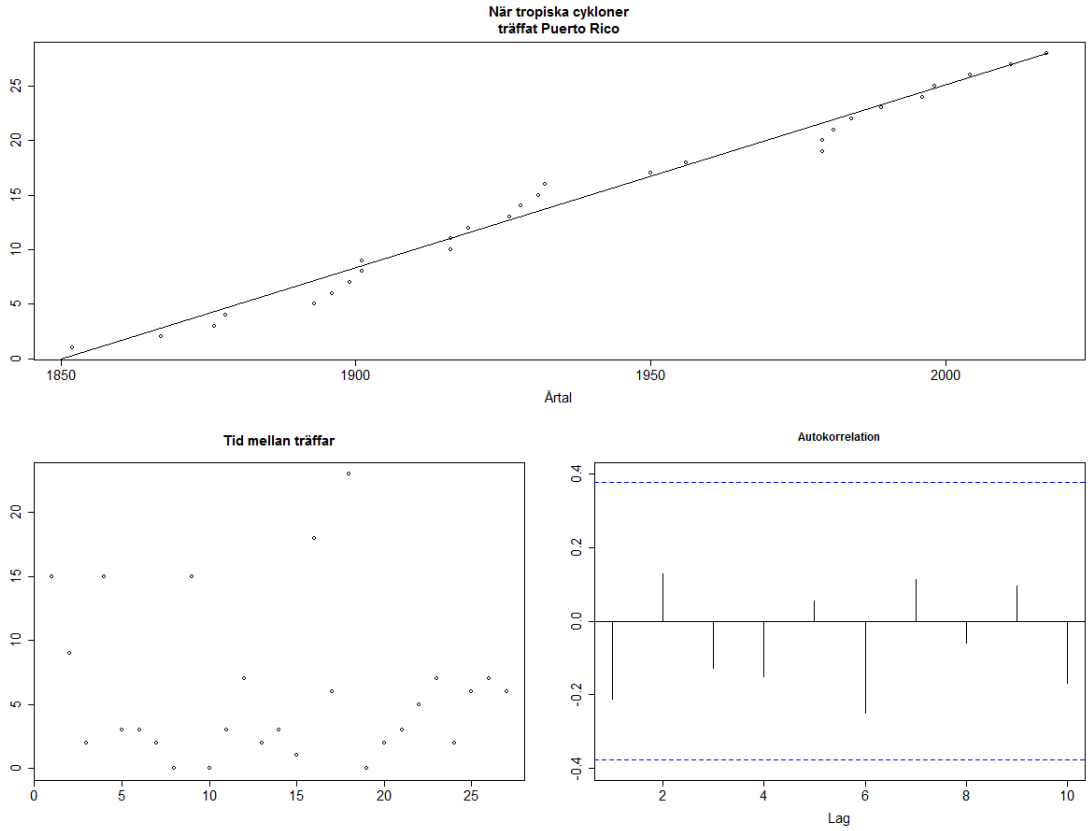
Figur 5: Temperaturavvikelser för AMO sedan 1856, månadsvis i form av staplar och en kurva som visar ett 10 års löpande medelvärde.

klimatfenomen påvisats i flertalet studier och det ligger därför nära till hands att anta att även Puerto Rico är under varierande risk beroende på något eller några av dessa klimatfenomen. För att testa för påverkan av AMO och ENSO så behöver vi dock definiera vilka faser som ryms inom dessa klimatfenomen och vilka kriterier som definierar en fas. För AMO så undersöker vi endast två faser, varm och kall. För att kategorisera datamaterialet så utgår vi från det 10 års löpande medelvärdet som visades i Figur 5 ovan, vilket resulterar i perioderna som visas i Tabell 4 med totalt 85 år tillhörande varm fas och 63 år tillhörande kall fas under perioden 1870-2017.

Varma perioder	Kalla Perioder
1870-1898	1899-1927
1928-1962	1963-1996
1997-2017	

Tabell 4: Indelning i varm och kall fas för AMO i intervallet 1870-2017.

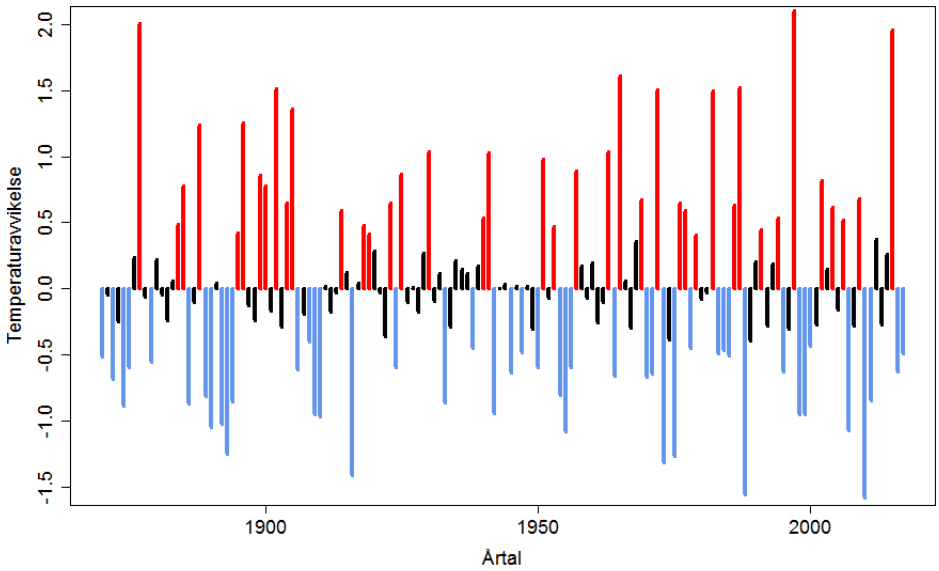
För ENSO så gör vi en definition snarlik den av Pielke och Landsea (1999). Det innebär att vi inför ett tredje, neutralt tillstånd, utöver det varma tillståndet El Niño och det kalla La Niña. För att ett år ska klassas som El Niño eller La Niña och alltså inte neutralt så



Figur 6: Övre: tidpunkterna då tropiska stormar och orkaner träffat Puerto Rico. Nedre, vänster: tiden mellan träffar. Nedre, höger: värdet på autokorrelationen för tiden mellan träffar, streckade linjer utgör gränser för 95-procentiga konfidensintervall.

krävs att temperaturavvikelsen från det normala i Niño 3.4 är minst 0.4 grader Celsius i genomsnitt under tremånadersperioden från augusti till och med oktober. Med denna definition får vi 40 år som klassas som El Niño, 45 år där det varit La Niña och 63 neutrala år. I Figur 7 visas de olika tillstånden för ENSO och hur stor avvikelsen från det normala var under respektive år.

Eftersom data om AMO och ENSO endast sträcker sig tillbaka till 1870 så får vi anpassa datamaterialet med tropiska cykloner därefter till att omfatta 26 händelser över 23 olika år. Utifrån vår definition av ENSO så har 5 av dessa år varit klassade som El Niño, 10 som neutrala och 8 som La Niña. Samtidigt tillhör 13 av dessa år varm AMO och 10 år kall AMO. För ett såpass litet datamaterial så kan vi utföra exakta statistiska test av hypoteserna att ENSO respektive AMO saknar betydelse för sannolikheten med vilken tropiska stormar och orkaner träffar Puerto Rico. Resultatet från testen visas i Tabell 5



Figur 7: De olika tillstånden för ENSO i tidsperioden 1870-2017. Röd färg är El Niño, svart är neutralt tillstånd och blå färg är La Niña.

och därifrån kan vi konstatera att inget stöd ges för att förkasta nollhypoteserna.

	ENSO			AMO	
	El Niño	Neutral	La Niña	Varm	Kall
$\hat{p}$	0.22	0.43	0.35	0.57	0.43
p_0	0.27	0.43	0.30	0.57	0.43
p-värde	0.81			1.0	

Tabell 5: Resultat från test för påverkan från ENSO och AMO. I raden $\hat{p}$ visas andelen tropiska stormar och orkaner som träffat Puerto Rico under respektive klimattillstånd. I raden p_0 visas de förväntade andelen givet nollhypotesen, att ENSO respektive AMO saknar betydelse för sannolikheten att Puerto Rico träffas.

5.3.1 En utökning av datamaterialet

Från materialet med de tropiska cyklonerna som träffat Puerto Rico fann vi inget stöd att frångå ett antagande om likafördelad risk mellan olika år. Men 25 observationer är väldigt lite så utgående från dessa är sannolikheten stor att vi missar (eller är oförmögna att effektivt skatta) fenomen som verkligen har stark påverkan. Vi gör därför ett försök att utöka datamaterialet för att sedan på nytt försöka skatta effekter från ENSO och AMO. Man kan tänka sig en utökning på olika sätt där det till slut blir en fråga om att väga

relevans mot omfattning för det nya materialet. Till grund för vårt byte av datamaterial gör vi följande antaganden:

1. Tropiska cykloner uppkommer i Atlanten enligt en (inhomogen) poissonprocess med intensitet $\lambda(t)$.
2. Tropiska cykloner som uppkommer i Atlanten träffar Puerto Rico oberoende av varandra med gemensam sannolikhet $p_{träff}$.
3. ENSO och AMO kan påverka intensiteten $\lambda(t)$ men inte sannolikheten $p_{träff}$ med vilken en tropisk cyklon träffar Puerto Rico.

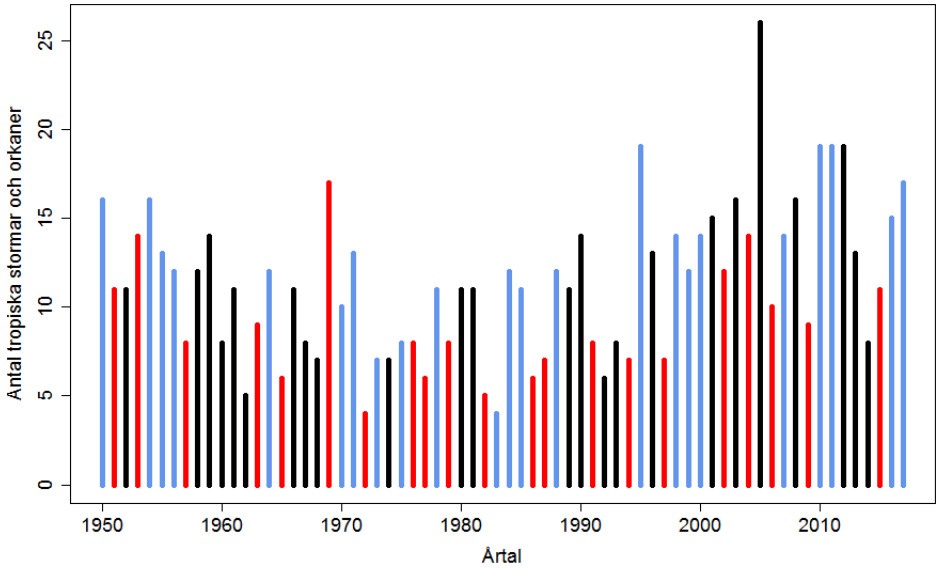
Antagande 1 garanterar att tropiska cykloner uppkommer oberoende av varandra, vilket är en nödvändighet om vi vill hålla vår modell någorlunda enkel. Antagande 2 medför att risken för Puerto Rico att träffas av tropiska cykloner är proportionell mot aktiviteten av tropiska cykloner i hela Atlanten. Antagande 3 förenklar analysen av inverkan från ENSO och AMO då vi endast behöver fokusera på hur dessa klimatfenomen påverkar uppkomsten av tropiska cykloner i Atlanten. I den fortsatta analysen i det här avsnittet så kommer vi ta antagandena som sanna och deras giltighet diskuteras istället i avsnitt 8.

5.3.2 Skattning av effekterna från ENSO och AMO

Nu använder vi antagandena ovan för att utöka vårt datamaterial till samtliga tropiska stormar och orkaner i Atlanten men begränsar oss till tidsperioden 1950-2017 för att undvika problem med underrapportering. Detta material som alltså täcker 68 år innefattar 773 tropiska cykloner och i det här tidsspannet är antalet år klassade som El Niño, neutral och La Niña 21, 24 respektive 23. Faserna för AMO är jämnt fördelade med 34 år vardera. I Figur 8 presenteras antalet tropiska stormar och orkaner som uppkommit i Atlanten, uppdelat efter år och ENSO-tillstånd. Vi kan tydligt se ENSO:s betydelse genom att de tropiska cyklonerna i regel är klart färre till antalet under år klassade som El Niño. Även AMO:s påverkan kan observeras då det relativt låga antalet tropiska cykloner mellan början på 60-talet till mitten av 90-talet stämmer väl överens med den senaste perioden kalla perioden.

Vi kompletterar Figur 8 med siffror på medelvärden och varianser i Tabell 6. Där ser vi, vilket inte är helt lätt att avläsa från figuren, att år klassade som La Niña har högre medelvärde än neutrala år. Det blir också tydligt att vissa skillnader är ganska stora, bland annat så har det för år klassade som La Niña uppkommit i snitt 46 procent fler tropiska stormar och orkaner jämfört med när det varit El Niño. För AMO ser vi en skillnad av samma storleksordning då 43 procent fler tropiska stormar och orkaner uppkommit under varm fas jämfört med kall fas.

Nu kvarstår frågan hur vi på bästa sätt modellerar ENSO:s och AMO:s påverkan på uppkomsten av tropiska cykloner. Antagande 1 ger att antalet tropiska stormar och orkaner



Figur 8: Antalet tropiska stormar och orkaner i Atlanten uppdelat på årtal i intervallet 1950-2017. Röd färg betyder att året klassas som El Niño, svart färg är neutralt och blå färg är La Niña.

	ENSO			AMO	
	El Niño	Neutral	La Niña	Varm	Kall
Medelvärde	9.0	11.8	13.1	13.4	9.4
Varians	11.0	22.1	14.4	17.8	11.8

Tabell 6: Medelvärden och varianser av antalet tropiska stormar och orkaner per år, uppdelat efter ENSO och AMO.

i Atlanten är poissonfördelat med parameter $\lambda_{ij} = \int \lambda_{ij}(t)dt$, där vi integrerar över hela året och index ij svarar mot ENSO-tillstånd i och AMO-tillstånd j. Då det bara rör sig om totalt 6 tillstånd så kan vi förstås skatta λ_{ij} vart tillstånd för sig, men om vi kan hitta någon underliggande struktur så kan det vara fördelaktigt både genom att vi får en mer robust skattning av parametrar och att modellen blir enklare. I det här fallet verkar det inte orimligt att anta en multiplikativ modell, det vill säga att antalet tropiska stormar och orkaner över ett år är Poissonfördelat med parameter μ_{ij} som uppfyller

$$\lambda_{ij} = \gamma_0 \gamma_{1i} \gamma_{2j}.$$

Detta faller under teorin för *generalized linear models* med länkfunktion $\log(\cdot)$. För att underlätta notationen så skriver vi +, 0 och - som subindex för El Niño, neutralt tillstånd respektive La Niña och på samma sätt + och - för varm respektive kall AMO. I Tabell 7 har

vi delat in datamaterialet efter de sex tillstånden och om vi där tar El Niño och kall AMO som referenscell och utför beräkningarna som är baserade på maximum likelihood-teori så får vi skattningarna för våra relationstal som $\hat{\gamma}_{10} = 1.27, \hat{\gamma}_{1-} = 1.42, \hat{\gamma}_{2+} = 1.39$. Alla skattningar är skilda från 1 på 95 procents konfidensgrad. Relationstalen ska tolkas så att

ENSO	AMO	Antal år	Medelvärde
El Niño	Varm	9	10.7
El Niño	Kall	12	7.6
Neutral	Varm	13	13.4
Neutral	Kall	11	9.7
La Niña	Varm	12	15.1
La Niña	Kall	11	10.8

Tabell 7: Indelning av datamaterialet efter ENSO och AMO.

neutralt ENSO-tillstånd har 22 procent högre frekvens för uppkomst av tropiska cykloner än El Niño och att La Niña i sin tur har 36 proecent högre frekvens än El Niño. Samtidigt har AMOs positiva fas 40 procent högre frekvens än den negativa fasen. Tillsammans med ett uppskattat värde $\hat{\gamma}_0 = 7.6$ för vår referenscell så får vi skattade antal tropiska stormar och orkaner per år för de olika tillstånden enligt Tabell 8.

	El Niño	Neutralt	La Niña
AMO kall	7.6	9.7	10.8
AMO varm	10.6	13.4	15.1

Tabell 8: Uppskattning av väntevärdet av antalet tropiska stormar och orkaner som uppkommer per år.

5.3.3 Skattning av sannolikheten $p_{träff}$

Ett kritiskt moment i kalibreringen av parametrar för vår modell är att på bästa sätt skatta sannolikheten $p_{träff}$ med vilken tropiska cykloner i Atlanten träffar Puerto Rico. Antagande 2 ger att $p_{träff}$ är gemensam för alla tropiska cykloner. Det som är problematiskt är att en skattning nödvändigtvis blir grundad på så få observationer, då endast 11 tropiska stormar och orkaner träffat Puerto Rico sedan 1950. Vi har förvisso tillgång till data för tropiska cykloner i Atlanten så långt tillbaka som 1851 men den låter sig inte användas utan att vi först justerar den för underrapportering av tidiga tropiska cykloner.

Vi kan tänka oss en korrigering av data på olika sätt. Ett antagande skulle vara att ett deterministiskt antal tropiska cykloner uppkommer varje år i perioden 1851-1949 som överensstämmer med medelvärdet av antalet tropiska cykloner från perioden 1950-2017. Vi kan för att göra scenariot något mer realistiskt och utan att krångla till det nämnvärt, ta hänsyn till AMO och ENSO genom att använda skattningarna från den multiplikativa

modellen som vi tog fram i avsnitt 5.3.2, varpå vi får inskränka tidsperioden till att starta vid 1870. Denna metod är intuitivt lockande men det är samtidigt värt att notera att den bygger på vår övriga modells giltighet. Om det föreligger en trend över lång tid att antalet tropiska cykloner i Atlanten ökar eller minskar i antal, så kommer vi genom att använda en modell som inte tar hänsyn till detta att införa en bias i skattningen av $p_{träff}$ när vi justerar för underrapporterade tropiska cykloner. Detsamma gäller om effekterna från ENSO eller AMO på uppkomsten av tropiska cykloner i Atlanten varierat över tid.

Antalet noterade tropiska stormar och orkaner i Atlanten i perioden 1950-2017 är 773 och en justering till perioden 1870-2017 utifrån den multiplikativa modellen ger en uppskattning på 1725 tropiska stormar och orkaner, varav 26 har träffat Puerto Rico. Enligt våra antaganden så kan dessa tropiska cykloner ses som oberoende och likafördelade bernoulli-variabler med parameter $p_{träff}$, där ett "lyckat" utfall är att den tropiska cyklonen träffar Puerto Rico. Maximum likelihood-skattningar ges således av andelen tropiska cykloner som träffat Puerto Rico, vilket är

$$\hat{p}_{träff} = 11/773 \approx 0.014, \qquad \hat{p}^{u}_{träff} = 26/1725 \approx 0.015,$$

där alltså $\hat{p}^{u}_{träff}$ står för den skattade träffsannolikheten utifrån det utökade datamaterialet. Vi ser att de båda skattningsmetoderna i det här fallet gav snarlika resultat.

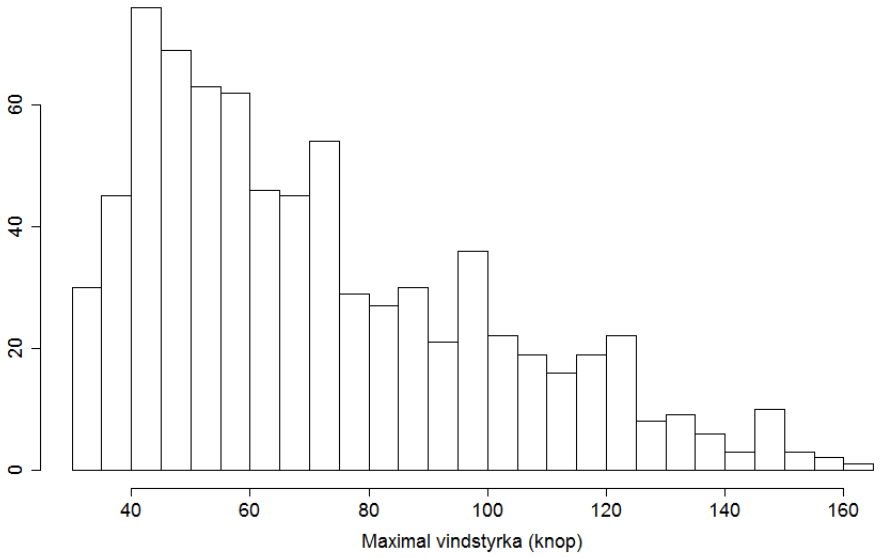
5.4 Analys av vindstyrkan för tropiska cykloner

I avsnitt 5.3 har vi analyserat risken att Puerto Rico träffas av tropiska cykloner. Det ger en uppskattning av sannolikheten att cat bond 1 och cat bond 2 triggas, men vi kan fortfarande inte analysera kassaflödena för cat bond 3 och cat bond 4 då vi hittills inte tagit hänsyn till med vilken vindstyrka de tropiska cyklonerna träffar Puerto Rico.

Vi såg att klimatfenomenen ENSO och AMO har inverkan på antalet tropiska cykloner som formas i Atlanten och givet antagande 1-3 därmed även på risken att tropiska cykloner träffar Puerto Rico. En rimlig frågeställning i det här skedet är om dessa klimatfenomen också påverkar hur kraftiga cyklonerna som formas till slut blir. Det finns en del forskning som tyder på att så är fallet, till exempel så beskriver Wang, Wang, Weisberg och Black (2017) hur bland annat ENSO inverkar på tropiska cykloners sannolikhet att hastigt växa i styrka.

Liksom för uppkomsten av tropiska cykloner så är det rimligt att anta att problemen med underrapportering av äldre tropiska cykloner medför problem även vid analys av vindstyrka. Före tillgång till flygplan och satelliter var sannolikheten att en tropisk cyklon noterades beroende av dess färdväg och vindstyrka. Kraftiga orkaner har i regel större påverkan på större områden jämfört med tropiska stormar varför de skulle ha högre sannolikhet att observeras. Samtidigt riskerar tropiska cykloner att rapporteras som svagare än de är om de inte observeras vid sin kraftigaste tidpunkt. Därför återanvänder vi materialet om 773

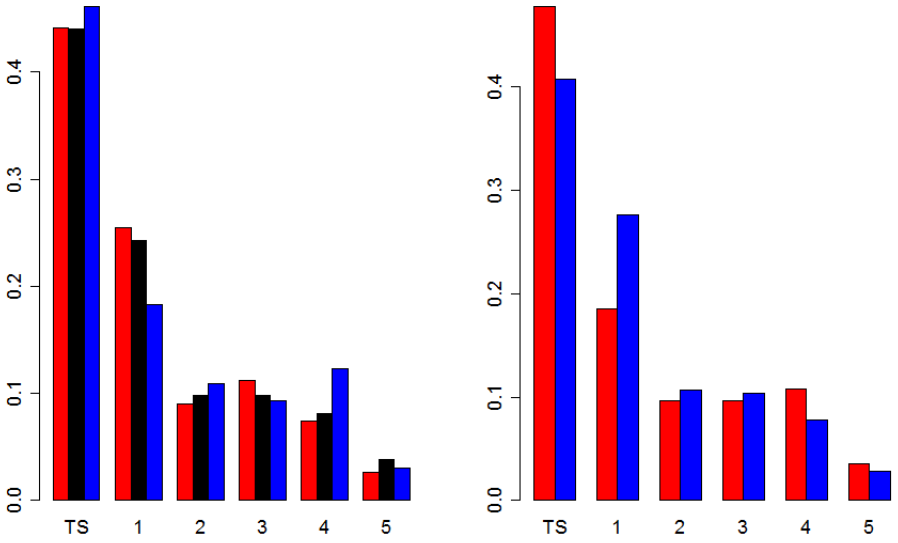
tropiska cykloner från perioden 1950-2017 för den inledande analysen av fördelningen för tropiska cykloners maximala vindstyrka. För att få en uppfattning om hur denna fördelning över vår datamängd så kan det vara illustrativt med ett histogram så som det i Figur 9. Knappt hälften av de tropiska cyklonerna faller inom kategorin tropisk storm och omkring en femtedel av cyklonerna räknas som kraftiga orkaner, vilket innebär att de tillhör kategori 3-5 på Saffir-Simpsonskalan.



Figur 9: Uppskattning av fördelningen för maximal vindstyrka genom histogram av datamaterialet.

Vi delar nu in de tropiska cyklonerna i olika klasser beroende på vilken fas av ENSO och AMO som de inträffade under för att undersöka eventuella skillnader i fördelningen för maximal vindstyrka. I Figur 10 ser vi andelen av de tropiska cyklonerna som faller inom respektive kategori i Saffir-Simpsonskalan.

Från figuren framträder vissa skillnader i fördelningarna inom vårt datamaterial. Till exempel så ser vi för ENSO att en låg andel kategori 1-orkaner uppkommer under La Niña samtidigt som andelen kategori 4-orkaner är högre under La Niña jämfört med neutralt tillstånd och El Niño. Även för AMO kan man ana vissa skillnader. Under varm AMO är andelen cykloner som faller inom kategorierna tropisk storm, kategori 4-orkan och kategori 5-orkan vanligare medan andelen kategori 1-orkaner är klart lägre än under kall AMO. Utgående från Figur 10 är det alltså inte orimligt att anta att vindstyrkan för tropiska cykloner beror både på ENSO och AMO, men att beroendet i så fall verkar vara av en



Figur 10: Andel tropiska cykloner inom respektive kategori i Saffir-Simpsonskalan. Till vänster för ENSO:s olika tillstånd (röd = El Niño, svart = neutral, blå = La Niña), till höger för AMO (röd = varm, blå = kall).

komplicerad natur då tillstånden som står för högst andel kraftiga orkaner samtidigt är de tillstånd som har högst andel av de svagare tropiska stormarna.

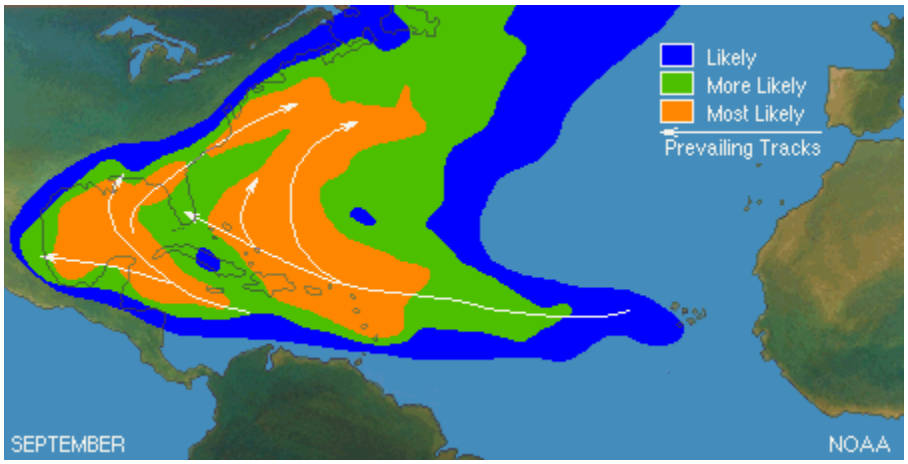
5.5 Vindstyrkans fördelning; tropiska cykloner som träffar Puerto Rico

Vi har nu undersökt fördelningen för tropiska cykloners maximala vindstyrka i Atlanten i stort men de resultat vi hittills tagit fram låter sig inte utan vidare appliceras på tropiska cykloner som träffar Puerto Rico. Det finns ett flertal komplikationer med att använda fördelningen vi såg i Figur 9 för att skatta sannolikheten att en tropisk cyklon som träffar Puerto Rico kommer att trigga cat bond 3 eller cat bond 4. Ett antagande som vi inte gärna kan göra är att tropiska cykloner träffar Puerto Rico med en gemensam sannolikhet givet deras maximala vindstyrka. Det är tvärtom rimligt att anta att vissa rörelsebanor är mer typiska för starkare tropiska cykloner jämfört med de svagare. Dessutom är vi inte primärt intresserade av de tropiska cyklonernas maximala vindstyrka utan den vindstyrka de har vid det tillfället de träffar Puerto Rico. Att skatta det senare enbart med hjälp av det förra låter sig inte göras på något tillförlitligt sätt.

För att komma vidare så behöver vi skala ned datamaterialet till mer relevant data. Ett

alternativ är att enbart undersöka de tropiska cykloner som faktiskt träffat Puerto Rico. Dessa tropiska cykloner uppfyller definitivt alla krav på relevans men nackdelen är som vi sett tidigare att detta material för tidsperioden 1851-2017 endast består av 28 observationer. Frågan är om vi kan utvidga detta datamaterial utan att för allvarligt tumma på kvaliteten. För att undersöka detta så går vi ytligt igenom några meteorologiska karaktäristika hos tropiska cykloner.

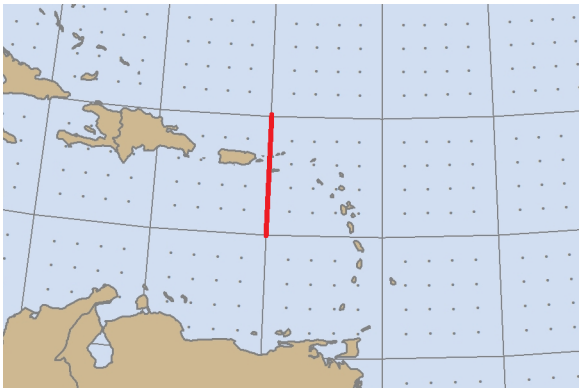
Tropiska cykloner bildas mellan 5 och 30 grader i nordlig latitud och rör sig sedan typiskt i västlig eller nordvästlig riktning. Tropiska cykloner som når nordlig latitud på 30 grader svänger sedan ofta över i en nordöstlig riktning. Den typiska rörelseriktningen beror också på när under säsongen som de tropiska cyklonerna uppstår. I Figur 11 visas en sammanställning från NOAA över orkaners uppkomstområden och vanliga rörelsemönster under september månad.



Figur 11: Orkaners uppkomstområden och ledande rörelsebanor under september månad. Källa: NOAA.

En metod som nu ligger nära till hands för att utöka datamaterialet av tropiska cykloner som träffat Puerto Rico är att inkludera tropiska cykloner med en bana som passerar "tillräckligt nära" ön. Vad som är en bra definition för om en tropisk cyklon passerar tillräckligt nära är svårt att veta men det handlar om att väga fördelen av fler observationer som ett större område innebär, mot nackdelen av att tropiska cykloner långt ifrån Puerto Rico som inkluderas potentiellt medför en bias när vi ska undersöka fördelningen för vindstyrkan för de tropiska cyklonerna i området.

Vi väljer här, inspirerade av cyklonernas typiska rörelseriktning att inkludera samtliga tropiska stormar och orkaner som korsar meridianen W 65° i västlig riktning mellan N 15° och N 20°. Denna gränslinje är markerad i Figur 12. Med denna definition kan tropiska cykloner som inkluderas i datamängden passera på avstånd av som mest omkring 350 kilometer



Figur 12: Den gränslinje (inritad på kartbild från NOAA) som tropiska cykloner måste passera i västlig riktning för att inkluderas i datamaterialet är utmärkt i rött.

från ön. Dock så finns det ett fåtal tropiska cykloner som passerat klart närmare Puerto Rico än så och fortfarande inte inkluderas, på grund av en något atypisk rörelsebana. För de tropiska cykloner som inkluderas i vårt datamaterial så avläser vi den vindstyrka som de har vid sitt kortaste avstånd till Puerto Rico. Vi formulerar nu ytterligare två antaganden utöver de tre antaganden som angivits ovan om de tropiska cyklonerna som ingår i vår datamängd för att underlätta den fortsatta analysen av fördelningen för vindstyrkan.

4. I perioden 1851-2017 har alla tropiska cykloner som uppfyller kriterierna för att inkluderas i vårt datamaterial observerats och vindstyrka tillsammans med position vid givna tidpunkter är korrekt beskrivna.

5. Låt $n \geq 1$ vara antalet tropiska cykloner som korsar meridianen W 65° i västlig riktning mellan N 15° och N 20° under gemensamma tillstånd för ENSO och AMO. Beteckna fördelningsfunktionen för vindstyrkan för den i:te av dessa tropiska cykloner, vid sitt kortaste avstånd till Puerto Rico, som F_i. Då gäller att $F_i = F_j$ för alla $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Antagande 4 kan verka motsägande mot vad vi tidigare beskrivit om möjligheten att observera stormar innan det fanns flygplan och satteliter. Att det ändå kan vara motiverat beror på det aktuella området. Cykloner som inkluderas i denna datamängd passerar nära land och har med stor sannolikhet påverkan på antingen Små Antillerna eller Stora Antillerna. Att farvattnen omkring Antillerna även på 1800-talet var relativt frekventerade borde ytterliggare öka tillförlitligheten i observationerna. Dessa argument talar för att bortfallet av äldre tropiska cykloner borde vara relativt litet i vår datamängd och att noggrannheten i rapporterna borde vara förhållandevis god. Det är dock värt att upprepa i det här sammanhanget att en underrapportering av tidiga tropiska cykloner sannolikt drabbar svagare tropiska cykloner i högre utsträckning än de starkare och att ett sådant fel i slutänden skulle leda till en överskattning av risken för cat bond 3 och cat bond 4. Antagande 5 är

grunden till den fortsatta analysen av fördelningen för vindstyrkan för tropiska cykloner som träffar Pourto Rico. Anledningen till att vi valde vårt område så litet på bekostnad av kvantitet i datamängden var just för att antagande 5 skulle vara en god approximation av verkligheten.

Totalt ingår nu 129 tropiska cykloner i datamaterialet. Det är dock först från 1870 som vi har information om ENSO och AMO och från den tidpunkten har vi 117 observationer. Som Tabell 9 visar så är dessa tropiska cykloner ojämnt fördelade över de olika tillstånden för ENSO och AMO.

AMO/ENSO	El Niño	Neutral	La Niña	
Varm	9	34	30	73
Kall	10	18	16	44
	19	52	46	117

Tabell 9: Antalet observationer för de olika tillstånden av ENSO och AMO.

Att utföra en analys av fördelningsfunktionen för vindstyrkan för tropiska cykloner under år som kategoriseras som El Niño under AMO:s varma fas, där vi endast har 9 observationer är knappast meningsfullt. Så trots att jämförelsen av fördelningarna för den maximala vindstyrkan för tropiska cykloner i Atlanten under olika faser av ENSO och AMO indikerade att skillnader kan föreligga så kommer vi inte på ett effektivt sätt kunna skatta fördelningarna var för sig. Vi gör därför trots allt en modifiering av antagande 5 till att gälla även observationer från olika faser av ENSO och AMO.

En möjlighet att skatta fördelningen för vindstyrkan för tropiska cykloner som träffar Puerto Rico är nu att använda datamaterialets empiriska fördelningsfunktion. Om vi kan finna en parametrisk fördelning till vilken våra observationer kan anpassas väl så har detta tillvägagångssätt dock ett flertal fördelar i jämförelse. Resultaten blir mer generella och lättare att jämföra med övriga områden eller tidsperioder. Det ger också möjligheten att skatta "svansen" i fördelningen på ett rimligt sätt, något som är av stor betydelse för oss då de starkaste orkanerna medför störst förluster för investerarna till cat bond 3 och cat bond 4. Dessutom så kan en parametrisk fördelning släta ut"vissa fluktuationer i den empiriska fördelningen som är att vänta i ett datamaterial om endast 129 observationer, till följd av slumpmässiga variationer av den bakomliggande fördelningen. Slutligen så är en parametrisk fördelning starkt att föredra i vårt fall då våra observationer endast är angivna i intervall om 5 knop. Det gör att det finns anledning att anta att den empiriska fördelningen tenderar att "favorisera" vissa kategorier i Saffir-Simpsonskalan. Till exempel så täcker kategori 4-orkaner vindspannet 113-136 på 24 knop och kategori 3-orkaner har ett spann på 17 knop. Men fem indelningar för våra observationer (115,120,125,130,135) tillhör kategori 4 medan endast tre (100,105,110) tillhör kategori 3.

5.5.1 Extremvärdesteori och generaliserad paretofördelning

När vi nu vill anpassa en parametrisk fördelning till vindstyrkan för de tropiska cyklonerna så kan det vara hjälpsamt att istället undersöka fördelningen över ett visst tröskelvärde, eftersom vårt datamaterial inte innehåller observationer under 35 knop. En fördelning som ibland kan vara användbar för att anpassa den delmängd av en större mängd observationer som överstiger ett tröskelvärde är den generaliserade paretofördelningen, förkortad GPD (generalized Pareto distribution). I den form vi använder den i det här arbetet har fördelningen två parametrar, en formparameter ξ och en skalparameter β. Då ges fördelningsfunktionen för GPD av

$$G_{\xi,\beta}(x) = 1 - \left(1 + \xi\frac{x}{\beta}\right)^{-1/\xi} \qquad \textit{där} \quad x \in D(\xi,\beta) = \begin{cases} [0,\infty) & \text{om } \xi \geq 0, \\ [0,-\beta/\xi] & \text{om } \xi < 0. \end{cases}$$

Motiveringen till GPD:s betydelse som fördelning för att modellera toppar över tröskelvärden är relativt komplicerad och bygger på extremvärdesteori. Vi går igenom den här endast i grova drag samtidigt som vi nämner de nödvändiga antagandena för att analysen ska vara giltig. Resonemangen här bygger på Embrechts, Klüppelberg och Mikosh (1997), som ger en utförligare beskrivning av teorin och dess användningsområden.

Vi inleder med några definitioner. För en fördelningsfunktion $F(x)$ så betecknar vi den högra ändpunkten som x_F där den formella definitionen är

$$x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}.$$

Vi inför också en beteckning för funktionssvansen, som för en fördelningsfunktion $F(x)$ definieras som

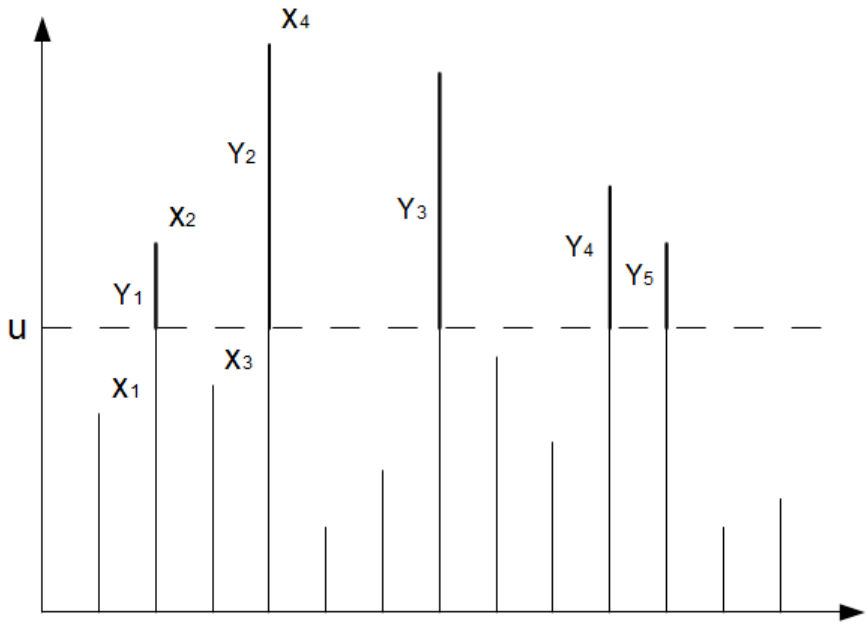
$$\bar{F}(x) = 1 - F(x).$$

Vi vill även för ett datamaterial med oberoende och likafördelad data $X_1, X_2, ..., X_n$ beskriva fördelningen för topparna $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ över ett tröskelvärde u, se Figur 13. Vi gör detta med ett komprimerat skrivsätt där vi definierar fördelningsfunktionen för topparna enligt

$$F_u(y) = P(X - u \leq y \mid X > u).$$

I extremvärdesteori är följande sats av stor betydelse, den är formulerad i bland annat Resnick (1987) där den också bevisas.

Sats 1 (Fisher-Tippett):
Anta att $X_1, ..., X_n$ är oberoende och likafördelade med fördelningsfunktion F och låt $M_n =$



Figur 13: Exempel på data $X_1, X_2, ...$ och topparna $Y_1, ..., Y_5$ över tröskelvärdet u.

$\max(X_1, ..., X_n)$. *Om det finns konstanter* (a_n), (b_n) *så att*

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\Big) = G(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

för någon sannolikhetsfördelning G *så gäller att* G *är av samma typ som en av fördelningarna nedan*

$$\textit{Fréchet:} \qquad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x > 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0.$$

$$\textit{Weibull:} \qquad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{\alpha}\}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0.$$

$$\textit{Gumbel:} \qquad \Lambda(x) = \exp\{-\mathrm{e}^{-x}\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bevis: se till exempel Resnick (1987) sida 9. □

Dessa tre fördelningar kallas gemensamt för extremvärdesfördelningar och är mycket användbara i många fall för att studera en fördelnings maximum. Vi säger att en fördelningsfunktion F tillhör *maximal domain of attraction* för en av dessa fördelningar om det för F finns sekvenser av konstanter (a_n) och (b_n) sådana att ekvation (1) är uppfylld och skriver $F \in \mathrm{MDA}(\Phi), F \in \mathrm{MDA}(\Psi)$ eller $F \in \mathrm{MDA}(\Lambda)$ beroende på vilken fördelning som G är i det aktuella fallet. I Embrechts m. fl. (1997) finns det utförligt beskrivet hur MDA ser ut för de respektive extremvärdesfördelningarna. Här kommer vi inte gå in på djupet på det ämnet utan nöjer oss istället med att i Tabell 10 ge några exempel på fördelningar som tillhör MDA för extremvärdesfördelningarna, notera dock att dessa exempel på intet sätt är uttömmande.

Fréchet MDA(Φ_α)	Weibull MDA(Ψ_α)	Gumbel MDA(λ)
Exempel på fördelningar		
Cauchy	Likformig	Exponential
Pareto	Beta	Gamma
Burr		Normal
Loggamma		Lognormal

Tabell 10: Exempel på fördelningar som tillhör MDA för de olika extremvärdesfördelningarna

För att förenkla notationen så kan man införa den så kallade *generaliserade extremvärdesfördelningen* (GEV) som brukar definieras som

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\{(-1+\xi x)^{-1/\xi}\}, & \text{om } \xi \neq 0, \\ \exp\{-\mathrm{e}^{-x}\}, & \text{om } \xi = 0, \end{cases} \tag{2}$$

där $1 + \xi x > 0$. I uttryck (2) motsvarar H_ξ Fréchetfördelningen när $\xi = \alpha^{-1} > 0$, Weibullfördelningen då $\xi = \alpha^{-1} < 0$ och Gumbelfördelningen när $\xi = 0$.

Vi är nu redo att formulera den sats som är den teoretiska grunden till varför den generaliserade paretofördelningen är användbar som modell för data som överstiger vissa tröskelvärden.

Sats 2:
För varje $\xi \in \mathbb{R}$ så gäller för en fördelningsfunktion F att $F \in MDA(H_\xi)$ om och endast om

$$\lim_{u \uparrow x_F} \sup_{0<x<x_F-u} \mid \bar{F}_u(x) - \bar{G}_{\xi,\beta(u)}(x) \mid = 0$$

för någon positiv funktion β.

Bevis: För det här beviset hänvisas till Embrechts m. fl. (1997) sida 165. □

Sats 2 är förvisso ett asymptotiskt resultat men den motiverar en anpassning av den generaliserade paretofördelningen till ett datamaterials toppar, givet att tröskelvärdet u väljs tillräckligt högt. Att $F \in \mathrm{MDA}(H_\xi)$ är ett nödvändigt krav för att fördelningen för topparna ska konvergera mot GPD. Men detta är ett svagt krav som i praktiken, med verklig data, alltid är uppfyllt och inget som vi kommer undersöka mer ingående.

Skattningar av parametrarna ξ och β kan givet observationer $x_1, ..., x_n$ tas fram med exempelvis maximum likelihood-metoden. Den generaliserade paretofördelningen har täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\beta}\Big(1 + \xi\frac{x}{\beta}\Big)^{-\frac{1}{\xi}-1}, \qquad x \in D(\xi, \beta),$$

där $D(\xi, \beta)$ är definitionsmängden som är $[0, \infty)$ när $\xi \geq 0$ och $[0, -\xi/\beta]$ när $\xi < 0$. Uttrycket för täthetsfunktionen leder till den logaritmerade likelihood-funktionen

$$\ell((\xi, \beta, \mathbf{x})) = -n \log \beta - \Big(\frac{1}{\xi} + 1\Big) \sum_{i=1}^{n} \log \Big(1 + \frac{\xi}{\beta} x_i\Big), \qquad x \in D(\xi, \beta).$$

Med numeriska metoder kan man sedan maximera $\ell((\xi, \beta, \mathbf{x}))$ för att få fram skattningar $\hat{\xi}$ och $\hat{\beta}$.

Den typiska situationen där den generaliserade paretofördelningen kan komma att användas för att skatta svansen i en fördelning inbegriper ett stort datamaterial och en del i problemet är då att välja tröskeln u "optimalt". Ett för högt val av u ger få observationer som överstiger detta värde och således stor osäkerhet i anpassningen till GPD och väljs u istället för lågt så blir approximationen att topparna följer GPD sämre. Givet ett val av u kan sedan fördelningen under tröskelvärdet u skattas med till exempel den empiriska fördelningen. Vårt fall skiljer sig något från detta. Vi är inte intresserade av att skatta fördelningen för vindstyrkor för de tropiska cykloner eller lågtryck som understiger gränsen på 34 knop för att klassas som tropisk storm. Det är för oss inte heller ett lockande alternativ att lägga tröskeln över denna gräns eftersom det dels kapar ett redan sparsamt datamaterial i två, dels lämnar oss utan ett uppenbart alternativ för att skatta fördelningen för vindstyrkan för tropiska cykloner i intervallet $[34, u]$. Vi sätter därför vår förhoppning till att $u = 33$ är ett tillräckligt högt värde för att approximationen att fördelningen för vindstyrkor följer en GPD ska vara god.

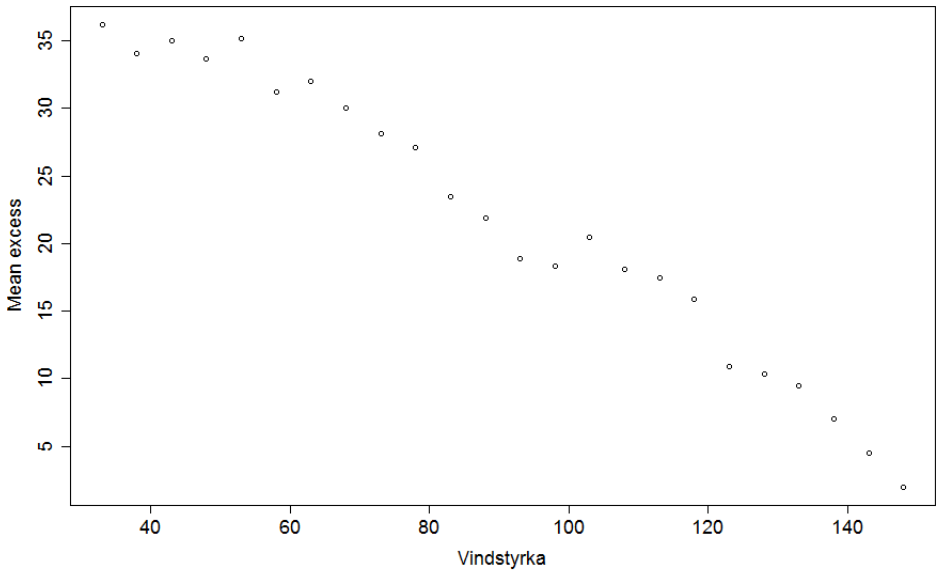
Ett konkret sätt att testa om värdet på u är lämpligt får man genom att undersöka den så kallade *mean excess function*, $e(u)$. Detta är en funktion av tröskelvärdet u som för en stokastisk variabel X definieras som

$$e(u) = E(X - u \mid X > u).$$

Man kan visa att om X har fördelningsfunktion $G_{\xi,\beta}$ så gäller att

$$e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \qquad u \in D(\xi, \beta), \quad \xi < 1,$$

vilket alltså innebär att $e(u)$ är en linjär funktion. I Embrechts m. fl. (1997) beskrivs hur man grafiskt ofta kan finna ett värde på u så att $e(u)$ är approximativt linjär för högre u-värden. För vår del handlar det som sagt inte så mycket om vilket tröskelvärde vi ska välja som ett test om anpassningen av en generaliserad paretofördelning alls är ett gångbart tillvägagångssätt. I Figur 14 ser vi den empiriska $e(u)$ för värden på u mellan 33 och 148 knop, där vi på grund av hur våra data är fördelade har antagit en steglängd på 5 knop för u. Punkterna i figuren ser ut att relativt väl följa en rät linje. Man kan dock

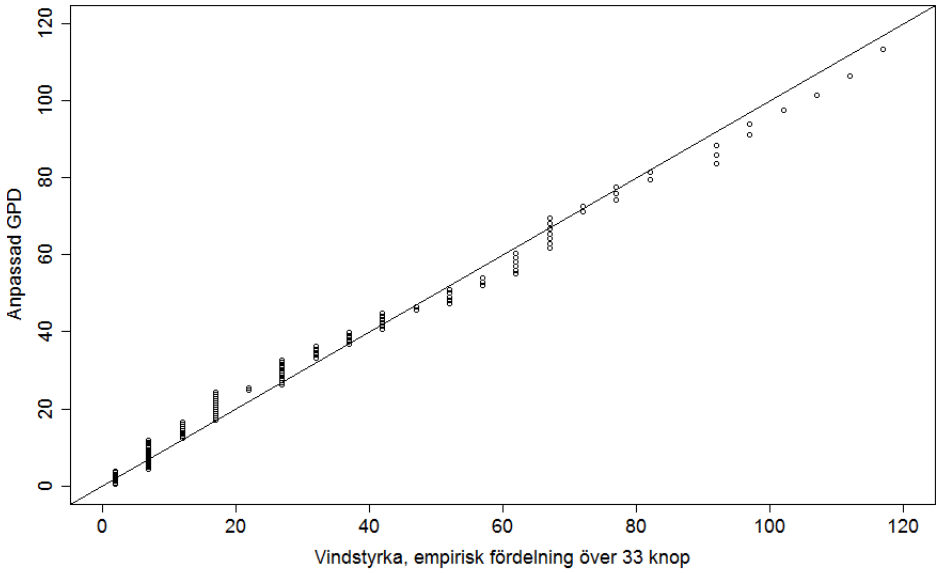


Figur 14: Mean excess-funktionen för varierande tröskelvärden u.

ana en något svagare lutning för u-värden under 60 knop. Det antyder att vår anpassning av GPD kommer att vara sämre än om vi hade haft möjligheten att sätta tröskelvärdet något högre, till exempel om vi kunnat exkludera tropiska stormar och enbart analyserat tropiska cykloner som når orkanstyrka. Den negativa lutningen som vi ser i Figur 14 är kopplad till de lätta svansarna i fördelningen för vindstyrkan. För en exponentialfördelad stokastisk variabel så är lutningen 0 medan mer tungsvansade fördelningar har en positiv lutning.

Anpassning av GPD till datamaterialet i intervallet 1870-2017 med maximum likelihood-

metoden ger skattningarna $\hat{\xi} = -0.36$ och $\hat{\beta} = 50$. I Figur 15 visas en QQ-plot av vindstyrkorna mot kvantilerna för $G_{\hat{\xi},\hat{\beta}}$ och vi ser där att anpassningen är acceptabel över hela fördelningen. För den övre delen av vårt datamaterial är anpassningen speciellt god vilket

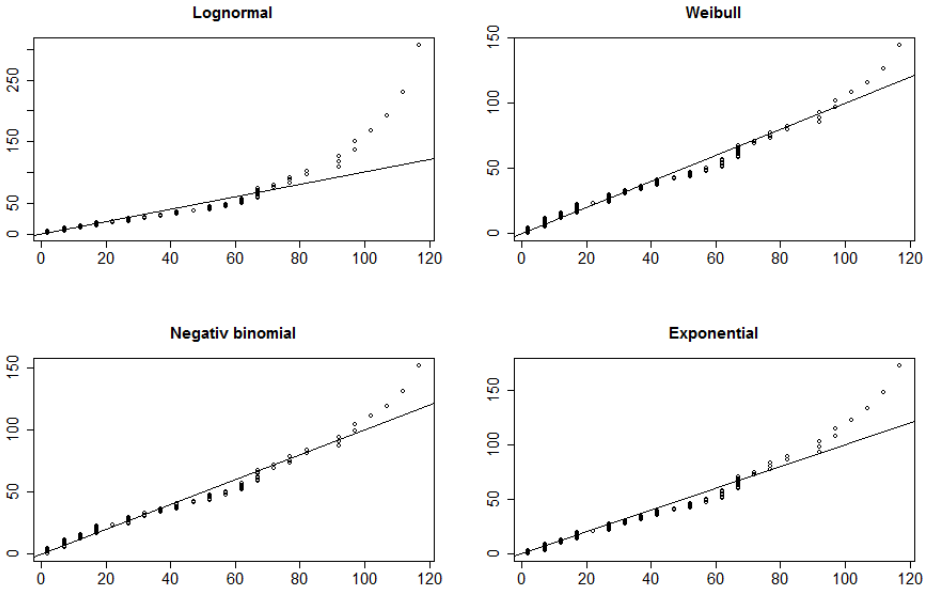


Figur 15: QQ-plot över vindstyrkan, topparna över 33 knop, mot den anpassade GPD.

vi kan se i figuren genom att kvantilerna för de båda fördelningarna nästan bildar en rät linje. För lägre värden är anpassningen något sämre då kurvaturen i figuren antyder att en större del av data över vindstyrkan ligger i intervallet $[40, 70]$ och en mindre del i intervallet $[70, 100]$ jämfört med vad som är förväntat givet att data verkligen är oberoende och likafördelade med fördelningsfunktion $G_{\hat{\xi},\hat{\beta}}$.

Trots att vi just konstaterat att användandet av en generaliserad paretofördelning ger en något så när tillfredställande anpassning till vårt datamaterial, så kan det vara bra att jämföra anpassningen med den vi kan få från några andra fördelningar som är tänkbara kandidater för att beskriva data. I Figur 16 visas QQ-plotar över vårt datamaterial mot anpassad lognormalfördelning, weibullfördelning, negativ binomialfördelning och exponentialfördelning. Av dessa fördelningar förefaller Weibullfördelningen vara den som bäst kan anpassas till vårt datamaterial. Det är dock tydligt i alla graferna hur punkterna avviker upp från den räta linjen för de högsta kvantilerna. Detta tyder på att samtliga av dessa fyra fördelningar är för tungsvansade för att kunna beskriva vårt datamaterial väl och att den generaliserade paretofördelningen därför är att föredra.

I det här avsnittet har vi i den generaliserade paretofördelningen hittat en fördelning som



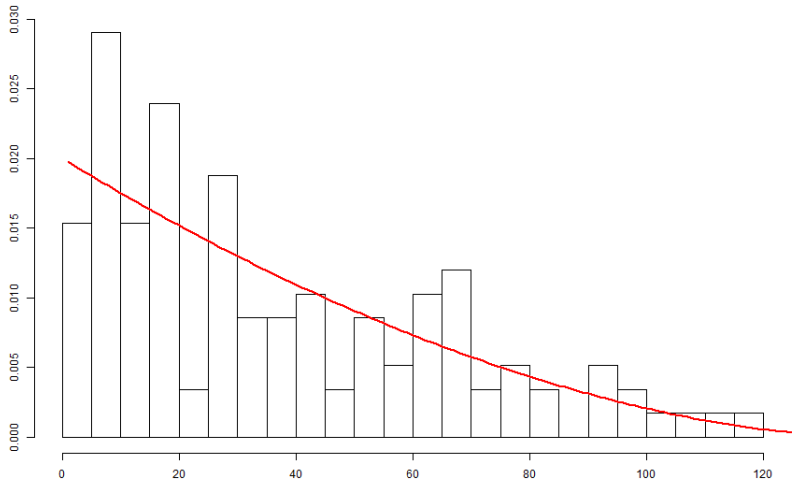
Figur 16: QQ-plot över topparna för data mot olika parametriska fördelningar.

stämmer väl överens med den empiriska fördelningen och även givit en teoretisk grund till varför vi kunde förvänta oss att så skulle vara fallet. Vi kan dock syna förutsättningarna för giltigheten i tillämpningen av Sats 2 ytterliggare. Vi har redan konstaterat att ett högre tröskelvärde u förmodligen skulle resulterat i en bättre anpassning till GPD för fördelningen över u, men att det lämnar oss utan möjlighet att effektivt skatta fördelningen för vindstyrkan för tropiska cykloner under u.

För att vi ska kunna tillämpa Sats 2 så ska även observationer vara oberoende och likafördelade. Vi har inte någon anledning att betvivla att vindstyrkorna för olika tropiska cykloner i området skulle vara oberoende, däremot så finns det ett antal möjliga invändningar mot att de skulle vara likafördelade. Vi har uppenbart en säsongsvariation i fördelningen då de kraftigaste tropiska cyklonerna i regel uppträder under orkansäsongens mest aktiva månader medan tropiska cykloner utanför säsongen sällan når orkanstyrka. Men då vi på grund av utformningen av våra cat bonds endast är intresserade av fördelningen för vindstyrka obetingat när på året de tropiska cyklonerna inträffar så innebär det inte någon komplikation för oss. Att vi ignorerar eventuella effekter från ENSO och AMO kan dock få följden att vi inte inkluderar effekter som påverkar sannolikheten om cat bond 3 eller cat bond 4 triggas ett givet år. Om AMO har inverkan på fördelningen för vindstyrka för de tropiska cyklonerna så kan även valet av tidsperioden 1870-2017 för datamaterialet ifrågasättas, då det innehåller klart fler år som vi definierar som varma AMO jämfört med

kall AMO, vilket kan leda till en bias i skattningen av GPD.

Vi avrundar det här avsnittet med att i Figur 17 ge en överblick av den empiriska täthetsfunktionen i form av ett histogram, tillsammans med den anpassade täthetsfunktionen. Vi



Figur 17: Histogram över den empiriska fördelningen för topparna av vindstyrkan och den anpassade GPD som röd kurva.

ser förvisso att den anpassade fördelningen ger utrymme för vindstyrkor högre än vad som ingår i vårt datamaterial, men att svansen till höger om den högsta observerade vindstyrkan är mycket tunn. Som vi har nämnt tidigare så är definitionsmängden uppåt begränsad om parametern ξ är negativ och för vår skattning av parametrarna så är den högsta vindstyrka som en tropisk cyklon kan anta i vårt område 171 knop och bara en av tusen tropiska cykloner överstiger 160 knop.

5.6 Modellering av ENSO och AMO

Vi har tidigare undersökt vilken inverkan ENSO och AMO kan antas ha på sannolikheten att Puerto Rico träffas av tropiska cykloner men för att kunna implementera denna så måste vi också inkludera modeller för klimatfenomenen själva. ENSO är förstås en process i kontinuerlig tid men då vi i vår modell endast är intresserade av ett värde för att klassificera ett givet år som ett av våra tre tillstånd, så försöker vi modellera ENSO så enkelt som möjligt utefter våra ändamål utan att göra några anspråk på att fånga den invecklade dynamiken i klimatfenomenet. Vi kan se ENSO som en Markovkedja i diskret tid där varje tidssteg är ett år och de enda tillstånden är $\{+, 0, -\}$, svarandes mot de tre ENSO-tillstånden El Niño, neutral och La Niña som vi definierat tidigare. Om vi sedan

skattar övergångssannolikheterna i denna Markovkedja med data från 1870 till 2017 så ges övergångsmatrisen P_{ENSO} av

$$P_{\text{ENSO}} = \begin{pmatrix} p_{++} & p_{+0} & p_{+-} \\ p_{0+} & p_{00} & p_{0-} \\ p_{-+} & p_{-0} & p_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{40} & \frac{15}{40} & \frac{17}{40} \\ \frac{22}{63} & \frac{29}{63} & \frac{12}{63} \\ \frac{9}{44} & \frac{20}{44} & \frac{15}{44} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

På grund av AMO:s jämfört ENSO långa perioder så avslöjar vårt datamaterial sedan 1870 inte så mycket om hur processen beter sig och när vi kan anta att skiften mellan kall och varm AMO inträffar. Sedan 1870 har två kalla faser om 29 respektive 34 år inträffat och en hel varm fas om 35 år samt två avbrutna varma faser där vi kan konstatera att de åtminstone varade i 29 respektive 21 år, se Figur 5. En möjlighet är att anta längden på varma och kalla faser som stokastiska, oberoende och likafördelade. Om vi dessutom antar att de är normalfördelade och skattar parametrarna utifrån de fullständiga faserna så får vi skattningen att faserna har fördelningen $\mathcal{N}(33, 10)$.

6 Prissättning av cat bonds

I och med cat bonds introduktion och växande popularitet på finansmarknaden så har flertalet metoder för hur dessa obligationer ska kunna prissättas tagits fram. Ett antal artiklar beskriver avancerade modeller i kontinuerlig tid, se till exempel Vaugirard (2003) eller Nowak och Romaniuk (2013). Då de cat bonds vi undersöker här alla är parametriska och inte triggas beroende på de faktiska kostnaderna som uppkommer så lämpar de sig väl för en modell i diskret tid. Några som beskriver en utformning av priset av cat bonds i diskret tid är Cox och Pedersen (2000) och den modell som vi presenterar i det här avsnittet bygger i huvudsak på deras artikel.

Ett viktigt antagande som vi kommer att använda oss av framöver är att finansmarknaden är oberoende av naturkatastrofer. Det innebär att räntor och priset på obligationer (cat bonds undantaget), aktier och andra tillgångar på finansmarknaden inte påverkas av om en naturkatastrof inträffar eller inte. Det här antagandet är av stor betydelse utan vilket den prissättningsmodell som vi kommer använda oss av inte är giltig. Antagandet kan verka kontraintuitivt men grundar sig i att lokala katastrofer, även de med kostnader i mångmiljardklassen, bara marginellt påverkar den globala finansmarknaden. Antagandet har även styrkts empiriskt, två studier som båda undersöker korrelationen mellan kostnader för katastrofer och priset på tillgångar så som aktier och statsobligationer är gjorda av Froot m. fl. (1995) och Hoyt och Mccullough (1999). I båda studierna är den skattade korrelationen så låg att den inte på standardnivåer är signifikant skild från noll. Dessa studier är gjorda för ett antal år sedan och kostnaderna för katastrofer har ökat markant sedan dess, vilket skulle kunna ha påverkan på antagandets validitet. Detta är dock inget som vi kommer undersöka eller ta hänsyn till i det här arbetet.

6.1 En inkomplett marknad

Vi inleder med att definiera Ω som den mängd som innehåller alla möjliga tillstånd som vår modell kan befinna sig i. Det som specificerar ett tillstånd $\omega \in \Omega$ kommer att variera i avsnitten nedan och vi kommer justera definitionen av ω utefter vad som lämpar sig för tillfället. I vår mest allmänna form beror ω både på finansiella aspekter så som ränteprocesser och på katastrofaspekter, till exempel vilken fas ENSO är i och om en tropisk cyklon med en specifik vindstyrka träffar Puerto Rico.

Vi betraktar nu två godtyckliga tidpunkter t_0, t_1 sådana att $t_0 < t_1$. En marknad sägs vara *komplett* om vi vid tidpunkt t_1 med säkerhet kan generera ett godtyckligt kassaflöde utifrån de investeringar vi gör vid tid t_0. I en sådan marknad är alltså värdet på varje framtida kassaflöde implicerat av priset på de tillgångar som handlas på marknaden. Vi börjar med att ge ett exempel på en komplett marknadsmodell och visar sedan hur denna marknad blir inkomplett när vi inför risken för katastrofer i modellen. Exemplet är en modifierad version av ett exempel från Cox och Pedersen (2000).

Allmänt gäller, från *fundamental theorem of asset pricing*, att om vår marknad är fri från arbitrage så existerar åtminstone ett riskneutralt sannolikhetsmått under vilket priset för stokastiska kassaflöden är lika med det förväntade diskonterade värdet. Vi betecknar ett sådant sannolikhetsmått Q, med sannolikheter q.

Vi antar i det här exemplet en ränteprocess $\{r_k | k = 0, 1, ...\}$ där räntan i varje tidssteg antingen går upp ett steg med sannolikhet q eller ned ett steg med sannolikhet $(1-q)$. För att få en mer komprimerad notation för räntan så lägger vi till en exponent som beskriver räntans utveckling upp till den aktuella tidpunkten, där + innebär att räntan gått upp och - att räntan gått ned. Vi betraktar två nollkupongsobligationer med löptid på en, respektive två, tidsperioder som båda handlas på marknaden, där vi för enkelhetens skull sätter det nominella värdet för obligationerna till en monetär enhet. Om vi benämner priset för obligationerna PB_1 och PB_2 så gäller att

$$\mathrm{PB}_1 = \frac{1}{1 + r_0}$$

eftersom r_0 är känd vid tid 0. Vi har också

$$\mathrm{PB}_2 = E^Q\Big[\frac{1}{(1+r_0)}\frac{1}{(1+r_1)}\Big] = \frac{1}{1+r_0}E^Q\Big[\frac{1}{1+r_1}\Big] = \frac{1}{1+r_0}\Big(\frac{q}{1+r_1^+} + \frac{1-q}{1+r_1^-}\Big).$$

där vi utgående från marknadspriset PB_2 kan lösa ut sannolikheten q som alltså är entydigt bestämd. Om vi vid tid 0 betraktar en portfölj bestående av n_1 obligationer med löptid 1 och n_2 obligationer med löptid 2 så är portföljens värde för tid 1 beroende av om räntan går upp eller ned och således en stokastisk varibel. Genom att uttrycka det på matrisform

så kan vi skriva värdet för portföljen vid tid 1 som

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1+r_1^+} \\ 1 & \frac{1}{1+r_1^-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Då vi antar att $r_1^+ > r_1^-$ så är 2×2-matrisen i uttryck (4) inverterbar. Det betyder att om vi vid tid 1 vill generera ett specifikt kassaflöde: $\begin{bmatrix} c^+ \\ c^- \end{bmatrix}$, där c^+ (c^-) betecknar kassaflödet givet att räntan går upp (ned), så kan det åstadkommas med säkerhet från tid 0 genom portföljen

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1+r_1^+} \\ 1 & \frac{1}{1+r_1^-} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c^+ \\ c^- \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Priset för denna portfölj är bestämt av marknadens pris för de båda obligationerna och då kassaflödena var helt godtyckliga så är alltså denna enkla marknadsmodell komplett.

Vi undersöker nu vad som händer när vi inkluderar katastrofrisk i den här modellen men vi låter ränteprocessen fungera som ovan vilket medför att vi använder oss av antagandet att den är oberoende av förekomsten av katastrofer. Antalet tillstånd som modellen kan befinna sig i måste nu utökas. Då vi tidigare hade $\omega(t = 1) \in \{r_1^+, r_1^-\}$ så får vi i och med införandet av katastrofrisk $\omega(t = 1) \in \{\{r_1^+, \alpha\}, \{r_1^+, \beta\}, \{r_1^-, \alpha\}, \{r_1^-, \beta\}\}$, där vi låter α beteckna inträffandet av en katastrof och β att ingen katastrof inträffar. Vi kan igen ställa upp en ekvation för det kassaflöde som en portfölj, startad vid tid 0, bestående av n_1 obligationer med löptid 1 och n_2 obligationer med löptid 2, genererar vid tid 1

$$\begin{bmatrix} c^{+,\alpha} \\ c^{+,\beta} \\ c^{-,\alpha} \\ c^{-,\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1+r_1^+} \\ 1 & \frac{1}{1+r_1^+} \\ 1 & \frac{1}{1+r_1^-} \\ 1 & \frac{1}{1+r_1^-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Det är lätt att se att vi i det här fallet inte kommer kunna ta fram en ekvation som den i uttryck (5) där varje kassaflöde för tid 1 kan åstadkommas för någon linjärkombination av våra obligationer. Men observera att problemet inte bara är att vi har för få tillgångar som handlas på marknaden. Vi skulle kunna utöka vår modell med nollkupongsobligationer med löptid 3 respektive 4 tidssteg för att få en kvadratisk matris i ekvationen (6). Men då dessa obligationer är oberoende av inträffandet av katastrofer så kommer raderna i matrisen nödvändigtvis vara linjärt beroende och därmed matrisen inte inverterbar. Därför kommer vi aldrig kunna spänna upp hela utfallsrummet i vår modell då vi inkluderar katastrofrisk vilket är ekvivalent med att vi inte kan generera godtyckliga kassaflöden. Vi har alltså en *inkomplett marknad* och vi ser att så alltid kommer vara fallet när vi inkluderar katastrofrisk om vi saknar tillgångar på marknaden vars pris är beroende av inträffandet av katastrofer.

6.2 Prissättning i en nyttomaximerande marknad

I det här avsnittet presenterar vi en del definitioner och resonemang kring hur individer agerar på finansmarknaden och vad detta får för konsekvenser för prissättning av osäkra kassaflöden. Det är allmänna resultat som vi ändå går igenom här då de ligger till grund för den matematiska motiveringen av den modell som vi till slut använder för att prissätta cat bonds i det här arbetet. Delarna i det här avsnittet är i huvudsak hämtade från Huang och Litzenberger (1988) men teorin om nyttofunktioner och representanter går även att hitta i andra verk som behandlar grunderna i finansmatematik.

Som tidigare låter vi mängden Ω innehålla alla möjliga naturtillstånd, men gör här inga inskränkningar kring vad som definierar ett element i Ω. Till en början betraktar vi två tidpunkter, tid 0 och tid 1, där individer vid tid 0 gör val, det vill säga investeringar, som får utfall vid tid 1. En individs *konsumtionsplan* x är en vektor av längd $|\Omega|$, där det i:te elementet beskriver individens kapital vid tid 1 givet att vi befinner oss i tillstånd ω_i. Det som är i fokus här är individens prioriteringar och hur olika konsumtionsplaner värderas. För att kunna mäta just detta så inför vi en *nyttofunktion* $u(\cdot)$ sådan att en individ föredrar konsumtionsplan x över konsumtionsplan y om och endast om

$$E[u(x)] \geq E[u(y)].$$

Här är väntevärdet framräknat över alla möjliga tillstånd enligt

$$E[u(x)] = \sum_{\Omega} u(x_{\omega_i}) \cdot P(\omega_i)$$

där sannolikhetsmåttet P är grundat i individens egna uppfattning av sannolikheterna. Vi antar alltså att individer alltid strävar efter att maximera den förväntade nyttan och att det är på den här grunden som de fattar sina investeringsbeslut. Vi kommer inte ge ett explicit uttryck för en nyttofunktion i det här arbetet men teorierna som vi vill använda är bara tillämpliga givet att nyttofunktionerna lyder under vissa villkor. Vi går därför igenom definitionerna för dessa villkor och försöker beskriva de implikationer som de får på marknadsmodellen.

Vi börjar med att konstatera att en individs nyttofunktioner är strikt växande inom funktionens hela definitionsmängd om och endast om individen strikt föredrar mer framför mindre. När vi talar om mängd så handlar det om individens tillgångar i form av vad som än handlas på marknaden, men vi kan tänka på det som pengar.

En individ som inte är villig att acceptera riskfyllda investeringar där det förväntade utfallet är ickepositivt kallas (strikt) *riskavert*. För att se hur riskaversion tar sig uttryck genom nyttofunktionen så går vi igenom ett räkneexempel. Exemplet återfinns även i Huang och Litzenberger (1988) sida 17.

Vi betraktar ett spel som ger positiv utdelning a med sannolikhet p och negativ utdelning b med sannolikhet $1-p$. Vi säger att spelet är aktuariellt rättvist om det förväntade resultatet är 0, det vill säga om

$$pa + (1-p)b = 0. \tag{7}$$

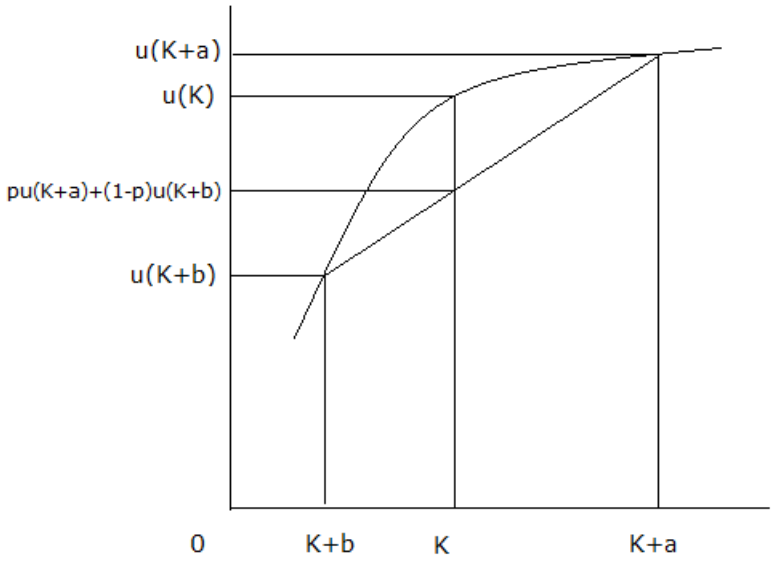
För en individ med startkapital K som är riskavert så gäller nu att

$$u(K) > p \cdot u(K+a) + (1-p) \cdot u(K+b). \tag{8}$$

Genom att använda uttryck (7) för ett aktuariellt rättvist spel så kan vi skriva om olikheten (8) som

$$u(p(K+a) + (1-p)(K+b)) > p \cdot u(K+a) + (1-p) \cdot u(K+b)$$

vilket innebär att nyttofunktionen för en riskavert individ är konkav. En illustration av detta ges i Figur 18.



Figur 18: Ett exempel på en nyttofunktion för en riskavert individ. Bearbetning av figur från Huang och Litzenberger (1988) sida 18.

En nyttofunktion är *tidsadditativ* över en tidsperiod $[0, T]$ om det för en godtycklig tillståndsvektor $(z_0, ..., z_T)$ finns nyttofunktioner $u_t(\cdot)$ sådana att

$$u(z_0, ..., z_T) = \sum_{t=0}^{T} u_t(z_t).$$

Huang och Litzenberger (1988) understryker att detta är ett starkt antagande då det innebär att vad en individ konsumerat upp till tid $t = k$ inte kommer ha någon effekt på individens konsumtionsval för tider $t > k$.

Vi betraktar nu en ekonomi med I stycken individer. Vi betecknar individ i:s tillgångar vid tid 0 som c_{i0}, vid tid 1 som $c_{i1\omega}$ och de samlade tillgångarna i hela systemet vid tid 0 och tid 1 för C_0 respektive $C_{1\omega}$. Vi säger att en fördelning av tillgångar över systemets individer är *paretoeffektiv* om dels

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{I} c_{i0} = C_0 \\ \sum_{i=1}^{I} c_{i1\omega} = C_{1\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega, \end{cases}$$

dels att ingen annan sådan fördelning existerar som strikt ökar nyttan för minst en individ utan att sänka nyttan för någon individ.

Under antagande att individers nyttofunktioner är strikt växande, konkava, differentierbara, oberoende av naturtillstånd ω och tidsadditativa samt att fördelningen av tillgångar i systemet är paretoeffektiv, så visar Huang och Litzenberger att priser i ekonomin bestäms som om det fanns en enda individ med hela systemets tillgångar. Denna så kallade representanten har i sin tur en tidsadditativ och tillståndsoberoende nyttofunktion och man kan visa att priset för en tillgång som är värd 1 vid tid 1 givet ω och 0 annars, vid tid 0 är

$$\frac{P(\omega)u_1'(C_{1\omega})}{u_0'(C_0)}. \tag{9}$$

Uttryck (9) kan generaliseras till en godtycklig storlek som tillåts variera över naturtillstånd. Priset V vid tid 0 för ett sådant kassaflöde $d_1 = d_1(\omega)$ vid tid 1 får vi genom att ta väntevärdet över alla möjliga tillstånd $\omega \in \Omega$, vilket ger

$$V(d_1) = E\Big[\frac{u_1'(C_1)d_1}{u_0'(C_0)}\Big].$$

Vi betecknar processen för systemets aggregerade tillgångar över tidsperiod $[0, T]$ som $\{C_k | k = 1, 2, ..., T\}$, där vi valt att inte skriva ut processens beroende av ω. Det följer nu att priset vid tid 0 för ett godtyckligt kassaflöde upp till tid T, $\{d(k, \omega) | k = 1, 2, ..., T\}$ ges av uttrycket

$$V(d) = E\Big[\sum_{k=1}^{T} \frac{u_k'(C_k)}{u_0'(C_0)} d(k)\Big]. \tag{10}$$

6.3 En modell för prissättning av cat bonds

Vi går nu över till att strukturera upp ramverket för den modell som vi ska använda för att prissätta cat bonds. Vi definierar två olika sannolikhetsrum $(\Omega^{(1)}, \mathcal{F}^{(1)}, P_1)$ som beskriver

de delar inom modellen som beror på finansiell risk, och $(\Omega^{(2)}, \mathcal{F}^{(2)}, P_2)$ som beskriver de delar som är kopplade till katastrofrisk. Mer specifikt så är $\Omega^{(1)}$ mängden av alla finansiella tillstånd som vår modell kan befinna sig i. För vår del är dock ett tillstånd endast beroende av den aggregerade mängden tillgångar i systemet. Filtrationen $\mathcal{F}^{(1)}$ är en ökande mängd som beskriver informationsflödet om finansmarknaden till individer i ekonomin. Detta informationsflöde kommer för oss att handla om priser på riskfria obligationer. Sannolikhetsmåttet P_1 beskriver sannolikheten för olika tillstånd $\omega^{(1)} \in \Omega^{(1)}$. För det andra sannolikhetsrummet så innehåller $\Omega^{(2)}$ samtliga tillstånd som beror på katastrofrisk. Det vill säga, dels om en tropisk cyklon med en specifik vindstyrka träffar Puerto Rico, dels vilka tillstånd processer som ENSO och AMO befinner sig i. Filtrationen $\mathcal{F}^{(2)}$ är processen av information om katastrofrisk, vilket för oss handlar om information om processerna ENSO och AMO. Slutligen så är sannolikhetsmåttet P_2 det som beskriver sannolikheten för ett tillstånd $\omega^{(2)} \in \Omega^{(2)}$ under $\mathcal{F}^{(2)}$.

Sannolikhetsrummet för hela modellen definierar vi som $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, där

$$\Omega = \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$$

vilket medför att ett element $\omega \in \Omega$ kan beskrivas som $\omega = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)})$. Vi definierar filtrationen $\mathcal{F}$ på motsvarande sätt, det vill säga

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(1)} \times \mathcal{F}^{(2)}.$$

Vi gör nu antagandet, som vi motiverat i tidigare avsnitt, att händelser som beror enbart på finansiell risk och händelser som beror enbart på katastrofrisk är oberoende av varandra. Antagandet implementeras i modellen genom att vi definierar sannolikhetsmåttet för den fullständiga modellen som

$$P(\omega) = P_1(\omega^{(1)}) \cdot P_2(\omega^{(2)}).$$

Vi är nu redo att anpassa teorin med representanten för prissättning inom vår modell. Uttryck (10) för priset av ett godtyckligt kassaflöde kan generaliseras till att gälla från tid n till tid T. Vi får då uttrycket

$$E^P\Big[\sum_{k=n+1}^{T} \frac{u_k'(C_k)}{u_n'(C_n)} d(k) \Big| \mathcal{F}_n\Big]. \tag{11}$$

Vi kan använda uttryck (11) för att definiera en ränteprocess $\{r(k)|k = 0, 1, 2, , ..., T-1\}$. För givet att vi befinner oss vid tid k så är priset för en monetär enhet, utbetald med säkerhet vid nästa tidssteg, $k+1$, bestämt enligt

$$E^P\Big[\frac{u_{k+1}'(C_k)}{u_k'(C_{k+1})} \Big| \mathcal{F}_k\Big].$$

Därför gäller att

$$\frac{1}{1+r(k)} = E^P\Big[\frac{u'_{k+1}(C_k)}{u'_k(C_{k+1})}\Big|\mathcal{F}_k\Big] \iff r(k) = E^P\Big[\frac{u'_{k+1}(C_k)}{u'_k(C_{k+1})}\Big|\mathcal{F}_k\Big]^{-1} - 1. \tag{12}$$

Vi gör nu i enlighet med Cox och Pedersen ett byte av sannolikhetsmått. Vi introducerar sannolikhetsmåttet Q och *Radon-Nikodym-derivatan* $\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_T}$ för all information under $[0,T]$. Radon-Nikodym-derivatan för ett byte av sannolikhetsmått från P till Q kan allmänt definieras som

$$Q(A) = E^P\Big[1_A \frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_T}\Big] \qquad \forall A \in \mathcal{F}_T$$

och Cox och Pedersen visar att, genom att sätta

$$\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_T} = [1+r(0)][1+r(1)]...[1+r(T-1)]\frac{u'_T(C_T)}{u'_0(C_0)}$$

så reduceras uttryck (10) för priset av ett godtyckligt kassaflöde under sannolikhetsmåttet Q till

$$V(d) = E^Q\Big[\sum_{k=1}^{T} \frac{1}{[1+r(0)][1+r(1)]...[1+r(k-1)]} d(k)\Big]. \tag{13}$$

Med andra ord så är priset för ett kassaflöde lika med det diskonterade väntevärdet med avseende på sannolikhetsmåttet Q och ränteprocessen definierad i uttryck (12).

Vi gör nu antagandet att processen $\{C_k | k = 0, 1, ...T\}$, som beskriver den aggregerade mängden tillgångar i ekonomin, endast beror på finansiell risk och alltså är oberoende av katastrofrisk. Lite mer formellt så innebär det att

$$C_k(\omega) = C_k((\omega^{(1)}, \omega^{(2)})) = C_k(\omega^{(1)}) \qquad \forall k \in [0,T], \forall \omega \in \Omega.$$

Det här antagandet ligger i linje med tidigare antaganden om att finansiell risk är oberoende av katastrofrisk, men är i bästa fall en approximation av verkliga förhållanden då tropiska cykloner i Atlanten uppenbarligen orsakar förluster i tillgångar som därför påverkar C. Att vi ändå kan göra antagandet beror på, som vi även diskuterat tidigare, att den globala ekonomin endast påverkas marginellt av lokala naturkatastrofer. Antagandet om att de aggregerade tillgångarna endast beror på finansiell risk förenklar prissättningen av cat bonds avsevärt då det medför att också ränteprocessen i uttryck (12) och därmed även Radon-Nikodym-derivatan endast beror på finansiell risk. Att väntevärdet av en stokastisk variabel, X, som bara beror på katastrofrisk nu är oberoende av om vi använder sannolikhetsmåttet Q eller P följer genom

$$E^Q[X] = E\Big[X\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_T}\Big] = E[X]E\Big[\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_T}\Big] = E[X]\cdot 1 = E[X]. \tag{14}$$

Vi betecknar kassaflödet från en cat bond till en investerare vid tid k som $b(k)$. Eftersom $b(k)$ för alla fyra cat bonds i det här arbetet endast beror på katastrofrisk så följer det från uttryck (13) och (14) för priset av ett kassaflöde under Q att priset för en cat bond med utbetalningar $b(k)$ vid tid k kan skrivas som

$$P(\text{CB}) = E^Q\Big[\sum_{k=1}^{T} \frac{1}{[1+r(0)][1+r(1)]...[1+r(k-1)]}\Big] E^P[b(k)].$$

Om vi betecknar priset vid tid 0 för en nollkupongsobligation som med sannolikhet 1 ger en monetär enhet vid tid n som $P(n)$ så kan vi skriva priset för en cat bond på en mer kompakt form

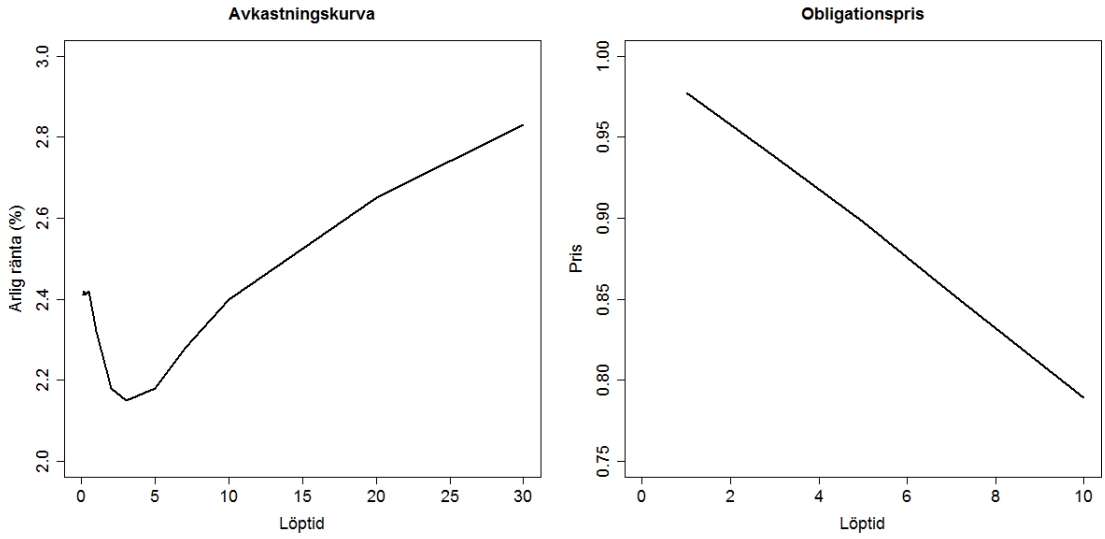
$$P(\text{CB}) = \sum_{k=1}^{T} P(k) E^P[b(k)]. \tag{15}$$

I formeln för priset av en cat bond så kan vi beräkna $E^P[b(k)]$ givet en modell för sannolikheten att en specifik katastrof inträffar. Vi behöver således bara kunna prissätta en nollkupongsobligation med godtycklig löptid för att ta fram priset för våra cat bonds. USA:s finansdepartement, United States Department of the Treasury, är en institution som ger ut nollkupongsobligationer med varierande löptid. Då den amerikanska staten är garant för dessa så kan de ses som nära nog riskfria. Finansdepartementet beräknar dagligen en avkastningskurva, där räntan anges som en funktion av låneperioden, baserad på priserna för obligationer som auktionerats ut (United States Department of the Treasury, u. å.). Givet den årliga räntan för obligationerna så är det enkelt att översätta det till priset för obligationer som betalar 1 vid löptidens slut. I Figur 19 så visas till vänster finansdepartementets framräknade ränta som en funktion av löptiden och till höger visas priset mot löptiden på obligationer som vid löptidens slut betalar ut en monetär enhet. Data är hämtat den 14 maj 2019 och som exempel så gällde då att priset för en obligation med löptid ett år var 0.978 och priset för en obligation med löptid tio år var 0.781.

7 Resultat

I föregående avsnitt så gavs i uttryck (15) en kompakt formel för att prissätta våra cat bonds givet storlek på kupongerna, kännedom om den aktuella yieldkurvan samt riskmodeller för att beräkna sannolikheten att en given cat bond triggas. Ett ekvivalent tillvägagångssätt som vi kommer använda oss av här är att anta att alla cat bonds ges ut till försäljning för en monetär enhet och att vi utgående från detta bestämmer storleken på kupongerna.

Vi går igenom alla fyra cat bonds var för sig, vilka kassaflöden som de ger upphov till och skattar med hjälp av simuleringar kupongstorleken som funktion av vilka tillstånd ENSO



Figur 19: Till vänster: avkastningskurva för nollkupongsobligationer från USA:s finansdepartement. Till höger: det framräknade priset för nollkupongsobligationer.

och AMO befinner sig i vid tecknandet av aktuell cat bond. Vi betraktar antagande 1-5 som giltiga och skattar väntevärdet av antalet tropiska cykloner i Atlanten beroende på ENSO och AMO enligt Tabell 8. Vidare låter vi $\hat{p}^u_{träff} = 26/1725$ utgöra skattningen av träffsannolikheten för tropiska cykloner i Atlanten och använder den generaliserade paretofördelningen med parametrar $\xi = -0.36$ och $\beta = 50$ som fördelning för vindstyrkan med vilken tropiska cykloner träffar Puerto Rico. För att modellera ENSO så antar vi att processen följer en Markovkedja med övergångsmatris som den i uttryck (3). För AMO antar vi att skiften mellan kall och varm fas inte kan ske för cat bond 1 och cat bond 3 där löptiden endast är ett år. Däremot kan skiften ske för cat bond 2 och cat bond 4 och då är fasernas längd normalfördelade med parametrar $\mu = 33$ och $\sigma^2 = 10$. Slutligen antar vi att alla cat bonds ges ut i september året innan de börjar gälla, vilket innebär att årets ENSO-tillstånd är känt vid tidpunkten för utgivning.

7.1 Cat bond 1

För denna cat bond är kassaflödet vid tid ganska enkelt att beräkna. Vi inför den stokastiska variabeln X_1 som antar värde 0 givet att ingen tropisk cyklon med vindstyrka på minst 34 knop träffar Puerto Rico under kommande kalenderår och värdet 1 annars. Om vi betecknar kassaflödet vid löptidens slut för denna cat bond d_1 så följer att

$$d_1 = (c + 0.2) \cdot 1_{\{X=0\}} + 0.8, \tag{16}$$

där $1_{\{A\}}$ är indikatorfunktionen av mängden A. Vi kan beteckna det förväntade kassaflödet $Ed_1 = E[d_1]$ varpå det genast följer från ekvation (16) att

$$Ed_1 = (c + 0.2) \cdot P(X = 0) + 0.8.$$

I det här fallet så skulle det på grund av denna cat bonds enkla struktur vara möjligt att uppskatta $P(X = 0)$ under antagandena i vår modell. Även här blir dock beräkningarna ganska omfattande och fördelen med ett analytiskt uttryck för det förväntade kassaflödet inom vår modell är inte stor. Därför kommer skattningen här, liksom för de övriga cat bonds, bygga på simuleringar. Trots att AMO i dagsläget befinner sig i en varm fas så utför vi simuleringar för både kall och varm AMO samt alla ENSO-tillstånd. I Tabell 11 ser vi skattningar av $P(X = 1)$ för samtliga starttillstånd baserat på 1000000 simuleringar och därifrån är det tydligt att AMO har stor betydelse för om Puerto Rico träffas av tropiska cykloner med styrka på minst 34 knop. Vi ser också att tillståndet för ENSO då cat bonds ges ut har viss, men inte alltför stor betydelse. Det kommer sig från att i vår modell så är det stor osäkerhet kring vilket tillstånd ENSO kommer befinna sig i nästa år, givet dagens tillstånd.

Tillstånd	El Niño	Neutralt	La Niña
Varm AMO	18.4	17.3	18.2
Kall AMO	13.6	12.8	13.5

Tabell 11: Skattning i procent av $P(X = 1)$, sannolikheten att cat bond 1 triggas, givet tillstånd för AMO och ENSO vid utgivning av cat bond.

Givet den ettåriga räntan på en nollkupongsobligation så kan vi utifrån ekvation (15) lösa ut värdet på kupongen. Vi får uttrycket

$$1 = P(1) \cdot [(c + 0.2) \cdot P(X = 0) + 0.8],$$

som med en ränta på 2.11 procent och sannolikheterna i Tabell 11 ger värden på kupongen mellan 5.16 och 6.89 procent som redovisas i Tabell 12.

Tillstånd	El Niño	Neutralt	La Niña
Varm AMO	6.89	6.52	6.82
Kall AMO	5.37	5.16	5.34

Tabell 12: Beräknade värden på kupongen i procent för cat bond 1 för olika starttillstånd.

7.2 Cat bond 2

Strukturen för cat bond 2 skiljer sig från cat bond 1 genom att det är en obligation som sträcker sig över en tioårsperiod. Vi definierar igen en stokastisk variabel $X_2(t)$ liknande

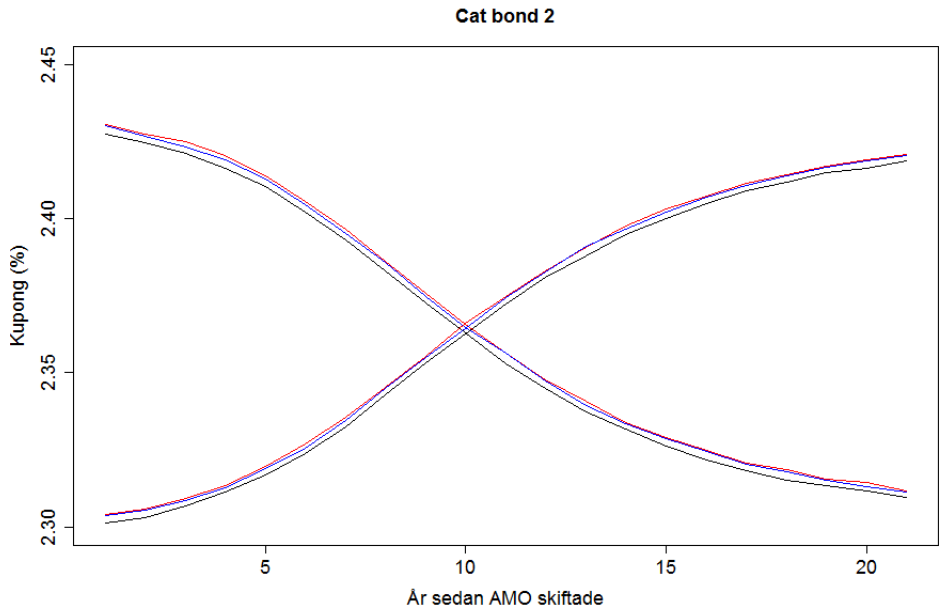
den för cat bond 1 men med skillnaden att X_2 har ett tidsberoende och det gäller att $X_2(t) = 0$ givet att ingen tropisk cyklon med vindstyrka på minst 34 knop träffar Puerto Rico under år t av denna cat bonds löptid, för $t = 1, 2, ..., 10$, och $X_2(t) = 1$ annars. Kassaflödet för denna cat bond får utseendet

$$d_2 = \begin{cases} c \cdot 1_{\{X_2(t)=0\}}, & t \in \{1, 2, ..., 9\} \\ c \cdot 1_{\{X_2(t)=0\}}, +1 & t = 10 \end{cases} \tag{17}$$

och detta ger det förväntade kassaflödet

$$Ed_2 = \begin{cases} c \cdot P(X_2(t) = 0), & t \in \{1, 2, ..., 9\} \\ c \cdot P(X_2(t) = 0) + 1, & t = 10. \end{cases}$$

Antalet möjliga värden på kupongen blir nu långt större då vi i modellen tar hänsyn till att AMO kan skifta fas under löptiden och därmed blir inte bara vilken fas AMO är i vid utformningen av cat bond, utan även när senaste skiftet av AMO-fas ägde rum, en parameter att ta hänsyn till. I Figur 20 är kupongstorleken som en funktion av tiden sedan senaste skiftet av AMO-fas uppritad för de olika ingångsvärdena för ENSO och AMO. Vi



Figur 20: Kupongens storlek över de olika tillstånden för AMO och ENSO (röd kurva = El Niño, svart = neutral, blå = La Niña) som funktioner av tiden sedan skifte av AMO-fas från cat bonds utfärdande.

ser att värdet på kupongen inte varierar så kraftigt med AMO-tillstånd och ENSO-tillstånd för denna cat bond. Kupongen ligger hela tiden i intervallet mellan 2.30 procent och 2.43

procent. Speciellt ser vi att i det här fallet är värdet på kupongen nära på oberoende av initialt ENSO-tillstånd.

7.3 Cat bond 3

Utfallet av cat bond 3 beror på vindstyrkan med vilken tropiska cykloner träffar Puerto Rico. Vi låter M beteckna vindstyrkan i knop (avrundat till närmaste heltal) för den kraftigaste tropiska cyklonen som träffar Puerto Rico under året efter utfärdandet av denna cat bond. Då kan vi definiera en stokastisk variabel X_3 som

$$X_3 = \begin{cases} 0 & \text{om } M \in [0, 33] \\ \text{TS} & \text{om } M \in [34, 63] \\ 1 & \text{om } M \in [64, 82] \\ 2 & \text{om } M \in [83, 95] \\ 3 & \text{om } M \in [96, 112] \\ 4 & \text{om } M \in [113, 136] \\ 5 & \text{om } M \in [137, \infty). \end{cases}$$

Nu ges det förväntade kassaflödet för cat bond 3 av

$$\begin{aligned} Ed_3 = (1+c) \cdot P(X_3 = 0) + 1 \cdot P(X_3 = TS) + 0.8 \cdot P(X_3 = 1) \\ +0.6 \cdot P(X_3 = 2) + 0.4 \cdot P(X_3 = 3) + 0.2 \cdot P(X_3 = 4). \end{aligned}$$

I Tabell 13 sammanställs värdena på kupongen beroende på initialtillstånd. Om vi jämför med Tabell 12 så ser vi att de uppvisar liknande mönster kring vilka celler som har högt respektive lågt kupongvärde. Detta är väntat då ENSO och AMO inom modellen endast påverkar uppkomsten av tropiska cykloner men inte deras intensitet. Cellerna i Tabell 13 har mellan 7 och 10 procent högre värden jämfört med motsvarande celler i Tabell 12, vilket alltså visar på att cat bond 3 har högre risk än cat bond 1.

Tillstånd	El Niño	Neutralt	La Niña
Varm AMO	7.55	7.14	7.53
Kall AMO	5.78	5.56	5.76

Tabell 13: Beräknade värden på kupongen i procent för cat bond 3 för olika starttillstånd.

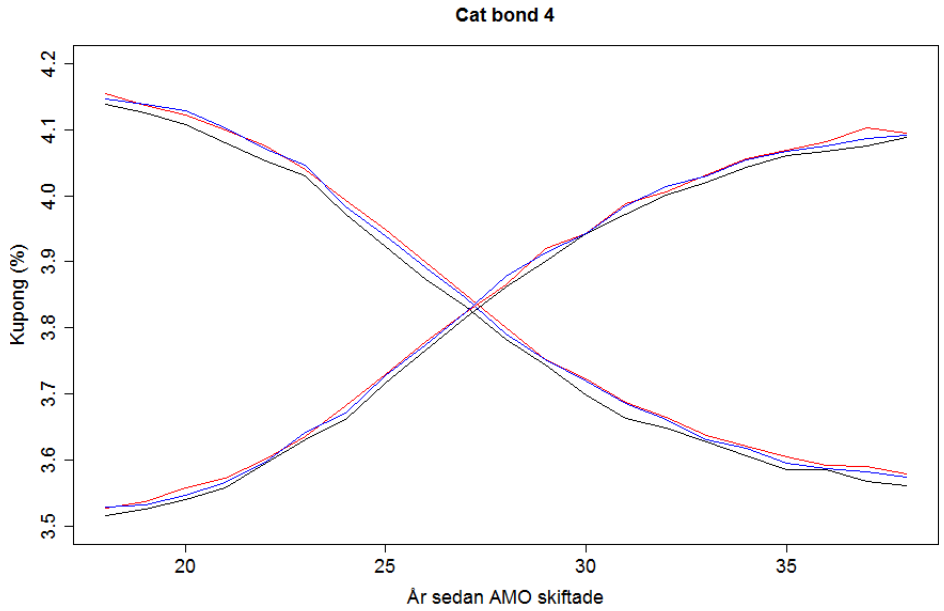
7.4 Cat bond 4

Kassaflödet för denna cat bond är av något mer komplicerad natur då det är en obligation som sträcker sig över en tioårsperiod men som avbryts om en tillräckligt kraftig tropisk cyklon träffar Puerto Rico. Som för de övriga cat bonds så definierar vi en stokastisk

variabel, $X_4(t)$, där $X_4(t)$ antar värdet 1 om en tropisk cyklon av orkanstyrka träffar Puerto Rico under år t och 0 annars. Vi definierar också den stokastiska variabeln τ som den första tidpunkten efter obligationens utfärdande som en orkan med vindstyrka på minst 113 knop träffar Puerto Rico. Med dessa variabler definierade så får kassaflödet för cat bond 4 utseendet

$$d_4 = \begin{cases} c \cdot 1_{\{X_4(t)=0,\tau>t\}}, & t \in \{1, 2, ..., 9\} \\ c \cdot 1_{\{X_2(t)=0,\tau>t\}} + 1 \cdot 1_{\{\tau>t\}}, & t = 10. \end{cases}$$

Vi presenterar också en graf motsvarande den för cat bond 2 i Figur 21. Utseendet är föga förvånande likt det vi såg för cat bond 2 men vi ser att kupongvärdena ligger en del högre; mellan 3.4 och 4.0 procent.



Figur 21: Kupongens storlek över de olika tillstånden för AMO och ENSO (röd kurva = El Niño, svart = neutral, blå = La Niña) som funktioner av tiden sedan skifte av AMO-fas från cat bonds utförande.

De cat bonds som vi gått igenom i det här arbetet skiljer sig en del sinsemellan vad gäller både vad som triggar dem (även om de alla är parametriska) och vilka de ekonomiska konsekvenserna blir för investeraren givet att en cat bond triggas. Det har medfört skillnad i hur kupongerna måste sättas för att priset på obligationerna ska vara konsistenta med vår modell. Det är i sig ingen nackdel utan kan utnyttjas dels för att locka olika riskbenägna investerare och samtidigt från utgivarens sida så kan det underlätta för att skräddarsy ett försäkringsskydd där olika cat bonds kan svara mot olika lager av risk.

Vi såg också att vilken den aktuella AMO-fasen är har stor betydelse för värderingen av våra cat bonds och i fallen med de tioåriga obligationerna så har även möjligheten till skifte av AMO-fas stor betydelse. Desto mindre inverkan hade ENSO på de slutgiltiga priserna på obligationerna. Inom vår modell tar slumpmässigheten i detta klimatfenomen snabbt över och även då ENSO är kritiskt för att skatta uppkomsten av antalet tropiska cykloner i Atlanten så säger det aktuella ENSO-tillståndet inom vår modell inte mycket om tillståndet för kommande orkansäsonger.

8 Diskussion

I det här arbetet har vi gått igenom hur ett försäkringsbolag eller stat kan använda sig av instrument på finansmarknaden, så som cat bonds, som alternativ till vanlig försäkring eller återförsäkring. Vi har sett hur dessa instrument är särskilt lämpade för att användas som ekonomiskt skydd mot naturkatastrofer på grund av den oerhörda ekonomiska skada som kan bli följden av en kraftig naturkatastrof och som återförsäkringsmarknaden kan ha svårt att möta.

För att ett realistiskt pris ska kunna sättas på de cat bonds vi föreslår så är det nödvändigt med tillförlitliga riskmodeller. De modeller vi presenterar i avsnitt 5 är tänkta att fånga den huvudsakliga dynamiken i processen av tropiska cykloner som träffar Puerto Rico. Vi undersöker och skattar effekterna från bakomliggande processer så som ENSO och AMO och försöker ta fram så tillförlitliga skattningar på risken att Puerto Rico träffas av tropiska cykloner samt vindstyrkan på dessa som vårt datamaterial tillåter. Men vår modell ska ändå ses som ett exempel på hur risken för katastrofala händelser kan modelleras snarare än som en fullständig och färdig produkt i det aktuella fallet. På grund av den stora effekt tropiska cykloner har på många människor, näringslivet och till och med hela länders ekonomiska utveckling i drabbade områden så har mycket forskning bedrivits kring dem och av deras komplicerade natur följer att också de modeller som effektivt ska prediktera deras uppkomst, vindstyrka och rörelsebana blir komplexa. Till exempel så har förutom ENSO och AMO bland annat klimatfenomen som solaktivitet, mängden stoft över Atlanten och den västafrikanska monsunen länkats till aktiviteten för tropiska cykloner i Atlanten (Caron m. fl., 2015).

Giltigheten för vår modell vilar tungt på de fem antagandena vi gjorde i avsnitt 5.3.1 och avsnitt 5.5 så det är av intresse att dels undersöka giltigheten i dessa och även undersöka om andra antaganden kunde resulterat i en mer realistisk modell. Antagande 1 som medför att tidpunkterna då tropiska cykloner uppkommer är oberoende av varandra bör vara en god approximation av verkligheten. Då kraftiga orkaner kyler ned vattentemperaturen där de passerar så skulle man kunna tänka sig att det minskar sannolikheten för uppkomsten av ytterliggare tropiska cykloner, men sett över hela Atlanten lär denna effekt vara försumbar. Antagande 2 är en grundbult i vår utökning av datamaterialet då det innebär

att risken att Puerto Rico träffas av tropiska cykloner är proportionerlig mot den samlade cyklonaktiviteten i Atlanten. Antagande 3 är sedan främst ett förtydligande av antagande 2 när vi ser på specialfallet för inverkan från ENSO och AMO. Till skillnad från antagande 2 så är antagande 3 inte helt nödvändigt då vi hade kunnat skatta separata $p_{\text{träff}}$ för de olika faserna inom ENSO och AMO separat, dock till ett pris av skattningar framtagna från färre observationer. Man kan tänka sig flera anledningar till att antagande 2 och antagande 3 eventuellt är ogiltiga. Det är möjligt att klimatfenomen i allmänhet och ENSO och AMO i synnerhet har en effekt som varierar geografiskt över Atlanten och därför påverkar risken för tropiska cykloner mer eller mindre i närheten av Puerto Rico jämfört med andra delar av Atlanten. Även mer komplicerade samband kan påverka antagandenas giltighet, exempelvis som att en ökning av antalet tropiska cykloner i Atlanten tenderar att medföra oproportionerligt få eller många kraftiga orkaner som i sin tur kan ha högre sannolikhet att träffa Puerto Rico jämfört med tropiska stormar.

Antagande 4 tillåter oss att använda hela vårt datamaterial utan att justera det för oupptäckta tropiska cykloner och som redan nämnts så grundar vi det antagandet i att tropiska cykloner som uppfyller kriterierna för att inkluderas i vårt datamaterial med hög sannolikhet påverkade bebyggda områden. Valet av gränslinjen för antagande 5 är tänkt att generera ett så stort datamaterial som möjligt inom vilket antagandet om likafördelning mellan de tropiska cyklonernas fördelning för vindstyrkor ska vara acceptabelt. Vi saknar dock verktyg för att konkret undersöka om antagandet om likafördelning håller men det är möjligt att djupare analyser av de tropiska cyklonernas rörelsebanor kan finna en effektivare metod för att avgränsa datamaterialet från vilket vi skattar fördelningen för vindstyrkan.

Vi gör även andra antaganden i avsnitt 5, bland annat att väntevärdet för antalet tropiska cykloner följer en multiplikativ modell med tillstånden för ENSO och AMO som faktorer. Det senare kan underlätta skattningarna, speciellt om man tänker sig en justering av modellen där ENSO och AMO delas in i fler kategorier än vad vi presenterat här. Dock så finns det forskning som indikerar samspelseffekter mellan ENSO och AMO (Klotzbach, 2011) vilket alltså ger anledning att ifrågasätta validiteten i antagandet.

I avsnitt 6, där vi presenterar den modell och prissättningsformel som föreslås av Cox och Pedersen (2000), går vi igenom ett antal antaganden som ligger till grund för att modellen ska vara giltig. Vi gör dock ingen ansats att kontrollera om dessa påståenden faktiskt är uppfyllda och modellen giltig på marknaden för cat bonds idag. avsnittet ska istället ses som en summarisk genomgång av de komplikationer som uppstår då obligationer kopplade till katastrofrisk introduceras på finansmarkanden och hur man teoretiskt kan prissätta dessa.

Från avsnitt 7 såg vi att ENSO trots sin kraftiga inverkan på uppkomsten av tropiska cykloner hade väldigt liten inverkan på priset på de cat bonds vi tagit fram. Men detta är beroende av antagandet att utfärdandet av cat bonds som börjar gälla nästa kalenderår

sker under årets orkansäsong. Om vi istället tänker oss en cat bond som ges ut den sista maj för att gälla under förestående orkansäsong så skulle vår modell enkelt kunna justeras till att mer effektivt prediktera klassificeringen av ENSO under denna cat bonds löptid, varpå inverkan från ENSO på priset skulle öka markant. Förutom påverkan på priset på cat bonds så blir det utifrån våra riskmodeller också tydligt hur ENSO kan användas av stater och försäkringsgivare som indikator på risken för kostnader från tropiska cykloner och utifrån det anpassa sina reserver.

I det här arbetet har vi visat hur Puerto Rico kan använda sig av cat bonds för att skaffa sig ett försäkringsskydd mot tropiska cykloner. Vi har också visat på den mångfald av sätt som detta skydd kan utformas på, genom att undersöka cat bonds som skiljer sig åt markant i löptid, triggande händelser och konsekvenser då de triggas. Vi nöjer oss dock med att konstatera att cat bonds kan fungera som ett alternativ eller komplement till traditionell återförsäkring utan att göra någon jämförelse kring vad som skulle vara mest lönsamt för Puerto Rico i det aktuella fallet.

Avslutningsvis så säger vi några meningar om möjliga framtida arbeten på det här området. En möjlighet är att inkludera cat bonds som triggas av jordbävningar. Samma prissättningsmodell skulle kunna användas i det fallet men riskmodellen skulle förstås behöva justeras efter den nya risken. Av intresse vore också att prissätta cat bonds av typ indemnity. Dessa kan vara av större intresse för försäkringsbolag då de följer försäkringsgivarens kostnader. Prissättning av en sådan cat bond för tropiska cykloner kräver dock rätt datamaterial för ändamålet. Att enbart skatta kostnaderna från skadorna som historiskt orsakats då Puerto Rico träffats blir inte intressant då observationerna är för få och dessutom demografin förändras vilket gör kostnader från skilda tidpunkter svåra att jämföra. Istället borde man utgå från data om samtliga objekt i ett försäkringsbestånd och modellera de skador som kan tänkas uppstå i samband med olika vindstyrkor, regnmängder och höjningar av havsnivån.

Referenser

Aiyyer, A. & Thorncroft, C. (2006). Climatology of Vertical Wind Shear over the Tropical Atlantic. *Journal of Climate*, *19*(12), 2969–2983. (doi:10.1175/JCLI3685.1)

Caron, L.-P., Boudreault, M. & Bruyère, C. (2015). Changes in large-scale controls of Atlantic tropical cyclone activity with the phases of the Atlantic multidecadal oscillation. *Climate Dynamics*, *44*(7), 1801-1821. (doi:10.1007/s00382-014-2186-5)

Cosette, H., Duchense, T. & Marceau, . (2003). Catastrophes and their Impact on Insurance Portfolios. *North American Actuarial Journal*, *7*(4), 1–22. (doi:10.1080/10920277.2003.10596114)

Coto, D. (2018, Oktober 25). Insurers Under Scrutiny in Puerto Rico with 13,600 Hurricane Maria Claims Still Open. *Insurance Journal*. (hämtad från http://www.insurancejournal.com)

Cox, S. & Pedersen, H. (2000). Catastrophe Risk Bonds. *North American Actuarial Journal*, *4*(4), 56–84. (doi: 10.1080/10920277.2000.10595938)

Cummins, D., Doherty, N. & Lo, A. (2002). Can insurers pay for the "big one"? Measuring the capacity of the insurance market to respond to catastrophic losses. *Journal of Banking & Finance*, *26*, 557–583. (doi:10.1016/S0378-4266(01)00234-5)

Cummins, D., Doherty, N. & Lo, A. (2005). Increasing destructiveness of tropical cyclones over the past 30 years. *Nature*, *436*, 686-688. (doi:10.1038/nature03906)

EM-DAT: The Emergency Events Database. (u. å.). *Université catholique de Louvain (UCL)*. CRED, D. Guha-Sapir. (Brussels, Belgium)

Embrechts, P., Klüppelberg, C. & Mikosh, T. (1997). *Modelling Extremal Events*. Springer.

Froot, K., Murphy, B., Stern, A. & Usher, S. (1995). The Emerging Asset Class: Insurance Risk. *Viewpoint*, *24*(3), 19-28.

Hoeppe, P. (2015). Trends in weather related disasters–Consequences for insurers and society. *Weather and Climate Extremes*, *11*, 70-79. (doi:10.1016/j.wace.2015.10.002)

Hoyt, R. E. & Mccullough, K. A. (1999). Catastrophe Insurance Options: Are They Zero-Beta Assets? *Journal of Insurance Issues*, *22*(2), 147-163.

Härdle, W. & Cabrera, B. (2010). Calibrating CAT Bonds for Mexican Earthquakes. *The Journal of Risk and Insurane*, *77*(3), 625-650. (doi:10.1111 /j.1539-6975.2010.01355.x)

Huang, C. F. & Litzenberger, R. H. (1988). *Foundations for financial economics*. North-Holland.

Kim, H.-M., Webster, P. & Curry, J. (2009). Impact of Shifting Patterns of Pacific Ocean Warming on North Atlantic Tropical Cyclones. *Science*, *325*(5936), 77-80. (doi:10.1126/science.1174062)

Klotzbach, P. (2011). The Influence of El Niño–Southern Oscillation and the Atlantic Multidecadal Oscillation on Caribbean Tropical Cyclone Activity. *Journal of Climate*, *24*(3), 721-731. (doi:10.1175/2010JCLI3705.1)

Mazzei, P. (2018, Februari 8). What Puerto Rico Is, and Isn't, Getting in Disaster Relief.

The New York Times. (hämtad från http://www.nytimes.com)

Mufson, S. (2017, September 20). Hurricane Maria has dealt a heavy blow to Puerto Rico's bankrupt utility and fragile electric grid. *The Washington Post*. (hämtad från http://www.washingtonpost.com)

National Oceanic and Atmospheric Administration. (u. å.-a). *Atlantic multidecadal oscillation (AMO) SST Index.* (Hämtad 2 juli, 2019, från National Oceanic and Atmospheric Administration, https://www.esrl.noaa.gov/psd/gcos_wgsp/Timeseries/AMO/)

National Oceanic and Atmospheric Administration. (u. å.-b). *Best Track Data (HURDAT2).* (Hämtad 26 mars, 2019, från National Oceanic and Atmospheric Administration, https://www.nhc.noaa.gov/data/)

National Oceanic and Atmospheric Administration. (u. å.-c). *Niño 3.4 SST Index.* (Hämtad 13 april, 2019, från National Oceanic and Atmospheric Administration, https://www.esrl.noaa.gov/psd/gcos_wgsp/Timeseries/Nino34/)

National Oceanic and Atmospheric Administration. (u. å.-d). *Tropical Cyclone Climatology.* (Hämtad 16 juni, 2019, från National Oceanic and Atmospheric Administration, https://www.nhc.noaa.gov/climo/)

Nowak, P. & Romaniuk, M. (2013). Pricing and simulations of catastrophe bonds. *Insurance: Mathematics and Economics*, *52*(1), 18–28. (doi:10.1016/j.insmatheco.2012.10.006)

Pielke, R. & Landsea, C. (1999). La Niña, El Niño, and Atlantic Hurricane Damages in the United States. *Bulletin of the American Meteorological Society*, *80*(10), 2027-2033. (doi:10.1175/1520-0477(1999)080¡2027:LNAENO¿2.0.CO;2)

Resnick, S. (1987). *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes.* Springer.

Robles, F. & Bidgood, J. (2017, December 29). Three Months After Maria, Roughly Half of Puerto Ricans Still Without Power. *The New York Times*. (hämtad från http://www.nytimes.com)

Schmock, U. (1999). Estimating the Value of the Wincat Coupons of the Winterthur Insurance Convertible Bond: A Study of the Model Risk. *ASTIN Bulletin*, *29*(1), 101–163. (doi:10.2143/AST.29.1.504608)

Swiss Re Institute. (2018). *Natural catastrophes and man-made disasters in 2017: a year of record-breaking losses.* (Sigma No. 1/2018)

United States Department of the Treasury. (u. å.). *Daily treasury yield curve rates.* (Hämtad 14 maj, 2019, från United States Department of the Treasury, https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield)

United States General Accounting Office. (2002). *Catastrophe Insurance Risks: The Role of Risk-Linked Securities and Factors Affecting their Use.* (GAO-02-941)

Vaugirard, V. (2003). Valuing catstrophe bonds by Monte Carlo simulations. *Applied Mathematical Finance*, *10*(1), 75–90. (doi:10.1080/1350486032000079741)

Wang, C., Wang, X., Weisberg, R. & Black, M. (2017). Variability of tropical cyclone rapid intensification in the North Atlantic and its relationship with climate variations.

Climate Dynamics, *49*(11/12), 3627–3645. (doi: org.ezp.sub.su.se/10.1007/s00382-017-3537-9)