



Stockholms
universitet

Markovsk modellering av försäkrings- kontrakt med affina kortränteprocesser

Henrik Andersson

Masteruppsats 2024:5
Försäkringsmatematik
Juni 2024

www.math.su.se

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm



Markovsk modellering av försäkringskontrakt med affina kortränteprocesser

Henrik Andersson*

Juni 2024

Sammanfattning

Riskhantering inom livförsäkringsverksamheten spänner över ett flertal olika områden, allt ifrån försäkringsrisk till operativ risk. Vad gäller det förstnämnda förhåller sig många försäkringsbolag fortfarande konservativt till nya synsätt för till exempel dödlighet och insjuknande. En förklaring till detta är svårigheten i att implementera nya antaganden och modeller i försäkringsbolagens befintliga system. Dessa storheter inom riskhanteringen påverkar direkt de försäkringstekniska avsättningarna som beräknas för kontrakten. Utöver detta beräknas dessutom reserven endast med hänsyn till de tillstånd som specificeras av kontraktet, det vill säga att en försäkrad endast kan vara vid liv eller avliden i fallet med en dödsfallsförsäkring. Med andra ord tas det inte hänsyn till risken att den försäkrade kan bli sjuk.

Detta arbete kommer att undersöka ny teori och metoder för simultan hantering av olika försäkringsrisker vid beräkning av ett försäkringskontrakts reserv samt modellering av dessa risker. Mer specifikt kommer Markovska antaganden att ansättas för försäkringskontrakt vilket möjliggör en tillståndsbaserad analys. De olika försäkringsriskerna, dödlighet och insjuknande, kommer att modelleras med så kallade korträntemodeller som undersökts i författarens tidigare examensarbete (H. Andersson och Cato 2023). Resultaten kommer sedan att ställas mot motsvarande storhet som beräknats med observerad data för att visualisera de föreslagna modellernas prestationsförmåga samt effekterna av stresstester av modellparametrarna.

Resultaten uppvisar snarlika egenskaper hos korträntemodellerna som i det tidigare examensarbetet, det vill säga god modelleringsförmåga av dödlighet och i detta arbete även insjuknande. Däremot visar det sig att mindre avvikelser i modellenpassningen av dessa storheter data slår mer än förväntat i de resulterande reserverna vilket är en svaghet hos modellklassen. Det kan konstateras att även om korträntemodeller är ett lovande koncept har de sina begränsningar och att de vid modellering av försäkringskontrakt bör användas aktsamt.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.
E-post: henrik960517@gmail.com. Handledare: Mathias Millberg Lindholm.

Abstract

Risk management within life insurance covers many different areas, from insurance risk to operative risk. Regarding the former, many insurance companies still have a conservative view of new approaches to mortality and sickness for example. An explanation for this is the difficulty in implementing new assumptions and models in the existing systems of the insurance companies. These quantities within risk management directly affect the insurance reserves which are calculated for the insurance contracts. Additionally, the insurance reserve is calculated taking into account only the different states that are specified by the contract, in other words the insured can either be alive or deceased in the case of a death insurance. This means that the risk of the insured becoming sick is not taken into consideration.

This report will be analyzing new theory and methods for simultaneous management of different insurance risks when calculating the insurance reserve of a contract and modeling of these risks. More specifically Markovian assumptions will be introduced which enables a state based analysis. The different insurance risks, mortality and sickness, will be modelled with so called short rate models that were analyzed in the author's previous master's thesis (H. Andersson och Cato 2023). The results will then be compared to the corresponding quantity calculated using observed data in order to visualize the performance of the proposed models and the effects of stress testing the model's parameters.

The results show properties similar to the ones in the previous master's thesis, that means good modeling performance of mortality and in this thesis also sickness. However, it appeared that minor deviations in the model calibration of these quantities affect the insurance reserves more than expected which is a weakness of the model class. It can be stated that even though short rate models are a promising concept they have their limitations and when modeling insurance contracts they should be used carefully.

Förord

Detta är ett examensarbete motsvarande 15 högskolepoäng inom försäkringsmatematik utfört vid matematiska institutionen vid Stockholms universitet under vårterminen 2024 och leder till en masterexamen inom försäkringsmatematik.

Frågor rörande arbetet besvaras via: henrik960517@gmail.com.

Tack till

Jag vill rikta ett tack till Mathias Millberg Lindholm som varit handledare i detta examensarbete och som bidragit med värdefulla insikter och lärdomar under arbetets gång. Jag vill även tacka min sambo Sara som gett mig ett ovärderligt stöd under tiden på aktuarieprogrammet.

Innehåll

Nomenklatur	VI
Figurer	VIII
Tabeller	X
1 Inledning	1
1.1 Syfte	2
1.2 Metodöversikt	2
1.2.1 Data	2
1.2.2 Korträntemodeller	3
1.2.3 Markovsk modellering	3
1.2.4 Resultat	4
2 Teoretisk bakgrund	5
2.1 Grundläggande livförsäkringsmatematik	5
2.1.1 Sannolikhetsteoretisk modell för livslängd	5
2.1.2 Dödlighetsintensitet	5
2.1.3 Återstående livslängd	6
2.1.4 Överlevnadsfunktionen	6
2.2 Affina processer och korträntemodeller	7
2.2.1 Sannolikhetsrum	7
2.2.2 Stokastiska processer	7
2.2.3 Wienerprocessen	8
2.2.4 Itôprocesser	8
2.2.5 Filtration	9
2.2.6 Stopptid	9
2.2.7 Adapterade processer	9
2.2.8 Martingaler och lokala martingaler	9
2.2.9 Elementära processer	9
2.2.10 Stokastiska integraler	10
2.2.11 Stokastiska differentialekvationer	10
2.2.12 Räkneprocesser	10
2.2.13 Stokastisk intensitet	11
2.2.14 Dubbelstokastiska processer	11
2.2.15 Nollkupongspriser och överlevnadsfunktionen	11
2.2.16 Affina processer	12
2.2.17 Korträntemodeller	12
2.3 Markovprocesser inom livförsäkring	15

2.3.1	Markovegenskapen	15
2.3.2	Chapman-Kolmogorovs ekvation	15
2.3.3	Övergångsintensiteter	16
2.3.4	Kolmogorovs differentialekvationer	16
2.3.5	Betalströmmar	17
2.3.6	Prospektiv reserv och Thieles differentialekvation	18
3	Metod	22
3.1	Skattning av övergångsintensiteter	22
3.1.1	Avvecklingsintensitet	23
3.2	Korträntemodeller	24
3.2.1	Lösning av ODE:er och generalisering av överlevnadssannolikheten	24
3.2.2	Parameterestimering i termer av lösningar till ODE:er	25
3.2.3	Övergångsintensiteter i termer av lösningar till ODE:er på explicit form	26
3.3	Beräkning av reserven	28
3.3.1	Thieles differentialekvationer i termer av kortränteprocesser	28
4	Resultat	29
4.1	Parametrar	29
4.2	Övergångsintensiteter	30
4.3	Prospektiva reserver	33
4.4	Stresstester	36
5	Diskussion	44
5.1	Resultaten i ljuset av tidigare arbete	44
5.2	Korträntemodellernas prestation	45
5.3	Slutsatser	46

Nomenklatur

Förkortningar

FE	Feller
FTA	Försäkringstekniska avsättningar
HW	Hull-White
KBE	Kolmogorovs bakåtekvationer
KFE	Kolmogorovs framåtekvationer
MSE	Mean square error
ODE	Ordinary differential equation
OU	Ornstein-Uhlenbeck
SCB	Statistiska centralbyrån
SDE	Stochastic differential equation

Matematisk notation

\cap	Snittet av
\cup	Unionen av
\forall	För alla
\in	Tillhör
\mathbb{E}	Väntevärdesoperatören
\mathbb{N}_0	De naturliga talen och noll
\mathbb{P}	Sannolikhetsmått
\mathbb{R}	De reella talen
\mathbb{R}_+	De reella talen större eller lika med noll
\mathcal{F}_t	Filtration på intervallet $[0, t]$

\mathcal{M}	Generell beteckning för en matematisk modell
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalfördelningen med väntevärde μ och varians σ^2
μ_x	Dödlighetsintensitet för en godtycklig x -årig individ
Ω	Sannolikheteoretiskt utfallsrum
$\bar{\mu}_{ij,x}(t)$	Icke-stokastisk intensitet för övergången $i \rightarrow j$ som funktion av tiden t med startåldern x .
Φ	Fördelningsfunktionen av en standardnormalfördelad stokastisk variabel
\propto	Proportionell mot
Σ	σ -algebra av händelser
\subset	Äkta delmängd av
\subseteq	Delmängd av
A^c	Komplementhändelsen till händelsen A
$F(x)$	Fördelningsfunktion av en stokastisk variabel X
$f(x)$	Täthetsfunktion av en stokastisk variabel X
l_x	Överlevnadsfunktionen för en godtycklig x -årig individ
o	Lilla ordo
T	Livslängd för en godtycklig individ
T_x	Återstående livslängd för en godtycklig x -årig individ
$W(t)$	Standardmässig Wienerprocess
$X_n \xrightarrow{a.s.} X$	Sekvensen av stokastiska variabler X_n konvergerar mot X nästan säkert (eng. almost surely)

Figurer

1.1	Flödesschema över metodens olika moment och ordning.	2
1.2	Tillståndgraf för en sjukförsäkring.	4
4.1	Observerade övergångsintensiteter $\bar{\mu}_{20,x}(t)$, $\bar{\mu}_{21,x}(t)$ respektive observerad utjämnad övergångsintensitet $\bar{\mu}_{12,x}(t)$ för åldrarna 18-64.	30
4.2	Övergångsintensiteter $\bar{\mu}_{20,x}(t)$ och $\bar{\mu}_{21,x}(t)$, Ornstein-Uhlenbeck och observerad för åldrarna 18-64.	31
4.3	Övergångsintensiteter $\bar{\mu}_{20,x}(t)$ och $\bar{\mu}_{21,x}(t)$, Feller och observerad för åldrarna 18-64.	31
4.4	Övergångsintensiteter $\bar{\mu}_{20,x}(t)$ och $\bar{\mu}_{21,x}(t)$, Hull-White och observerad för åldrarna 18-64.	32
4.5	Prospektiv reserv för tillstånd 1, Ornstein-Uhlenbeck och observerad, kontraktstid 0-20 år.	33
4.6	Prospektiv reserv för tillstånd 2, Ornstein-Uhlenbeck och observerad, kontraktstid 0-20 år.	33
4.7	Prospektiv reserv för tillstånd 1, Feller och observerad, kontraktstid 0-20 år.	34
4.8	Prospektiv reserv för tillstånd 2, Feller och observerad, kontraktstid 0-20 år.	34
4.9	Prospektiv reserv för tillstånd 1, Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.	35
4.10	Prospektiv reserv för tillstånd 2, Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.	35
4.11	Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat a för Ornstein-Uhlenbeck och observerad, kontraktstid 0-20 år.	36
4.12	Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat σ för Ornstein-Uhlenbeck och observerad, kontraktstid 0-20 år.	36
4.13	Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstestat a för Ornstein-Uhlenbeck och observerad, kontraktstid 0-20 år.	37
4.14	Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstestat σ för Ornstein-Uhlenbeck och observerad, kontraktstid 0-20 år.	37
4.15	Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat a för Feller och observerad, kontraktstid 0-20 år.	38
4.16	Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat σ för Feller och observerad, kontraktstid 0-20 år.	38
4.17	Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstestat a för Feller och observerad, kontraktstid 0-20 år.	39
4.18	Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstestat σ för Feller och observerad, kontraktstid 0-20 år.	39
4.19	Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat b för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.	40
4.20	Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat σ för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.	40
4.21	Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat A för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.	41

4.22	Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat B för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.	41
4.23	Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstestat b för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.	42
4.24	Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstestat σ för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.	42
4.25	Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstestat A för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.	43
4.26	Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstestat B för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.	43

Tabeller

3.1	Parametervärden för $\lambda_x(t)$, frivilligt sjukförsäkrade, män.	23
3.2	Parametervärden för $\lambda_x(t)$, frivilligt sjukförsäkrade, kvinnor.	24
4.1	Parametervärden för Ornstein-Uhlenbeck, övergångsintensiteter $\bar{\mu}_{20,x}(t)$ och $\bar{\mu}_{21,x}(t)$, åldrarna 18-64.	29
4.2	Parametervärden för Feller, övergångsintensiteter $\bar{\mu}_{20,x}(t)$ och $\bar{\mu}_{21,x}(t)$, åldrarna 18-64.	29
4.3	Parametervärden för Hull-White, övergångsintensiteter $\bar{\mu}_{20,x}(t)$ och $\bar{\mu}_{21,x}(t)$, åldrarna 18-64.	29

Kapitel 1

Inledning

Verksamheten i livförsäkringsbolag är exponerat för en mängd olika risker som kräver omfattande tillsyn och hantering i enlighet med rådande lagstiftning. Exempel på dessa risker är försäkringsrisk, marknadsrisk, kreditrisk och operativ risk. Den mest självklara utav dessa är försäkringsrisken, även kallat den aktuariella risken, som till exempel utgörs av sannolikheten att en försäkrad individ avlider, insjuknar eller drabbas av en skada. Trots att samtliga ovan nämnda risker numera omfattas av Solvens-II-kapitalkravet har det hänt förhållandevis lite i utvecklingen av hanteringen av försäkringsrisken. Detta är särskilt tydligt vad gäller antaganden om dödlighet och beräkning av försäkringstekniska avsättningar (FTA). Det välkända dödlighetsantagandet M90 togs fram av (Grundkommittén 1989) och är än idag branschstandard i viss utsträckning. Kort efter att M90 presenterades föreslogs den så kallade Lee-Cartermodellen som även möjliggjorde dödlighetsprognoser av (Lee och Carter 1992). Lee-Carter är dock inte etablerad i dagsläget vilket kan ha sin förklaring i att det är mödosamt att implementera en helt ny dödlighetsmodell i ett försäkringsbolags system.

Förutom att dödligheten används för att beräkna försäkringspremier ingår den även i FTA. Dödligheten är visserligen bara en aspekt vid beräkningen av reserven av ett försäkringskontrakt. I det fall att en reserv ska beräknas för till exempel en dödsfallsförsäkring tas det endast hänsyn till att den försäkrade antingen är vid liv eller att den har avlidit trots möjligheten att till exempel bli sjuk. Reservan blir med andra ord inte helt representativ då dynamiken mellan de olika tillstånden som den försäkrade kan befinna sig i inte finns med i beräkningen.

I författarens föregående examensarbete (H. Andersson och Cato 2023) vid Linköpings universitet undersöktes dödlighetsmodellering inom ramen för ett till synes orelaterat område - korträntemodellering. Med en stokastisk process som beskriver den underliggande ränteintensiteten går det, givet att vissa matematiska krav är uppfyllda, teckna ett analytiskt uttryck för priset av en nollkupongsobligation. Den underliggande processen behöver dock inte begränsas till räntor utan kan även utvidgas till dödlighet i den aktuariella kontexten. Motsvarigheten till priset av nollkupongsobligationen blir då överlevnadssannolikheten då en dödlighetsprocess ansätts. Det finns ett antal kända korträntemodeller som är relativt enkla parametriskt sett och som trots detta modellerar dödlighet på ett tillfredställande sätt.

Problematiken med beräkningen av reserver som beskrivs ovan går att hantera genom införandet av ett nytt matematiskt ramverk. Om ett försäkringskontrakt modelleras som en så kallad Markovprocess kan även de mer komplexa kontrakten med många tillstånd och betalströmmar hanteras och därmed varje enskilt tillstånds reserv. På detta sätt blir modelleringen av kontraktet mer dynamiskt och samtidigt mer realistiskt då samtliga tillstånd tas hänsyn till.

Det finns alltså två viktiga aspekter av försäkringskontrakt som fortfarande hanteras enligt konventionella metoder där det finns utrymme för nya synsätt som detta arbete syftar till att undersöka.

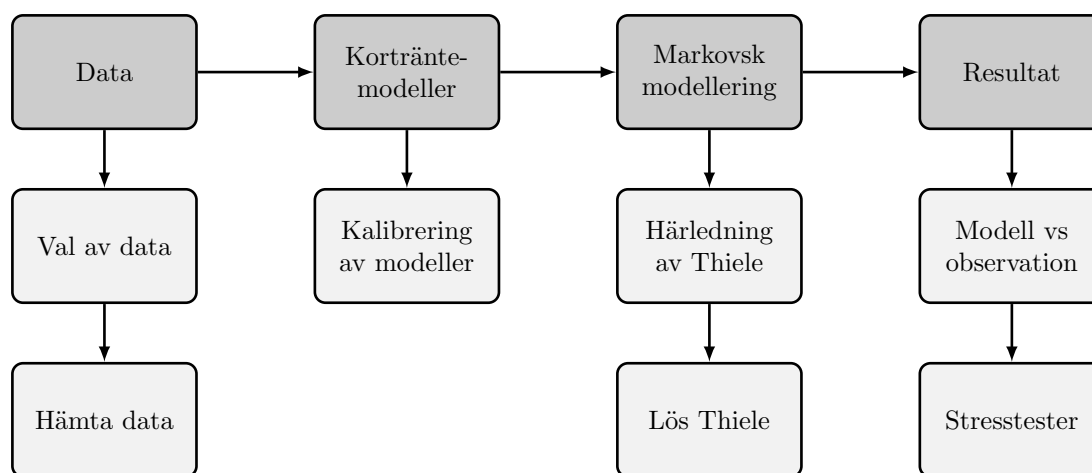
1.1 Syfte

Syftet med detta arbete är att förena korträntemodellering av övergångsintensiteter med beräkning av prospektiva reserver under antagandet att ett försäkringskontrakt kan modelleras som en Markov-process.

1.2 Metodöversikt

I detta delkapitel ges en översikt till arbetets metod. De olika momenten sker enligt följande flödeschema.

Figur 1.1: Flödesschema över metodens olika moment och ordning.



1.2.1 Data

Val av data

De storheter där data behövs finns för det mesta att tillgå via offentliga källor så som ränta och dödlighet. Däremot vad gäller data över insjuknande och avveckling är dessa inte enbart svårare att finna utan även betydligt mer inkomplett då det finns färre observationer att göra jämfört med till exempel dödlighet.

Ränta Den ränta som kommer att användas i detta arbete är endast avsedd att användas i Thieles differentialekvation. Då denna storhet inte är beroende av observerade händelser som insjuknande och tillfrisknande är det mer rättfram att välja den data som behövs. Då räntan inte är en storhet som undersöks i detta arbete kommer den därför att direkt hämtas från (Finansinspektionen 2024), motsvarande tjänstepensionskurvan per mars 2024.

Dödlighet I författarens förra arbete (H. Andersson och Cato 2023) användes SCB som källa för data vid skattning av befolkningsdödligheten. På grund av lättillgängligheten och det stora dataunderlaget kommer denna data att hämtas därifrån även i detta arbete. Mer specifikt kommer datan över antalet dödsfall respektive individer per ålder per 2023 att användas från (SCB 2024a) respektive (SCB 2024b). Då en försäkrad står under risk att avlida både när denne är vid liv och sjuk borde även två olika dödlighetsintensiteter användas. Dock är det svårt att finna dödlighetsdata för sjuka individer. Dessutom är skillnaden mellan de två intensiteterna försumbara vilket tillåter att samma dödlighet används för de två tillstånden.

Insjuknande Även om det finns studier kring sjuklighet, till exempel (Försäkringstekniska Forskningsnämnden 2017), finns det inte tillgång till något dataunderlag. Dessutom behandlas i stort sett bara avveckling vilket inte ger någon information om insjuknandet. Däremot har vissa tidigare examensarbeten undersökt denna fråga och därigenom fått tillgång till relevant data. Det arbete och dess data som kommer att användas för skattning av insjuknandet är (Xu 2004). Datan är hämtad från SEB Trygg Liv och består av uppgifter av försäkrade under åren 1940-2000. Den redovisas uppdelat på kön och karenstid över åldersspannet 18-64. Eftersom den uppdelade datan uppvisar stor osäkerhet kommer därför hela datamängden i detta arbete att slås samman och medelvärdesbildas. Eftersom detta åldersspann är det mest begränsade utav de tre övergångsintensiteter som beskrivs i detta delkapitel kommer samtliga av dessa att modelleras för detta åldersspann, det vill säga 18 till 64 år.

Avveckling Som det nämndes i avsnitt 1.2.1 görs det skattningar av avvecklingsfunktionen enligt avsnitt 3.1 i (Försäkringstekniska Forskningsnämnden 2017) baserat på data från flertalet försäkringsbolag i branschen. Dock föreligger inget dataunderlag i denna undersökning. Då motsvarande offentlig data är svår att finna kommer detta arbete i stället att använda en lämpligt vald parameteruppsättning från avsnitt 5.1.1 (Försäkringstekniska Forskningsnämnden 2017) för att beräkna avvecklingsfunktionen och därigenom avvecklingsintensiteten.

Hämta data

Efter att lämplig data har hittats kommer den att exporteras till R för formatering och implementation.

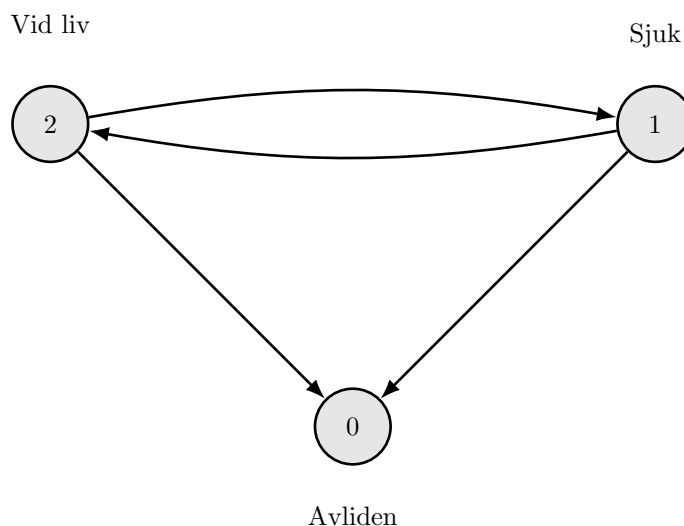
1.2.2 Korträntemodeller

Kalibrering av modeller

I arbetet kommer samma korträntemodeller att undersökas som i författarens förra examensarbete (H. Andersson och Cato 2023), alltså Ornstein-Uhlenbeck, Feller och Hull-White. Som det kommer att redogöras för går det att formulera ett system av så kallade ordinära differentialekvationer (ODE:er) baserat på modellens parametrar och tidsargument. Genom lösningarna till detta system går det därefter att analytiskt beräkna den uppehållstid som den underliggande modellen implicerar. Därefter kan modellerna parameterkalibreras genom att minimera det kvadratiske medelfelet mellan den observerade uppehållstiden och den som impliceras av den undersökta modellen.

1.2.3 Markovsk modellering

Ett försäkringskontrakt kan beskrivas med en så kallad tillståndsgraf som beskriver vilka tillstånd den försäkrade kan befinna sig i samt vilka tillståndsövergångar som är möjliga. Detta arbete kommer endast att undersöka en form av försäkringskontrakt, sjukförsäkring, även om det går att analysera betydligt mer komplicerade kontrakt med det Markovska synsättet. Mer specifikt kommer en sjukförsäkring med en kontinuerligt löpande premie samt en indexerad lönebaserad förmån att undersökas med följande tillståndsgraf:



Figur 1.2: Tillståndsgraf för en sjukförsäkring.

Härledning av Thiele

Thieles differentialekvation på sin enklaste form förekommer då den försäkrade endast kan befinna sig i två tillstånd, vanligtvis vid liv och avliden. Genom att anta att ett försäkringskontrakt kan beskrivas enligt en Markovprocess kan Thieles differentialekvation generaliseras för ett mer godtyckligt försäkringskontrakt. Då uppstår i stället ett system av differentialekvationer, ett för varje möjligt tillstånd i kontraktet, där de olika övergångsintensiteterna ingår. Därefter kommer dessa intensiteter att substitueras med det uttryck för motsvarande intensitet som respektive korträntemodell resulterar i.

Lös Thiele

Ovan nämnda system av differentialekvationer kommer sedan att lösas med lösaren `ode` i `R` för att erhålla reserverna för respektive tillstånd i försäkringskontraktet.

1.2.4 Resultat

Modell vs observation

När samtliga reserver och de ingående övergångsintensiteterna beräknats för respektive modell kommer dessa att presenteras grafiskt tillsammans med motsvarande observerade storheter.

Stresstester

För att undersöka hur störningar i modellparametrarna påverkar reserverna kommer samtliga parametrar att stressas uppåt med en faktor om 1.05. Därefter beräknas reserverna på nytt och jämförs med de observerade. Notera att detta görs med en stressad parameter åt gången och att motsvarande parameter i samtliga ingående intensiteter i Thieles differentialekvationer stressas samtidigt vid beräkningen av reserven.

Kapitel 2

Teoretisk bakgrund

2.1 Grundläggande livförsäkringsmatematik

Följande delkapitel syftar till att beskriva den livförsäkringsmatematik baserat på kapitel 2 i (G. Andersson 2013) och avsnitt 3.1 i (H. Andersson och Cato 2023) som sedan utvidgas till att gälla för tillståndsbaserade försäkringskontrakt.

2.1.1 Sannolikhetsteoretisk modell för livslängd

Inför livslängden T för en godtycklig individ som en icke-negativ kontinuerlig stokastisk variabel med fördelningsfunktion

$$F(x) = \mathbb{P}(T \leq x), \quad x \geq 0.$$

Då definieras motsvarande täthetsfunktion för T som

$$f(x) = F'(x), \quad x \geq 0.$$

2.1.2 Dödlighetsintensitet

Antag att sannolikheten att individiden avlider i ett infinitesimalt intervall $[x, x + dx]$ är proportionellt mot dess längd, det vill säga $\mu_x dx$ där μ_x är en proportionalitetsfaktor. Sannolikheten att en person avlider i intervallet givet att den lever vid åldern x blir då

$$\mu_x dx \approx \mathbb{P}(x \leq T \leq x + dx \mid T > x) = \frac{\mathbb{P}(x \leq T \leq x + dx)}{\mathbb{P}(T > x)} = \frac{F(x + dx) - F(x)}{1 - F(x)},$$

vilket kan skrivas som

$$\mu_x \approx \frac{1}{dx} \frac{F(x + dx) - F(x)}{1 - F(x)}.$$

I gräns då $dx \rightarrow 0$ fås

$$\mu_x = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} \frac{F(x + dx) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)}, \quad (2.1)$$

det vill säga dödlighetsintensiteten μ_x för en x -årig individ.

2.1.3 Återstående livslängd

Beteckna T_x som återstående livslängd för en godtycklig individ vid åldern x . Definiera fördelningsfunktionen för T_x som

$$F_x(t) = \mathbb{P}(T_x \leq t), \quad t \geq 0.$$

Genom att utnyttja sambandet mellan T_x och T samt konventionen $T = T_0$ kan följande omskrivning göras

$$\mathbb{P}(T_x > t) = \mathbb{P}(T > x + t \mid T > x) = \frac{\mathbb{P}(T > x + t)}{\mathbb{P}(T > x)}. \quad (2.2)$$

2.1.4 Överlevnadsfunktionen

Överlevnadsfunktionen $l_x(t)$ definieras som komplementet till återstående livslängd enligt

$$l_x(t) = 1 - F_x(t) = \mathbb{P}(T_x > t), \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

det vill säga sannolikheten för en x -årig individ att leva åtminstone t år till. (2.2) tillsammans med $T = T_0$ ger att

$$\mathbb{P}(T_x > t) = \frac{\mathbb{P}(T_0 > x + t)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} = \frac{l_0(x + t)}{l_0(x)}, \quad t \geq 0$$

det vill säga

$$l_x(t) = \frac{l_0(x + t)}{l_0(x)}, \quad t \geq 0.$$

Det är praktiskt att uttrycka $l_x(t)$ i termer av $\mu_x(t)$. Med (2.1) fås

$$l'_x(t) = \frac{d}{dt}(1 - F_x(t)) = -f_x(t). \quad (2.4)$$

Tillsammans med definitionen av $l_x(t)$ enligt (2.3) fås sedan

$$\mu_x(t) = -\frac{l'_x(t)}{l_x(t)}. \quad (2.5)$$

Integrering av (2.5) med villkoret $l(0) = 1$ ger

$$\begin{aligned} \int_0^t \mu_x(u) du &= \int_0^t -\frac{l'_x(u)}{l_x(u)} du \\ &= -\left[\ln [l_x(u)] \right]_0^t \\ &= -(\ln [l_x(t)] - \ln [l_x(0)]) \\ &\iff l_x(t) = \exp \left\{ -\int_0^t \mu_x(u) du \right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2 Affina processer och korträntemodeller

Korträntemodeller, där korträntan motsvaras av den momentana spoträntan, används vid modellering av just korträntor, därav namnet. Denna modellklass är så kallad affin vilket ger upphov till ett resultat där korträntor och exempelvis dödlighet är kopplade till varandra. I detta delkapitel sammanfattas den teori som ligger till grund för de korträntemodeller som kommer att undersökas samt de mest centrala resultaten gällande parameterkalibrering och explicita uttryck för övergångsintensiteter som nära följer avsnitt 3.3 i (H. Andersson och Cato 2023).

2.2.1 Sannolikhetsrum

Ett grundläggande men återkommande begrepp är sannolikhetsrummet. I kapitel 1 i (Kakihara 2003) formuleras ett sannolikhetsrum i enlighet med Kolmogorovs axiom som trippeln $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, där Ω är utfallsrummet, Σ en σ -algebra av händelser och \mathbb{P} ett sannolikhetsmått på Σ . Varje $\omega \in \Omega$ representerar ett utfall av något experiment och kallas för en enkel händelse. Motsvarande, varje $A \in \Sigma$ är en delmängd av Ω och kallas för en händelse.

Σ uppfyller följande villkor:

- $\Omega \in \Sigma$.
- $A \in \Sigma \implies A^c \in \Sigma$, där A^c är komplementhändelsen.
- Om $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$ gäller $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

\mathbb{P} uppfyller i sin tur följande:

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ för något $A \in \Sigma$.
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Om $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$ är disjunkta gäller $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Med andra ord är σ -algebran Σ en samling av delmängder av utfallsrummet Ω som innehåller den totala händelsen Ω . De två sista villkoren säger att Σ är sluten under komplement och uppräkningsbar union. Motsvarande, sannolikhetsmättet \mathbb{P} antar värden i $[0, 1]$ och är uppräkningsbart additiv.

2.2.2 Stokastiska processer

Med ett sannolikhetsrum enligt avsnitt 2.2.1 definieras en stokastisk variabel enligt kapitel 1 i (Anevski 2015) som funktionen

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

vilken uppfyller $\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \forall x$, med andra ord att mängden $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ är en händelse.

På samma sätt definieras en stokastisk vektor $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ som funktionen

$$\mathbf{X} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$$

vilken uppfyller $\{\omega : X_1(\omega) \leq x_1, X_2(\omega) \leq x_2, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}, \forall \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$.

På generell form definieras en stokastisk process som funktionen

$$X : \Omega \mapsto \mathcal{X},$$

där \mathcal{X} är ett oändligtdimensionellt rum som i sin tur kan beskrivas som ett funktionsrum vilket gör att en stokastisk process kan betraktas som "stokastisk funktion" $X(t)$. Förenklat, då ett slumpmässigt

experiment utförs tillhör utfallet ω utfallsrummet Ω . Detta gör att den stokastiska processen kan ses som en deterministisk funktion

$$x(t) = X(t; \omega).$$

Då inferens ska göras på en stokastisk process erhålls en funktion $x(t)$ som en observation av $X(t)$. Detta leder till det mer kompakta skrivsättet $\{X(t); t \in T\}$. Mängden T kan definieras på olika sätt beroende på vilken process som betraktas. Följande kan gälla för tidsargument respektive utfallsrum:

Diskret tid	$T = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}_0.$
Kontinuerlig tid	$T = [0, \infty) = \mathbb{R}_+.$
Diskret utfallsrum	$X(t; \omega) \in \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}_0.$
Kontinuerligt utfallsrum	$X(t; \omega) \in \mathbb{R}.$

2.2.3 Wienerprocessen

De processer som undersöks i arbetet har en stokastisk beståndsdel, en så kallad Wienerprocess $W(t)$, $t \geq 0$ och kännetecknas av följande enligt sida 18 i (Ekblom 2021):

- $W(0) = 0$.
- Trajektorier $t \mapsto W(t; \omega)$ är kontinuerliga för alla $\omega \in \Omega$.
- Inkrement är normalfördelade:

$$W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s), \quad s < t.$$

- Inkrement är oberoende:

$$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}), \quad \forall 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n,$$

är oberoende.

Wienerprocessen kan generaliseras med driftstermen $a dt$ enligt

$$dX(t) = a dt + b dW(t), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2.2.4 Itôprocesser

Genom att låta driften och diffusionen vara funktioner som beror av både tid och processen själv kan den generaliserade Wienerprocessen utvidgas till en så kallad Itôprocess enligt sida 30 i (Ekblom 2021)

$$dX(t) = a(t, X(t)) dt + b(t, X(t)) dW(t).$$

Den geometriska browniska rörelsen är ett exempel på en Itôprocess som används vid till exempel modellering av finansiella tillgångar. En aktie med drifts- respektive diffusionskoefficient μ respektive σ kan modelleras på detta vis enligt

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \\ a(t, S(t)) &= \mu S(t), \\ b(t, S(t)) &= \sigma S(t). \end{aligned}$$

2.2.5 Filtration

Ett begrepp som är av större betydelse inom teorin för stokastiska processer är filtration. Då en strikt definition av begreppet kräver mätteori, vilket inte beskrivs i detta arbete, kommer en mer kortfattad definition enligt sida 39 i (Ekblom 2021) att ges i stället.

$\mathcal{F}_{t \in [0, T]}^W$ benämns som filtrationen genererad av Wienerprocessen $W(t)$ på intervallet $[0, T]$ där $\mathcal{F}_s^W \subseteq \mathcal{F}_t^W$, $s \leq t$. Tolkningen är den ackumulerade informationen som genereras av Wienerprocessen $W(t)$. Med andra ord är \mathcal{F}_t mängden händelser som går att observera vid tidpunkten t .

2.2.6 Stopptid

En stopptid av filtrationen \mathcal{F}_t är enligt kapitel 2, sida 3 i (Haugh 2016) en stokastisk tidpunkt τ med egenskapen att händelsen $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t > 0$. Förenklat är en stopptid en tid vars värde är en del av den ackumulerade informationen vid denna tidpunkt.

2.2.7 Adapterade processer

Filtrationsbegreppet möjliggör definitionen av så kallade adapterade processer. Enligt sida 41 i (Ekblom 2021) sägs en process $\{X(t); t \geq 0\}$ vara adapterad till filtrationen $\mathcal{F}_{t \in [0, T]}^W$ om

$$X(t) \in \mathcal{F}_t^W, \quad \forall t \in [0, T],$$

det vill säga att värdet av processen $X(t)$ är känt givet informationen vid tidpunkten t , $\forall t \in [0, T]$.

2.2.8 Martingaler och lokala martingaler

I kapitel 5 i (Zhang 2015) sägs en stokastisk process $\{X(t); t \geq 0\}$ vara en martingal med avseende på filtrationen \mathcal{F}_t om följande är uppfyllt:

- $X(t)$ är \mathcal{F}_t -mätbar, det vill säga om värdet av $X(t)$ är känt vid tiden t ,
- $\mathbb{E}[|X(t)|] < \infty$,
- $\mathbb{E}[X(t) | \mathcal{F}_s] = X(s)$, $\forall s \leq t$.

$\{X(t); t \geq 0\}$ sägs vidare vara en lokal martingal om det existerar en växande sekvens $\{\tau_n; n \geq 1\}$ av stopptider som uppfyller:

- $\tau_n \xrightarrow{a.s.} \infty$ då $n \rightarrow \infty$,
- Den stoppade processen $\{X(t \wedge \tau_n); t \geq 0\}$ är en martingal för alla n .

2.2.9 Elementära processer

En process $h(t; \omega)$ är elementär enligt kapitel 2, sida 3 i (Haugh 2016) om den är styckvis konstant, det vill säga att det existerar en följd av stopptider $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ och en mängd \mathcal{F}_{t_i} -mätbara funktioner $e_i(\omega)$ som uppfyller

$$h(t; \omega) = \sum_i e_i(\omega) I_{[t_i, t_{i+1}]}(t),$$

där

$$I_{[t_i, t_{i+1}]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ 0, & t \notin [t_i, t_{i+1}]. \end{cases}$$

2.2.10 Stokastiska integraler

Den stokastiska integralen av den elementära funktionen $h(t; \omega)$ med avseende på Wienerprocessen $W(t)$ definieras enligt kapitel 2, sida 3 i (Haugh 2016) som följande

$$\int_0^T h(t; \omega) dW(t; \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i(\omega)(W(t_{i+1}; \omega) - W(t_i; \omega)).$$

Här evalueras funktionen $h(t; \omega)$ i den vänstra ändpunkten i det intervall som tidpunkten t ligger i vilket är en förutsättning för följande resonemang.

En generell process $X(t; \omega)$ definieras enligt

$$\int_0^T X(t; \omega) dW(t; \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T X^{(n)}(t; \omega) dW(t; \omega),$$

där $X^{(n)}(t)$ utgörs av en sekvens av elementära processer vilka konvergerar mot $X(t)$.

2.2.11 Stokastiska differentialekvationer

Framställningen i avsnitt 2.1 i (Haugh 2016) beskriver en n -dimensionell Itôprocess $X(t)$ är en process som kan skrivas på formen

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dW(s), \quad (2.7)$$

där $W(s)$ är en m -dimensionell Wienerprocess och $a(s)$ och $b(s)$ är n -dimensionella samt $n \times m$ -dimensionella \mathcal{F}_t -adapterade processer. En alternativ representation av (2.7) är

$$dX(t) = a(t) dt + b(t) dW(t).$$

En så kallad n -dimensionell stokastisk differentialekvation (Stochastic differential equation, SDE) är på formen

$$dX(t) = a(t, X(t)) dt + b(t, X(t)) dW(t), \quad X(0) = x, \quad (2.8)$$

med samma villkor som för (2.7). På integralform skrivs (2.8) som

$$X(t) = x + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(s, X(s)) dW(s). \quad (2.9)$$

Existensen av (2.9) kräver att $b(t, X(t))$ uppfyller följande enligt sida 38 i (Eklom 2021):

- $\int_0^T \mathbb{E}[b^2(t, X(t))] dt < \infty$,
- $b(t, X(t)) \in \mathcal{F}^W(t), \forall t \in [0, T]$.

2.2.12 Räkneprocesser

Utgå enligt avsnitt 2.2.1 från sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ och filtrationen \mathcal{G}_t av σ -delmängderna av \mathcal{F} . En så kallad räkneprocess eller punktprocess N_t definieras, enligt avsnitt 3.1 i (Luciano och Vigna 2005), som sekvensen $\{T_0, T_1, \dots\} \in [0, \infty]$ där $T_0 = 0, T_n < T_{n+1}, T_n < \infty$ med

$$\begin{cases} N_t = n, & t \in [T_n, T_{n+1}), \\ N_t = \infty, & \text{om } t \geq T_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n, \end{cases}$$

där N_t är antalet hopp som inträffat till och med tidpunkten t och T_n tidpunkten för processens n :te hopp. Processen N_t benämns som icke-explosiv om $T_\infty = \infty$ nästan säkert.

2.2.13 Stokastisk intensitet

I avsnitt 3.2 i (Luciano och Vigna 2005) beskrivs begreppet stokastisk intensitet med följande förutsättningar: låt $\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ vara en filtration och λ en icke-negativ \mathcal{F}_t -mätbar process som uppfyller $\int_0^t \lambda(s) ds < \infty$ nästan säkert. Den icke-explosiva adapterade räkneprocessen N_t sägs admittera till intensiteten λ om den så kallade kompensatorn till N_t admitterar till $\int_0^t \lambda(s) ds$, alltså om $M_t = N_t - \int_0^t \lambda(s) ds$ är en lokal martingal. Om det vidare gäller att $\mathbb{E}[\int_0^t \lambda(s) ds] < \infty$ följer det att $M_t = N_t - \int_0^t \lambda(s) ds$ är en martingal. Med detta uppfyllt erhålls

$$\mathbb{E}[N_{t+\Delta t} - N_t | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}\left[\int_0^{t+\Delta t} \lambda(s) ds \Big| \mathcal{F}_t\right] = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

vilket beskriver det genomsnittliga antal hopp som processen gör inom ett litet framtida tidsintervall.

2.2.14 Dubbelstokastiska processer

Givet en icke-explosiv räkneprocess N_t med intensitet λ benämns, enligt avsnitt 3.3 i (Luciano och Vigna 2005), denna som dubbelstokastiskt driven av filtrationen \mathcal{F}_t om för alla $t < s$, givet σ -algebran $\mathcal{G}_t \vee \mathcal{F}_s = \sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{F}_s)$, följande gäller

$$N_s - N_t \sim \text{Pois}\left(\int_t^s \lambda(u) du\right).$$

Notera att en Poissonprocess är en dubbelstokastisk process driven av filtrationen $\mathcal{F}_t = \{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0, \forall t \geq 0$, det vill säga att intensiteten är deterministisk. Om en stopptid τ är dubbelstokastisk med intensiteten λ innebär det att det första hoppet av den underliggande räkneprocessen inträffar vid tidpunkten τ med dubbelstokastisk intensitet λ .

2.2.15 Nollkupongspriser och överlevnadsfunktionen

I följande avsnitt 3.3 i (Luciano och Vigna 2005) presenteras likheter mellan priset av en nollkupongsobligation och överlevnadsfunktionen. En nollkupongsobligation som utfärdas vid tiden 0 med nominellt värde 1 kr, löptid t år och ränta r har enligt avsnitt 1.8 i (G. Andersson 2013) priset $(1+r)^{-t}$. Givet en dubbelstokastisk stopptid τ med intensitet λ gäller följande

$$\mathbb{P}(\tau > s | \mathcal{G}_t) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^s \lambda(u) du} \Big| \mathcal{G}_t\right], \quad (2.10)$$

det vill säga priset för en nollkupongsobligation vid tidpunkten t med förfalltid $s > t$ i fallet att λ är en kortränteprocess eller överlevnadsfunktionen enligt (2.6) där λ är en dödlighetsintensitetsprocess..

Genom att skriva överlevnadsfunktionen som $p(t) = \mathbb{P}(\tau > t)$ ges täthetsfunktionen för τ av $-p'(t)$ enligt (2.4). Med representationen i (2.10) erhålls

$$p'(t) = \mathbb{E}\left[-e^{-\int_0^t \lambda(u) du} \lambda(t) \Big| \mathcal{G}_t\right], \quad (2.11)$$

det vill säga täthetsfunktionen för återstående livslängd. Täthetsfunktionen för stopptiden τ är alltså kopplad till den för återstående livslängd. Detta kan sammanfattas som: om τ är den återstående livslängden T_x för en x -årig individ kan överlevnadsfunktionen $l_x(t)$ och täthetsfunktionen för återstående livslängd T_x beräknas med (2.10) och (2.11) givet en dödlighetsintensitetsprocess.

2.2.16 Affina processer

Som anges i avsnitt 3.4 i (Luciano och Vigna 2005) går (2.10) och (2.11) att förenkla då λ är en affin process. Detta uppnås genom att formulera processen λ som en funktion Λ i termer av en reellvärd process X med dynamiken

$$dX(t) = f(X(t)) dt + g(X(t)) dW(t),$$

där driften $f(X(t))$ och kovariansmatrisen $g(X(t))g(X(t))'$ sägs ha ett så kallat affint beroende¹ med $X(t)$. Med dessa förutsättningar kan ett av de mest centrala resultaten formuleras enligt

$$\mathbb{E} \left[e^{\int_t^T -\Lambda(X(u)) du + wX(T)} \middle| \mathcal{G}_t \right] = e^{\alpha(T-t) + \beta(T-t)X(t)}, \quad \forall w \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

där funktionerna α och β är sådana att de uppfyller de så kallade generaliserade Riccati-ODE:erna (Ordinary differential equation).

2.2.17 Korträntemodeller

Vid modellering av kortrräntor eller momentana kontinuerligt sammansatta räntor, används så kallade korträntemodeller. Dessa brukar presenteras som stokastiska differentialekvationer med olika strukturer. Mot bakgrunden av (H. Andersson och Cato 2023) kommer de tre korträntemodellerna Ornstein-Uhlenbeck, Feller och Hull-White att undersökas. Vissa finansiella storheter som till exempel volatilitet uppvisar en så kallad medelvärdesåtervändande egenskap. Intuitivt är dödlighet dock inget som förväntas vara medelvärdesåtervändande. Däremot visar det sig att om en tidsberoende medelvärdesåtervändande komponent används i stället uppnås betydligt bättre resultat vid modelleringen då den bromsande effekt som en konstant medelvärdesnivå annars ger upphov till undviks.

För att framställningen i 2.2.15 och 2.2.16 ska kunna användas i sammanhanget av dödlighet modifieras förutsättningarna enligt kapitel 4, sida 7 i (Luciano och Vigna 2005) på följande vis: låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum enligt 2.2.1 med filtrationen \mathcal{G}_t av sub- σ -algebror av \mathcal{F}_t . Betrakta en x -årig individ med återstående livslängd T_x med dubbelstokastisk stopptid med intensitet μ_x som i sin tur drivs av sub-filtrationen \mathcal{F}_t där $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$. Då gäller det att den återstående livslängden T_x är den första hopptiden för en icke-explosiv process N_t med intensitet μ_x . Räkneprocessen N_t kan i detta sammanhang betraktas som en process som gör ett hopp då en individen avlider på följande vis

$$\begin{cases} N_t = 0, & t < T_x, \\ N_t > 0, & t \geq T_x. \end{cases}$$

Under dessa förutsättningar och med den affina representationen enligt (2.12) kan överlevnadsfunktionen nu koncist skrivas som

$$l_x(t) = \mathbb{P}(T_x > t | \mathcal{G}_0) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^t \mu_x(u) du} \middle| \mathcal{G}_0 \right] = e^{\alpha(t) + \beta(t)\mu_x(0)}, \quad (2.13)$$

där $w = 0$, $\Lambda(X(t)) = X(t)$. Här har stopptiden τ ersatts med återstående livslängd T_x , filtrationen \mathcal{G}_t med \mathcal{G}_0 och den generiska intensitetsprocessen $\lambda(t)$ med dödlighetsintensitetsprocessen $\mu_x(t)$. Genom att använda (2.5) och (2.13) kan intensiteten skrivas på explicit form för att sedan användas direkt vid beräkning av reserver vilket kommer att förtydligas senare då $\mu_x(t)$ inte är begränsad till dödlighet. Beroende på val av korträntemodell varierar utseendet av funktionerna α och β . Observera att $\alpha(t, T)$ och $\beta(t, T)$ här är evaluerade i $(0, t)$ vilket förkortas som $\alpha(t)$ och $\beta(t)$. Nedan följer en introduktion, baserat på avsnitt 2.1 och 2.2 i (Zeddouk och Devolder 2020), av de tre korträntemodeller som valts ut.

¹Definitionen av detta begrepp är utanför den teoretiska ramen för detta arbete men kan studeras i Definition C.1 i (Duffie 2005).

Ornstein-Uhlenbeck

Ornstein-Uhlenbeck beskriver dödlighetsintensiteten som

$$d\mu_x(t) = a\mu_x(t) dt + \sigma dW(t), \quad a > 0, \sigma > 0,$$

där $W(t)$ är en Wienerprocess. Modellen är normalfördelad vilket gör att SDE:n lösas analytiskt. Med de affina egenskaperna kan $\alpha(t, T)$ och $\beta(t, T)$ beräknas genom att lösa följande system av ODE:er:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha(t, T)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 \beta(t, T)^2, \\ \frac{\partial \beta(t, T)}{\partial t} = a\beta(t, T) - 1, \\ \alpha(T, T) = \beta(T, T) = 0. \end{cases}$$

Lösningarna till detta system ges av

$$\begin{cases} \alpha(t, T) = \frac{\sigma^2(T-t)}{2a^2} + \frac{\sigma^2}{4a^3} e^{2a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{a^3} e^{a(T-t)} + \frac{3\sigma^2}{4a^3}, \\ \beta(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{a(T-t)}). \end{cases}$$

Lösningen kan då explicit skrivas som

$$\mu_x(t) = \mu_x(s) e^{a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{a(t-u)} dW(u), \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Ornstein-Uhlenbeck antar negativa värden med en strikt positiv sannolikhet som ges av

$$\mathbb{P}(\mu_x(t) < 0 | \mathcal{F}_s) = \Phi\left(-\frac{\mu_x(s) e^{a(t-s)}}{\sigma \sqrt{\frac{e^{2a(t-s)} - 1}{2a}}}\right) = \Phi(\zeta(a, \sigma)),$$

där Φ är fördelningsfunktionen för en $\mathcal{N}(0, 1)$ -variabel och $\zeta(a, \sigma)$ är en växande respektive avtagande funktion i termer av σ respektive a . Denna egenskap är mindre fördelaktig då endast positiva värden av dödlighetsintensiteten är av intresse. Däremot är sannolikheten att modellen antar negativa värden försumbar då σ och a är rimligt valda.

Feller

Feller modellerar dödlighetsintensiteten enligt

$$d\mu_x(t) = a\mu_x(t) dt + \sigma \sqrt{\mu_x(t)} dW(t), \quad a > 0, \sigma > 0,$$

där $W(t)$ är en Wienerprocess. Jämfört med Ornstein-Uhlenbeck antar Feller ej negativa värden. Däremot kan modellen anta värdet noll med positiv sannolikhet. Överlevnadsfunktionen $p_{T-t, x+t} = e^{\alpha(t, T) - \beta(t, T)\mu_x(t)}$ fås vid lösning av följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + a\mu_x \frac{\partial p}{\partial \mu_x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \mu_x \frac{\partial^2 p}{\partial \mu_x^2} - \mu_x p = 0, \\ p_{0, x+t} = 1, \end{cases}$$

som insatt ovan ger upphov till ODE:erna:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha(t, T)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \beta(t, T)}{\partial t} = \alpha\beta(t, T) + \frac{1}{2} \sigma^2 \beta^2(t, T) - 1, \\ \alpha(T, T) = \beta(T, T) = 0. \end{cases}$$

Lösningarna till systemet ges av

$$\begin{cases} \beta(t, T) = \frac{1 - e^{b(T-t)}}{c + de^{b(T-t)}}, \\ \alpha(t, T) = \beta(T, T) = 0, \end{cases}$$

där $b = -\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$, $c = \frac{b+a}{2}$ och $d = \frac{b-a}{2}$.

Hull-White

Hull-Whites utmärker sig som medelvärdesåtervändande modell genom att låta den komponent som speglar medelvärdesnivån vara tidsberoende. Dödlighetsintensiteten kan då fluktuera kring nivån $\xi(t)/b$ och återvända mot denna med hastigheten b . Hull-Whites modell ges av

$$d\mu_x(t) = (\xi(t) - b\mu_x(t)) dt + \sigma dW(t), \quad a > 0, \sigma > 0,$$

där $W(t)$ är en Wienerprocess och $\xi(t)$ en deterministisk funktion i termer av tiden t . På grund av dödlighetens exponentiella utseende över tid väljs därför $\xi(t)$ som en funktion på formen

$$\xi(t) = Ae^{Bt},$$

där konstanterna A och B är strikt positiva. (Zeddouk och Devolder 2020) liksom (H. Andersson och Cato 2023) använder Gompertz dödlighetsmodell som $\xi(t)$ vilket även kommer att göras i detta arbete. Kvoten A/b kan betraktas som basdödligheten vid ålder x och B som det biologiska åldrandet. Modellen kan då skrivas om enligt

$$d\mu_x(t) = b\left(\frac{A}{b}e^{Bt} - \mu_x(t)\right) dt + \sigma dW(t).$$

Med $\frac{A}{b} = \mu_x(0)$ fås

$$d\mu_x(t) = b\left(\mu_x(0)e^{Bt} - \mu_x(t)\right) dt + \sigma dW(t).$$

Då Hull-White är en normalfördelad modell kan överlevnadsfunktionen beräknas direkt. Modellen ger följande system av ODE:er:

$$\begin{cases} \frac{\partial\alpha(t, T)}{\partial t} = \beta(t, T)\xi(t) - \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2, \\ \frac{\partial\beta(t, T)}{\partial t} = \beta(t, T)b - 1, \\ \alpha(T, T) = \beta(T, T) = 0. \end{cases}$$

Lösningarna ges slutligen av

$$\begin{cases} \alpha(t, T) = \frac{A}{b} \left[e^{-bT} \frac{e^{(B+b)T} - e^{(B+b)t}}{B+b} - \frac{e^{BT} - e^{Bt}}{B} \right] - \frac{\sigma^2}{2b^2} \left[\frac{1}{b} (1 - e^{-b(T-t)}) - T + t \right] \\ \quad - \frac{\sigma^2}{4b^3} (1 - e^{-b(T-t)})^2, \\ \beta(t, T) = \frac{1}{b} (1 - e^{-b(T-t)}), \end{cases}$$

och dödlighetsintensiteten av

$$\mu_x(t) = \mu_x(s)e^{-b(t-s)} + \frac{A}{b+B} (e^{Bt} - e^{Bs-b(t-s)}) + \sigma e^{-bt} \int_s^t e^{bu} dW(u), \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

2.3 Markovprocesser inom livförsäkring

Följande framställning enligt avsnitt 7.1 och 7.2 i (Norberg 2002) och kapitel 5, avsnitt 1, 3 i (Asmussen och Steffensen 2020) ger en bakgrund till det Markovska synsättet av försäkringskontrakt. Betrakta ett försäkringskontrakt som utfärdas vid tiden 0 och som löper över n år. Kontraktet kan till exempel vara en pensionsförsäkring, invaliditetsförsäkring eller sjukförsäkring, det vill säga kontrakt där förmåner och premier är beroende av övergångar mellan olika tillstånd som specificeras av kontraktet. Dessa tillstånd antas tillhöra en ändlig mängd $\mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, z\}$ där kontraktet kan endast befinna sig i ett av dessa tillstånd åt gången. Låt kontraktets tillstånd vid tiden t betecknas med $Z(t)$. Då $Z(t)$ betraktas som en funktion $Z : [0, n] \mapsto \mathcal{Z}$ är $Z(t)$ högerkontinuerlig som gör ett ändligt antal hopp med begynnelsevillkoret $Z(0) = 0$. Kontraktets stokastik modelleras genom att låta $Z(t)$ vara en stokastisk process på sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ enligt avsnitt 2.2.1.

2.3.1 Markovegenskapen

En stokastisk process bestäms i grunden av dess ändligtdimensionella fördelningar. I detta fall där $Z(t)$ har ett ändligt tillståndsrum bestäms dessa av sannolikheterna för de elementära händelserna $\cap_{h=1}^p (Z(t_h) = j_h)$, $t_1 < \dots < t_p \in [0, n]$, $j_1, \dots, j_p \in \mathcal{Z}$. Då gäller det att

$$\mathbb{P}(Z(t_h) = j_h, h = 1, \dots, p) = \prod_{h=1}^p \mathbb{P}(Z(t_h) = j_h \mid Z(t_g) = j_g, g = 0, \dots, h-1), \quad (2.14)$$

där $t_0 = 0$ och $j_0 = 0$ på grund av begynnelsevillkoret $Z(0) = 0$ som ger att $\mathbb{P}(Z(0) = 0) = 1$. Om det vidare antas att för alla $t_1 < \dots < t_p \in [0, n]$ och $j_1, \dots, j_p \in \mathcal{Z}$ gäller att

$$\mathbb{P}(Z(t_p) = j_p \mid Z(t_h) = j_h, h = 1, \dots, p-1) = \mathbb{P}(Z(t_p) = j_p \mid Z(t_{p-1}) = j_{p-1}), \quad (2.15)$$

vilket är den så kallade Markovegenskapen. (2.15) innebär att $Z(t)$ är fullständigt bestämd av de så kallade övergångssannolikheterna

$$p_{ij}(s, t) := \mathbb{P}(Z(t) = j \mid Z(s) = i), \quad s < t \in [0, n], \quad (i, j) \in \mathcal{Z}.$$

Givet (2.15) övergår (2.14) i

$$\mathbb{P}(Z(t_h) = j_h, h = 1, \dots, p) = \prod_{h=1}^p p_{j_{h-1}j_h}(t_{h-1}, t_h). \quad (2.16)$$

Ett triviale men viktigt samband är

$$\sum_{j \in \mathcal{Z}} p_{ij}(s, t) = 1, \quad (2.17)$$

vilket säger att summan av sannolikheterna för att processen $Z(t)$ gör ett hopp från något tillstånd j till tillståndsrummet \mathcal{Z} som består av de möjliga tillstånden är 1. Hädanefter antas det att $Z(t)$ i detta arbete uppfyller denna Markovegenskap enligt (2.15) och att den är en tidskontinuerlig Markovprocess på tillståndsrummet \mathcal{Z} .

2.3.2 Chapman-Kolmogorovs ekvation

För ett fixt $t \in [0, n]$ är händelserna $\{Z(t) = j\}$, $j \in \mathcal{Z}$ disjunkta och deras union en nästan säker händelse. Det följer att

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z(u) = k \mid Z(s) = i) &= \sum_{j \in \mathcal{Z}} \mathbb{P}(Z(t) = j, Z(u) = k \mid Z(s) = i) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{Z}} \mathbb{P}(Z(t) = j \mid Z(s) = i) \mathbb{P}(Z(u) = k \mid Z(s) = i, Z(t) = j). \end{aligned}$$

Om $Z(t)$ dessutom är Markovsk fås att

$$p_{ik}(s, u) = \sum_{j \in \mathcal{Z}} p_{ij}(s, t) p_{jk}(t, u), \quad 0 \leq s \leq t \leq u,$$

vilket är den så kallade Chapman-Kolmogorovs ekvation.

2.3.3 Övergångsintensiteter

För att kunna specificera en Markovsk modell i kontinuerlig tid är det nödvändigt att definiera så kallade övergångsintensiteter för att (2.16) ska beskriva sannolikheter på ett konsistent sätt. Övergångsintensiteten för en övergång $i \rightarrow j$ som funktion av tiden t definieras enligt

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t+h)}{h}, \quad (i, j) \in \mathcal{Z}, i \neq j, t \in [0, n), \quad (2.18)$$

där det antas att övergångsintensiteten $\mu_{ij}(t)$ är styckvis kontinuerlig. En ekvivalent definition av (2.18) är

$$p_{ij}(t, t+h) = \mu_{ij}(t)h + o(h), \quad \frac{o(h)}{h} \rightarrow 0 \text{ då } h \rightarrow 0.$$

Övergångsintensiteten ska tolkas som proportionalitetsfaktorn mellan övergångssannolikheten och ett litet tidsintervall Δt genom $p_{ij}(t, t+\Delta t) \propto \mu_{ij}(t)\Delta t$. Av notationsskäl är det praktiskt att införa beteckningen

$$\mu_{i \cdot}(t) = \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t), \quad (2.19)$$

det vill säga den totala intensitet med vilken processen $Z(t)$ lämnar tillstånd i . Det går nu med hjälp av (2.17) och (2.19) att formulera övergångssannolikheten för att processen står kvar i samma tillstånd inom ett infinitesimalt intervall h enligt

$$p_{ii}(t, t+h) = 1 - \mu_{i \cdot}(t)h + o(h). \quad (2.20)$$

2.3.4 Kolmogorovs differentialekvationer

Även om övergångssannolikheterna är av intresse för att kunna förstå en Markovsk modell är det problematiskt att införa dem på explicit form då de är svåra att tolka även på intuitiv väg. Genom att utnyttja övergångsintensiteterna går det att knyta an förändringen av övergångssannolikheterna med dessa.

Genom att formulera Chapman-Kolmogorovs ekvation för tidsintervallet $(s, t] = (s, s+h] \cup (s+h, t]$

och att utnyttja (2.20) fås

$$\begin{aligned}
p_{ik}(s, t) &= \sum_j p_{ij}(s, s+h) p_{jk}(s+h, t) \\
&= (1 - \mu_i(s)h) p_{ik}(s+h, t) + \sum_{j \neq i} (\mu_{ij}(s)h) p_{jk}(s+h, t) + o(h) \\
&= p_{ik}(s+h, t) - \mu_i(s) p_{ik}(s+h, t)h + \sum_{j \neq i} (\mu_{ij}(s)h) p_{jk}(s+h, t) + o(h) \\
&= \left/ \mu_i(t) = \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t) \right/ \\
&= p_{ik}(s+h, t) + \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(s) (p_{jk}(s+h, t) - p_{ik}(s+h, t))h + o(h) \\
&\iff \frac{p_{ik}(s+h, t) - p_{ik}(s, t)}{h} = - \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(s) (p_{jk}(s+h, t) - p_{ik}(s+h, t)) + \frac{o(h)}{h} \\
&\iff \frac{\partial}{\partial s} p_{ik}(s, t) = - \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(s) (p_{jk}(s, t) - p_{ik}(s, t)),
\end{aligned}$$

med villkoret

$$p_{ik}(t, t) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

vilket är de så kallade Kolmogorovs bakåtekvationer (KBE) då deriveringen utförs med avseende på det bakre tidsargumentet s . I det fall då uppdelningen av tidsintervallet $(s, t]$ i stället görs enligt $(s, t] = (s, t] \cup (t, t+h]$ erhålls Kolmogorovs framåtekvationer på ett liknande sätt som ovan. Härledningen i detta fall utelämnas dock. Kolmogorovs framåtekvationer (KFE) ges av

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s, t) = \sum_{k \neq j} p_{ik}(s, t) \mu_{kj}(t) - p_{ij}(s, t) \mu_j(t), \quad (2.21)$$

med

$$p_{ij}(s, s) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (2.22)$$

2.3.5 Betalströmmar

Med samma förutsättningar som i avsnitt 2.3, betrakta ett försäkringskontrakt som utfärdas vid tiden $t = 0$ och upphör vid $t = n$. En ändligt stor mängd av tillstånd som kontraktet kan anta beskrivs enligt $\mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, z\}$ och $Z(t)$ beskriver kontraktets tillstånd vid tiden $t \in [0, n]$. Låt informationen av kontraktet upp till och med tiden t representeras av σ -algebran $\mathcal{F}_t^Z = \sigma(Z(s), s \in [0, t])$ och dess utveckling ges av filtrationen $\mathcal{F}_{t \in [0, n]}^Z$. Låt vidare $N^k(t)$ beteckna antalet övergångar till tillstånd k som skett innan tiden t .

Om de totala utbetalda förmånerna minus premier över tidsintervallet $[0, t]$ betecknas som $B(t)$ beskrivs dess dynamik enligt (Asmussen och Steffensen 2020) av

$$dB(t) = dB^{Z(t)}(t) + \sum_{k \neq Z(t-)} b^{Z(t-)^k}(t) dN^k(t), \quad (2.23)$$

där B^j respektive b^{jk} är en deterministisk funktion som beskriver de betalningar som görs vid vistelse i tillstånd j respektive övergång från tillstånd j till tillstånd k . Det antas att $B^{Z(t)}(t)$ går att dela upp i en absolutkontinuerlig och en diskret del enligt

$$dB^{Z(t)}(t) = b^{Z(t)}(t) dt + \Delta B^{Z(t)}(t),$$

där, för något tillstånd $Z(t) = j$, $\Delta B^j(t) = B^j(t) - B^j(t-)$ vilket är en klumpsumma som betalas vid tiden t då $\Delta B^j(t) \neq 0$.

2.3.6 Prospektiv reserv och Thieles differentialekvation

Ur försäkringsgivarens synvinkel är det av intresse att värdera framtida skulder som uppstår till följd av ett försäkringskontrakt. Då det är nuvärdet av denna skuld som är relevant för försäkringsgivaren behöver en diskonteringsränta $r(t)$ införas i beräkningarna. Detta avsnitt behandlar den prospektiva reserven och Thieles differentialekvation samt härledningarna av dessa.

Den så kallade prospektiva reserven kan skrivas som

$$V(t) = \mathbb{E} \left[\int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s) ds} dB(\tau) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Genom att substituera för $dB(\tau)$ enligt (2.23) fås

$$V(t) = \mathbb{E} \left[\int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s) ds} \left(dB^{Z(\tau)}(\tau) + \sum_{l \neq Z(\tau-)} b^{Z(\tau-)l}(\tau) dN^l(\tau) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.24)$$

Vidare går att i (2.24) betinga på $Z(t)$ i stället för \mathcal{F}_t under förutsättningen att $Z(t)$ är Markovsk och att alla betalningar beror på det nuvarande tillståndet av $Z(t)$. Detta resulterar i

$$V^{Z(t)}(t) = \mathbb{E} \left[\int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s) ds} \left(dB^{Z(\tau)}(\tau) + \sum_{l \neq Z(\tau-)} b^{Z(\tau-)l}(\tau) dN^l(\tau) \right) \middle| Z(t) \right]. \quad (2.25)$$

Då målet med detta arbete är att delvis undersöka de resulterande reserverna för respektive tillstånd i ett försäkringskontrakt är det särskilt användbart att den prospektiva reserven för ett tillstånd j kan uttryckas på explicit form enligt följande sats:

Sats 2.3.1. Reserven V kan skrivas på formen

$$V^j(t) = \int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s) ds} \sum_k p_{jk}(t, \tau) \left(dB^k(\tau) + \sum_{l \neq k} \mu_{kl}(\tau) b^{kl}(\tau) d\tau \right). \quad (2.26)$$

Bevis: Utgå från att beräkna det betingade väntevärdet i (2.25) genom att enbart betinga på det enskilda tillståndet j genom

$$\begin{aligned} V^j(t) &= \mathbb{E} \left[\int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s) ds} \left(dB^{Z(\tau)}(\tau) + \sum_{l \neq Z(\tau-)} b^{Z(\tau-)l}(\tau) dN^l(\tau) \right) \middle| Z(t) = j \right] \\ &= \int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s) ds} \underbrace{\mathbb{E} \left[dB^{Z(\tau)}(\tau) \middle| Z(t) = j \right]}_{I_1} + \int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s) ds} \underbrace{\mathbb{E} \left[\sum_{l \neq Z(\tau-)} b^{Z(\tau-)l}(\tau) dN^l(\tau) \middle| Z(t) = j \right]}_{I_2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Den första termen I_1 ger

$$\mathbb{E} \left[dB^{Z(\tau)}(\tau) \middle| Z(t) = j \right] = \sum_k p_{jk}(t, \tau) dB^k(\tau), \quad (2.28)$$

och den andra termen I_2

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\sum_{l \neq Z(\tau-)} b^{Z(\tau-)l}(\tau) dN^l(\tau) \mid Z(t) = j \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{l \neq Z(\tau-)} b^{Z(\tau-)l}(\tau) dN^l(\tau) \mid Z(t) = j, Z(\tau-) \right] \mid Z(t) = j \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{l \neq Z(\tau-)} b^{Z(\tau-)l}(\tau) \mathbb{E} \left[dN^l(\tau) \mid Z(t) = j, Z(\tau-) \right] \mid Z(t) = j \right] \\
&= \sum_{l \neq Z(\tau-)} \mathbb{E} \left[b^{Z(\tau-)l}(\tau) \mu_{Z(\tau-)l}(\tau) d\tau \mid Z(t) = j \right] \tag{2.29} \\
&= \sum_k \sum_{l \neq k} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{Z(\tau-)=k\}} b^{kl}(\tau) \mu_{kl}(\tau) d\tau \mid Z(t) = j \right] \\
&= \sum_k \sum_{l \neq k} p_{jk}(t, \tau) \mu_{kl}(\tau) b^{kl}(\tau) d\tau \\
&= \sum_k p_{jk}(t, \tau) \sum_{l \neq k} \mu_{kl}(\tau) b^{kl}(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

(2.28) och (2.29) insatt i (2.27) ger (2.26). □

Även om (2.26) ger ett explicit uttryck för reserven för tillståndet j är det fortfarande inte rättfram att beräkna den då övergångssannolikheterna ej går att uttrycka på ett trivialt sätt. Ett sätt att kringgå detta är att med hjälp av Kolmogorovs differentialekvationer skriva om (2.26) så att övergångssannolikheterna försvinner ur hanteringen. Då erhålls den så kallade Thieles differentialekvation för ett tillstånd j .

Sats 2.3.2. Reserven V^j uppfyller ett system av ordinära differentialekvationer sådana att i deriverbara punkter, det vill säga $\Delta B^j(t) = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V^j(t) &= r(t) V^j(t) - b^j(t) - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) (b^{jk}(t) + V^k(t) - V^j(t)), \\
V^j(t-) &= V^j(t) + \Delta B^j(t), \quad \Delta B^j(t) \neq 0, \\
V^j(n) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Bevis: Genom att utnyttja sambandet

$$\frac{d}{dt} \int_t^n g(t, \tau) d\tau = -g(t, t) + \int_t^n \frac{d}{dt} g(t, \tau) d\tau$$

för de tidpunkterna där $V^j(t)$ är deriverbar fås med (2.26) att

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V^j(t) &= \frac{d}{dt} \int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s) ds} \left(\sum_k p_{jk}(t, \tau) \left(dB^k(\tau) + \sum_{l \neq k} \mu_{kl}(\tau) b^{kl}(\tau) d\tau \right) \right) \\
&= -e^{-\int_t^\tau r(s) ds} \left(\sum_k p_{jk}(t, t) \left(b^k(t) + \sum_{l \neq k} \mu_{kl}(t) b^{kl}(t) \right) \right) \\
&\quad + \int_t^n \frac{d}{dt} e^{-\int_t^\tau r(s) ds} \left(\sum_k p_{jk}(t, \tau) \left(dB^k(\tau) + \sum_{l \neq k} \mu_{kl}(\tau) b^{kl}(\tau) \right) \right) d\tau \\
&\quad + \int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s) ds} \left(\sum_k \frac{d}{dt} p_{jk}(t, \tau) \left(dB^k(\tau) + \sum_{l \neq k} \mu_{kl}(\tau) b^{kl}(\tau) \right) \right) d\tau \\
&= -\left(b^j(t) + \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) b^{jk}(t) \right) + r(t) V^j(t) \\
&\quad + \int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s) ds} \left(\sum_k \frac{d}{dt} p_{jk}(t, \tau) \left(dB^k(\tau) + \sum_{l \neq k} \mu_{kl}(\tau) b^{kl}(\tau) \right) \right) d\tau \\
&= -\left(b^j(t) + \sum_{l \neq j} \mu_{jl}(t) b^{jl}(t) \right) + r(t) V^j(t) \\
&\quad + \int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s) ds} \left(\sum_k \mu_{j\cdot}(t) p_{jk}(t, \tau) \left(dB^k(\tau) + \sum_{l \neq k} \mu_{kl}(\tau) b^{kl}(\tau) \right) \right) d\tau \\
&\quad - \int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s) ds} \left(\sum_k \sum_{i \neq j} \mu_{ji}(t) p_{ik}(t, \tau) \left(dB^k(\tau) + \sum_{l \neq k} \mu_{kl}(\tau) b^{kl}(\tau) \right) \right) d\tau \\
&= -\left(b^j(t) + \sum_{l \neq j} \mu_{jl}(t) b^{jl}(t) \right) + (r(t) + \mu_{j\cdot}(t)) V^j(t) - \sum_{i \neq j} \mu_{ji}(t) V^i(t) \\
&= -\left(b^j(t) + \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) b^{jk}(t) \right) + (r(t) + \mu_{j\cdot}(t)) V^j(t) - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) V^k(t) \\
&= / \mu_{j\cdot}(t) = \sum_{j \neq k} \mu_{jk}(t) / \\
&= r(t) V^j(t) - b^j(t) - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) \left(b^{jk}(t) + V^k(t) - V^j(t) \right),
\end{aligned}$$

där det fjärde steget använder Kolmogorovs differentialekvationer. Till slut för de ej deriverbara tidpunkterna gäller det att

$$V^j(t-) = V^j(t) + \Delta B^j(t).$$

□

Nu kan alltså ett system av differentialekvationer för reserverna för samtliga tillstånd i försäkringskontraktet formuleras utan inblandning av övergångssannolikheter. (2.30) ger mycket information kontraktets dynamik. Den enskilda reserven för ett tillstånd j utvecklas som ett bankkonto med ränta $r(t)$ enligt termen $r(t)V^j(t)$ tillsammans med $-b^j(t)$ där pengar flödar ut från kontot i form av exempelvis försäkringspremien. Om $b^j(t)$ däremot är positiv kan det tolkas som en förmån från försäkringsbolaget till försäkringstagaren. Den sista termen $\sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) (b^{jk}(t) + V^k(t) - V^j(t))$ ska betraktas som den riskpremie som försäkringstagaren måste betala för risken för att lämna tillstånd j till något annat tillstånd k , därav summan över $k \neq j$. Dessutom motsvarar parentesens framför varje övergångsintensitet $\mu_{jk}(t)$ risksumman, alltså $R_{jk}(t) = b^{jk}(t) + V^k(t) - V^j(t)$. Intensiteten för händelsen $j \rightarrow k$ är alltså $\mu_{jk}(t)$. I det fall att $j \rightarrow k$ inträffar motsvarar förlusten risksumman $R_{jk}(t)$ eftersom försäkringsbolaget måste betala ut övergångsbetalningen $b^{jk}(t)$ och upprätta den nya reserven $V^k(t)$ för

tillståndet k . Om försäkringsbolaget däremot inte längre behöver avsätta den gamla reserven $V^j(t)$ längre blir i stället nettoeffekten på reserven $V^k(t) - V^j(t)$.

Kapitel 3

Metod

Detta kapitel syftar till att lyfta de mest centrala resultaten från teorikapitlet och hur dessa implementeras i arbetet. Då den ingående datan till modelleringen är skattade storheter är det viktigt att bakgrunden till hur denna process går till behandlas. Därefter kommer korträntemodellerna att parameterkalibreras genom minimering av det kvadratiska medelfelet mellan den implicerade uppehållstiden baserat på den skattade datan och lösningarna till korträntemodellernas ODE:er, likt förfarandet enligt avsnitt 4.3.5 och 4.3.6 i (H. Andersson och Cato 2023). Till slut kommer systemet av Thieles differentialekvationer att formuleras baserat på utformningen av försäkringskontraktet och de kalibrerade parametrarna för respektive korträntemodell.

3.1 Skattning av övergångsintensiteter

Genom att anta att övergångsintensiteterna är styckvis konstanta erhålls ett resultat enligt avsnitt 11.5 A och B i (Norberg 2002) som liknar den maximum-likelihoodskattning i avsnitt 3.1.13 i (H. Andersson och Cato 2023) med skillnaden att estimatoren i detta fall är generaliserad för en tillståndsövergång $g \rightarrow h$ inom ramen för en Markovsk modell av ett försäkringskontrakt.

Låt $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = T$ vara en ändlig partition av tidsintervallet $[0, T]$ och antag att övergångsintensiteterna är stegfunktioner enligt

$$\mu_{gh}(\tau) = \mu_{gh,q}, \quad \tau \in [t_{q-1}, t_q), \quad q = 1, \dots, r,$$

där $\mu_{gh,q} \in (0, \infty)$ och det inte råder några beroenden mellan dem. Då gäller det att log-likelihoodfunktionen ges av

$$\begin{aligned} \ln [\Lambda] &= \sum_{g \neq h} \sum_{q=1}^r (\ln [\mu_{gh,q}] N_{gh,q} - \mu_{gh,q} W_{g,q}), \\ N_{gh,q} &= \int_{t_{q-1}}^{t_q} dN_{gh}(\tau), \\ W_{g,q} &= \int_{t_{q-1}}^{t_q} I_g(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

där $N_{gh,q}$ respektive $W_{g,q}$ är det totala antalet övergångar från tillstånd g till h respektive den totala tid spenderad i tillstånd g under tidsintervallet $[t_{q-1}, t_q)$. Eftersom $\mu_{gh,q}$ är funktionellt orelaterade hittas maximum av log-likelihoodfunktion genom att maximera varje enskild term enligt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln [\Lambda]}{\partial \mu_{gh,q}} &= \frac{N_{gh,q}}{\mu_{gh,q}} - W_{g,q} = 0 \\ \iff \hat{\mu}_{gh,q} &= \frac{N_{gh,q}}{W_{g,q}}. \end{aligned}$$

Därefter kontrolleras det att $\hat{\mu}_{gh,q}$ är ett maximum genom andraderivatan

$$\frac{\partial^2 \ln[\Lambda]}{\partial \mu_{gh,q}^2} = -\frac{N_{gh,q}}{\mu_{gh,q}^2} = \left/ \mu_{gh,q} = \hat{\mu}_{gh,q} \right/ = -\frac{W_{g,q}^2}{N_{gh,q}} < 0.$$

Denna skattningsteknik kommer att tillämpas på de övergångsintensiteter där lämplig data är tillgänglig, alltså dödlighetsintensiteten $\mu_{20}(t)$ och insjuknandeintensiteten $\mu_{21}(t)$.

3.1.1 Avvecklingsintensitet

Eftersom data saknas för att kunna göra skattningar av avvecklingsintensiteten kommer denna i stället att modelleras enligt avsnitt 3.1 i (Försäkringstekniska Forskningsnämnden 2017). Avvecklingsfunktionen ges av

$$\lambda_x(t) = \mathbb{P}(U_x > t), \quad t \geq 0,$$

där U_x är längden för sjukfallet av en x -årig individ och t sjukfallets duration. Då kan avvecklingsintensiteten därigenom definieras, i likhet med ekvation (2.5), som

$$\psi_x(t) = -\frac{\lambda'_x(t)}{\lambda_x(t)}. \quad (3.1)$$

Den skattade avvecklingsfunktionen utjämnas därefter enligt avsnitt 3.5 i (Försäkringstekniska Forskningsnämnden 2017) med en funktion på formen

$$h_x(t) = \sum f(x, t)e^{g(x,t)}$$

som valdes som

$$\lambda_x(t) = \sum_{i=1}^n f_i(x)e^{-d_i(t-0.25)}, \quad t \geq 0.25,$$

där

$$f_i(x) = a_i + b_i e^{c_i x}, \quad f_n(x) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x),$$

där $\mathbf{p} = [a_i, b_i, c_i, d_i]$ är konstanter, x insjuknandeåldern och t tiden mätt i år mätt från tidpunkten för insjuknandet. Observera att $t \geq 0.25$ baseras på att rapporten endast undersöker sjukfall som pågått i minst 90 dagar. Då endast datapunkter motsvarande heltalsår används i detta arbete kommer därför $t \geq 0$ att ansättas i stället för att inkludera dessa 90 dagar vilket motsvarar avvecklingsfunktionen

$$\lambda_x(t) = \sum_{i=1}^n f_i(x)e^{-d_i t}, \quad t \geq 0.$$

Värdena för parametrarna $\mathbf{p} = [a_i, b_i, c_i, d_i]$ motsvarande frivilligt tecknade sjukförsäkringar från avsnitt 5.1.1 i (Försäkringstekniska Forskningsnämnden 2017) används därefter för att beräkna avvecklingsintensiteten enligt (3.1) för respektive kön. Till slut medelvärdesbildas de två resulterande avvecklingsintensiteterna innan de används som ingående intensitet i modelleringen. De parametervärden som kommer att användas är följande:

Tabell 3.1: Parametervärden för $\lambda_x(t)$, frivilligt sjukförsäkrade, män.

$i \backslash \mathbf{p}$	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0.0036	0.583	0.000947	1.1262
2	0.000924	0.0494	0.01237	0.0424
3	0.0001564	0.00492	0.0599	0.000804
4	-	-	-	0.484

Tabell 3.2: Parametervärden för $\lambda_x(t)$, frivilligt sjukförsäkrade, kvinnor.

$i \backslash \mathbf{p}$	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0.0063	0.6	0.00674	1.113
2	0.00065	0.0558	0.0065	0.1019
3	0.00038	0.00904	0.0526	0.000603
4	-	-	-	0.595

3.2 Korträntemodeller

Här beskrivs metodiken för parameterkalibreringen, härledningen av övergångsintensiteterna och den prospektiva reserven genom de undersökta korträntemodellerna och deras karakteriserande ODE:er.

3.2.1 Lösning av ODE:er och generalisering av överlevnadssannolikheten

Med teorin för affina korträntemodeller enligt avsnitt 2.2.17 kan ett system av ODE:er i termer av modellparametrarna formuleras. Vid lösning av detta system kan överlevnadsfunktionen beräknas enligt avsnitt 4.3.5 i (H. Andersson och Cato 2023) som

$$l_x(t) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^t \mu_x(u) du} \middle| \mathcal{G}_0 \right] = e^{\alpha(t) + \beta(t)\mu_x(0)}, \quad (3.2)$$

där $\alpha(t)$ och $\beta(t)$ är deterministiska funktioner.

Observera att ovanstående samband är formulerat inom ramen för dödlighetsintensitet och den överlevnadsfunktion som denna implicerar. Då ett sjukförsäkringskontrakt inkluderar fler övergångsintensiteter än bara för dödlighet blir det inte särskilt lämpligt att benämna $l_x(t)$ som överlevnadsfunktion då den underliggande övergångsintensiteten är något annat än dödlighetsintensiteten. Däremot är den Markovska definitionen densamma, det vill säga sannolikheten att en individ står kvar i ett tillstånd i vid tiden t givet att den stod i tillstånd i vid tiden s , alltså $p_{ii}(s, t) = \mathbb{P}(Z(t) = i \mid Z(s) = i)$, $s < t$. Genom att utnyttja Kolmogorovs framåtekvationer (2.21) för $i = j$, går det att generalisera denna sannolikhet tillsammans med villkoret (2.22) enligt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_{ii}(s, t) &= -p_{ii}(s, t)\mu_{i\cdot}(t) \\ \iff \int_s^t \frac{\partial}{\partial u} p_{ii}(s, u) du &= -\int_s^t \mu_{i\cdot}(u) du \\ \iff \left[\ln [p_{ii}(s, u)] \right]_s^t &= -\int_s^t \mu_{i\cdot}(u) du \\ \iff \ln [p_{ii}(s, t)] - \ln \underbrace{[p_{ii}(s, s)]}_{=1} &= -\int_s^t \mu_{i\cdot}(u) du \\ \iff p_{ii}(s, t) &= \exp \left[-\int_s^t \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(u) du \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Eftersom försäkringskontraktet börjar då den försäkrade är x år gammal och tidsargumenten s och t beskriver den tid som förlöpt relativt kontraktets början kommer $p_{ii}(s, t)$ därför att evalueras i $(0, t)$ för att denna representation ska bli konsistent med (3.2). Genom att utnyttja (2.5) och (3.2) kan (3.3)

skrivs om som

$$\begin{aligned}
\bar{p}_{ii}(0, t) &= \exp \left[- \int_0^t \sum_{j \neq i} \bar{\mu}_{ij,x}(u) du \right] \\
&= \prod_{j \neq i} \exp \left[- \int_0^t \bar{\mu}_{ij,x}(u) du \right] \\
&= \prod_{j \neq i} \exp \left[- \int_0^t - \frac{d}{du} \left(\frac{e^{\alpha_{ij}(u) + \beta_{ij}(u) \bar{\mu}_{ij,x}(0)}}}{e^{\alpha_{ij}(u) + \beta_{ij}(u) \bar{\mu}_{ij,x}(0)}} \right) du \right] \\
&= \prod_{j \neq i} \exp \left[\int_0^t \frac{d}{du} \left(\alpha_{ij}(u) + \beta_{ij}(u) \bar{\mu}_{ij,x}(0) \right) du \right] \\
&= \prod_{j \neq i} \exp \left[\alpha_{ij}(t) + \beta_{ij}(t) \bar{\mu}_{ij,x}(0) \right]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

där $\alpha_{ij}(t)$ och $\beta_{ij}(t)$ är lösningar till de ODE:er då $\bar{\mu}_{ij,x}(t)$ är den underliggande övergångsintensiteten med startålder x och $\bar{\mu}_{ij,x}(0)$ övergångsintensiteten för en x -årig individ. I det tredje steget har kedjeregeln använts på $(e^{g(t)})'$ där $g(t) = \alpha_{ij}(t) + \beta_{ij}(t) \bar{\mu}_{ij,x}(0)$ vilket reducerar $-(e^{g(t)})'/e^{g(t)}$ till $-g(t)'e^{g(t)}/e^{g(t)} = -g(t)' = -(\alpha_{ij}(t) + \beta_{ij}(t) \bar{\mu}_{ij,x}(0))'$. En viktig notationsmässig distinktion är att de strukna storheterna \bar{p}_{ii} och $\bar{\mu}_{ij,x}$ är icke-stokastiska eftersom de är definierade i termer av de deterministiska funktionerna $\alpha_{ij}(t)$ och $\beta_{ij}(t)$.

3.2.2 Parameterestimering i termer av lösningar till ODE:er

Genom att använda teorin för affina processer som beskrivs i avsnitt 3.1 i (Zeddouk och Devolder 2020) kan korträntemodellernas parametrar skattas genom att minimera det kvadratiske medelfelet mellan de observerade och analytiska överlevnadssannolikheterna baserat på lösningarna till ODE:er. Då fås följande optimeringsproblem baserat på avsnitt 4.3.6 i (H. Andersson och Cato 2023)

$$\boldsymbol{\theta}^* = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{l}_x(t_i) - l_x(t_i; \boldsymbol{\theta}))^2 \right], \tag{3.5}$$

där $\hat{l}_x(t_i)$ är den observerade överlevnadssannolikheten för att en individ lever åtminstone t_i år till givet att den är x år gammal och $l_x(t_i; \boldsymbol{\theta})$ är (3.2) evaluerad i (x, t_i) och den parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ som beskriver lösningarna $\alpha(t)$ och $\beta(t)$ till den undersökta korträntemodellens ODE:er. Notera att åldern x , motsvarande startåldern, hålls fix i målfunktionen.

I termer av hur den mer allmänna sannolikheten $p_{ii}(0, t)$ beskrivs i 3.2.1 övergår optimeringsproblemet (3.5) i

$$\boldsymbol{\theta}^* = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\hat{p}_{ii}(0, t_j) - \bar{p}_{ii}(0, t_j; \boldsymbol{\theta}))^2 \right], \tag{3.6}$$

där $\hat{p}_{ii}(0, t_j)$ är sannolikheten för att en individ står kvar i tillstånd i vid tiden t_j givet att den stod i tillstånd i vid tiden 0 baserat på skattningar av intensiteterna $\bar{\mu}_{ij}(t)$, $i \neq j$ och där $\bar{p}_{ii}(0, t_j; \boldsymbol{\theta})$ är detsamma som $\hat{p}_{ii}(0, t_j)$ men där intensiteterna $\bar{\mu}_{ij}(t)$, $i \neq j$ är (3.2) evaluerad i (x, t_j) och den parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ som beskriver lösningarna $\alpha(t)$ och $\beta(t)$ till den studerade korträntemodellens ODE:er.

3.2.3 Övergångsintensiteter i termer av lösningar till ODE:er på explicit form

När parameterkalibreringen av korträntemodellerna genomförts behöver de resulterande övergångsintensiteterna beräknas. På samma sätt som i avsnitt 3.2.1 kan ett explicit uttryck för övergångsintensiteten med startålder x , $\bar{\mu}_{ij,x}(t)$, formuleras. Baserat på lösningarna till ODE:erna evaluerade i $(0, t)$ för respektive korträntemodell enligt avsnitt 2.2.17 kan dessa uttryck för en övergång $i \rightarrow j$ härledas enligt:

- **Ornstein-Uhlenbeck:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_{ij}(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sigma^2 t}{2a^2} + \frac{\sigma^2}{4a^3} e^{2at} - \frac{\sigma^2}{a^3} e^{at} + \frac{3\sigma^2}{4a^3} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2a^2} + \frac{\sigma^2}{2a^2} e^{2at} - \frac{\sigma^2}{a^2} e^{at} \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left[\frac{1}{2} + e^{at} \left(\frac{1}{2} e^{at} - 1 \right) \right], \\ \frac{\partial \beta_{ij}(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{a} (1 - e^{at}) \right) \\ &= -e^{at}, \\ \bar{\mu}_{ij,x}(t) &= - \left(\frac{\sigma^2}{a^2} \left[\frac{1}{2} + e^{at} \left(\frac{1}{2} e^{at} - 1 \right) \right] - e^{at} \bar{\mu}_{ij,x}(0) \right).\end{aligned}$$

- **Feller:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_{ij}(t)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \beta_{ij}(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1 - e^{bt}}{c + de^{bt}} \right) \\ &= - \frac{be^{bt}(c + de^{bt}) + (1 - e^{bt})d e^{bt}}{(c + de^{bt})^2}, \\ \bar{\mu}_{ij,x}(t) &= \frac{be^{bt}(c + de^{bt}) + (1 - e^{bt})d e^{bt}}{(c + de^{bt})^2} \bar{\mu}_{ij,x}(0).\end{aligned}$$

- **Hull-White:**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_{ij}(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A}{b} \left[\frac{e^{Bt} - e^{-bt}}{B+b} - \frac{e^{Bt} - 1}{B} \right] - \frac{\sigma^2}{2b^2} \left[\frac{1}{b} (1 - e^{-bt}) - t \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sigma^2}{4b^3} (1 - e^{-bt})^2 \right) \\
&= \frac{A}{b} \left[\frac{Be^{Bt} + be^{-bt}}{B+b} - e^{Bt} \right] - \frac{\sigma^2}{2b^2} e^{-bt} + \frac{\sigma^2}{2b^2} - \frac{\sigma^2}{2b^2} (1 - e^{-bt}) e^{-bt} \\
&= \frac{A}{b} \left[\frac{Be^{Bt} + be^{-bt}}{B+b} - e^{Bt} \right] - \frac{\sigma^2}{2b^2} (2e^{-bt} - e^{-2bt} - 1), \\
\frac{\partial \beta_{ij}(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{b} (1 - e^{-bt}) \right) \\
&= e^{-bt}, \\
\bar{\mu}_{ij,x}(t) &= - \left(\frac{A}{b} \left[\frac{Be^{Bt} + be^{-bt}}{B+b} - e^{Bt} \right] - \frac{\sigma^2}{2b^2} (2e^{-bt} - e^{-2bt} - 1) + e^{-bt} \bar{\mu}_{ij,x}(0) \right).
\end{aligned}$$

3.3 Beräkning av reserven

Efter att övergångsintensiteterna för det undersökta försäkringskontraktet har parameterkalibrerats med korträntemodellerna kan nu ett system av Thieles differentialekvationer för respektive tillstånds reserv formuleras. Detta system kommer att lösas numeriskt i R. Resultatet kommer därefter att presenteras grafiskt mot motsvarande storhet med skattade observerade värden som underliggande data. Observera att de modellerade övergångsintensiteterna är beräknade på dagsbasis och måste därför skalas upp med en faktor 365 för att spegla det årliga värdet av intensiteten. Utöver detta kommer övergångsintensiteterna motsvarande åldrarna 44-64 att användas då avvecklingsintensiteten $\bar{\mu}_{12}(t)$ uppvisar för stora värden för de yngre åldrarna. Åldersindex x i Thieles differentialekvationer blir därför 44, dock utan att skrivas ut.

3.3.1 Thieles differentialekvationer i termer av kortränteprocesser

När de ingående parametrarna i funktionerna $\alpha(t)$ och $\beta(t)$ har skattats kan Thieles differentialekvation för reserverna $V^j(t)$, $j = 0, 1, 2$, beräknas enligt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V^2(t) &= r(t)V^2(t) - b^2(t) - \sum_{k \neq 2} \bar{\mu}_{2k,x}(t) \left(b^{2k}(t) + V^k(t) - V^2(t) \right) \\ &= r(t)V^2(t) + \pi - \bar{\mu}_{20,x}(t) \left(\underbrace{b^{20}(t)}_{=0} + V^0(t) - V^2(t) \right) - \bar{\mu}_{21,x}(t) \left(\underbrace{b^{21}(t)}_{=0} + V^1(t) - V^2(t) \right) \\ &= r(t)V^2(t) + \pi + (\alpha_{20}(t) + \beta_{20}(t)\bar{\mu}_{20,x}(0))' (V^0(t) - V^2(t)) \\ &\quad + (\alpha_{21}(t) + \beta_{21}(t)\bar{\mu}_{21,x}(0))' (V^1(t) - V^2(t)) \\ \frac{d}{dt}V^1(t) &= r(t)V^1(t) - b^1(t) - \sum_{k \neq 1} \bar{\mu}_{1k,x}(t) \left(b^{1k}(t) + V^k(t) - V^1(t) \right) \\ &= r(t)V^1(t) - 12 \cdot 30000 \cdot 0.15 \cdot 1.015^t \\ &\quad - \bar{\mu}_{10,x}(t) \left(\underbrace{b^{10}(t)}_{=0} + V^0(t) - V^1(t) \right) - \bar{\mu}_{12,x}(t) \left(\underbrace{b^{12}(t)}_{=0} + V^2(t) - V^1(t) \right) \\ &= r(t)V^1(t) - 12 \cdot 30000 \cdot 0.15 \cdot 1.015^t + (\alpha_{10}(t) + \beta_{10}(t)\bar{\mu}_{10,x}(0))' (V^0(t) - V^1(t)) \\ &\quad + (\alpha_{12}(t) + \beta_{12}(t)\bar{\mu}_{12,x}(0))' (V^2(t) - V^1(t)) \\ \frac{d}{dt}V^0(t) &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

där $b^2(t) = \pi$ är premieintensiteten och $b^1(t) = 12 \cdot 30000 \cdot 0.15 \cdot 1.015^t$ förmånen baserat på 15% av en årslön om 360 000 kr som indexerats kontinuerligt med 1.5%. Observera att inga punktbetalningar $b^{jk}(t)$ görs i detta försäkringskontrakt. När systemet av differentialekvationer löses väljs den premie π sådan att $V^2(-0) = 0$ för att generera den "rättvisa" reserven.

Kapitel 4

Resultat

I detta kapitel presenteras de parametrar som använts vid modellering av övergångsintensiteter samt de resulterande intensiteterna och prospektiva reserverna. De resultatdelar som innefattar korträntemodeller kommer att jämföras mot motsvarande observerad storhet. Samtliga grafer motsvaras av storheter genererade av in-sampled data. Notera även att samtliga intensiteter $\bar{\mu}_{ij,x}$ har startåldern $x = 18$.

4.1 Parametrar

Tabell 4.1: Parametervärden för Ornstein-Uhlenbeck, övergångsintensiteter $\bar{\mu}_{20,x}(t)$ och $\bar{\mu}_{21,x}(t)$, åldrarna 18-64.

Parameter Intensitet	a	σ
$\bar{\mu}_{20,x}(t)$	0.06450	0.00002
$\bar{\mu}_{21,x}(t)$	0.08810	0.00003

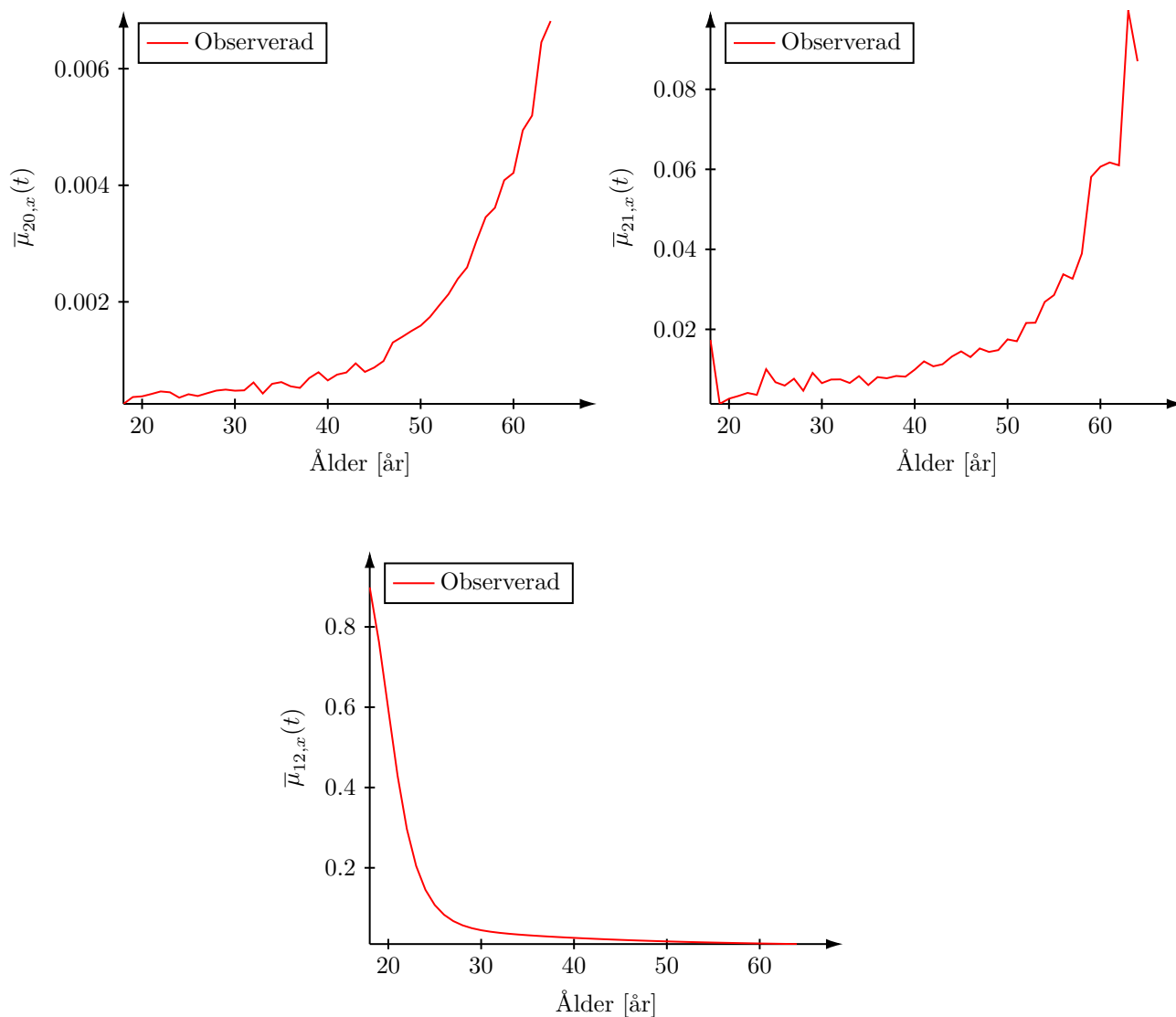
Tabell 4.2: Parametervärden för Feller, övergångsintensiteter $\bar{\mu}_{20,x}(t)$ och $\bar{\mu}_{21,x}(t)$, åldrarna 18-64.

Parameter Intensitet	a	σ
$\bar{\mu}_{20,x}(t)$	0.06450	0.00113
$\bar{\mu}_{21,x}(t)$	0.08810	0.000101

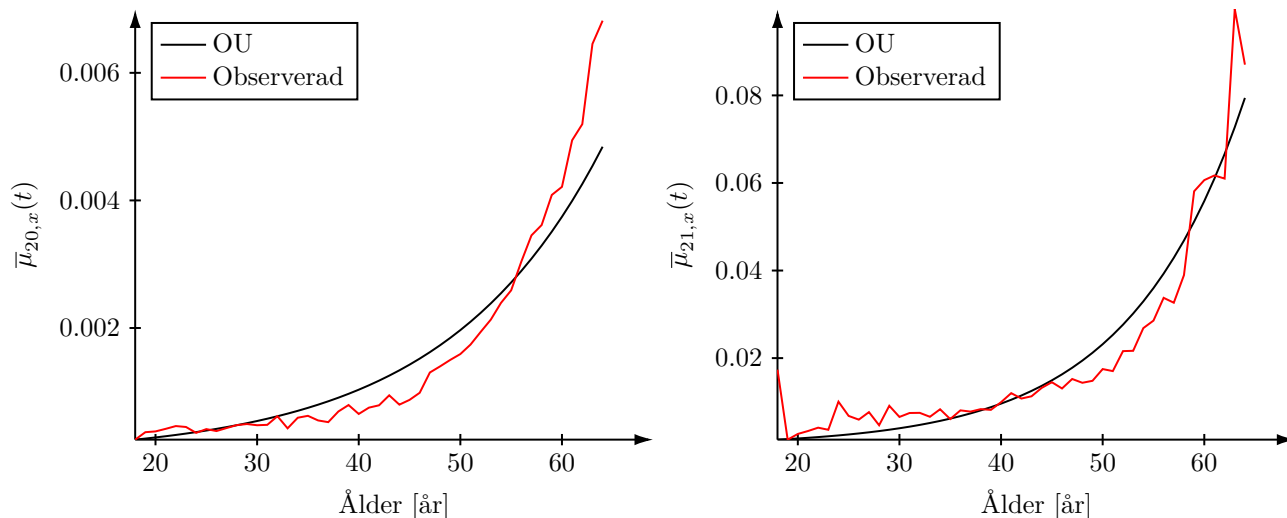
Tabell 4.3: Parametervärden för Hull-White, övergångsintensiteter $\bar{\mu}_{20,x}(t)$ och $\bar{\mu}_{21,x}(t)$, åldrarna 18-64.

Parameter Intensitet	b	σ	A	B
$\bar{\mu}_{20,x}(t)$	0.0596	0.00009	$1.386 \cdot 10^{-5}$	0.0963
$\bar{\mu}_{21,x}(t)$	0.00580	0.00016	$7.989 \cdot 10^{-5}$	0.109

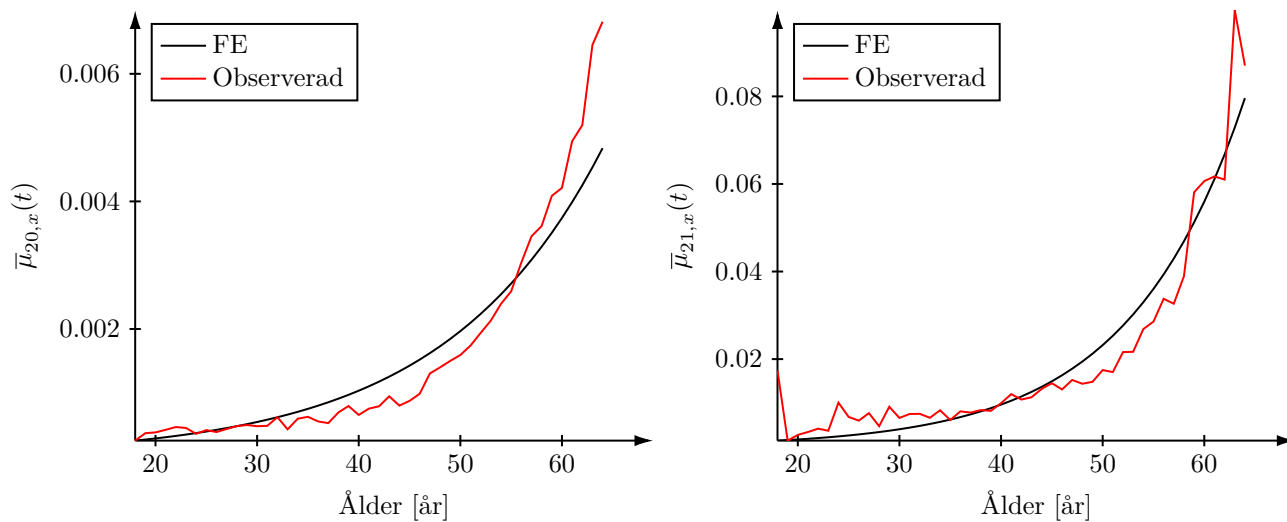
4.2 Övergångsintensiteter



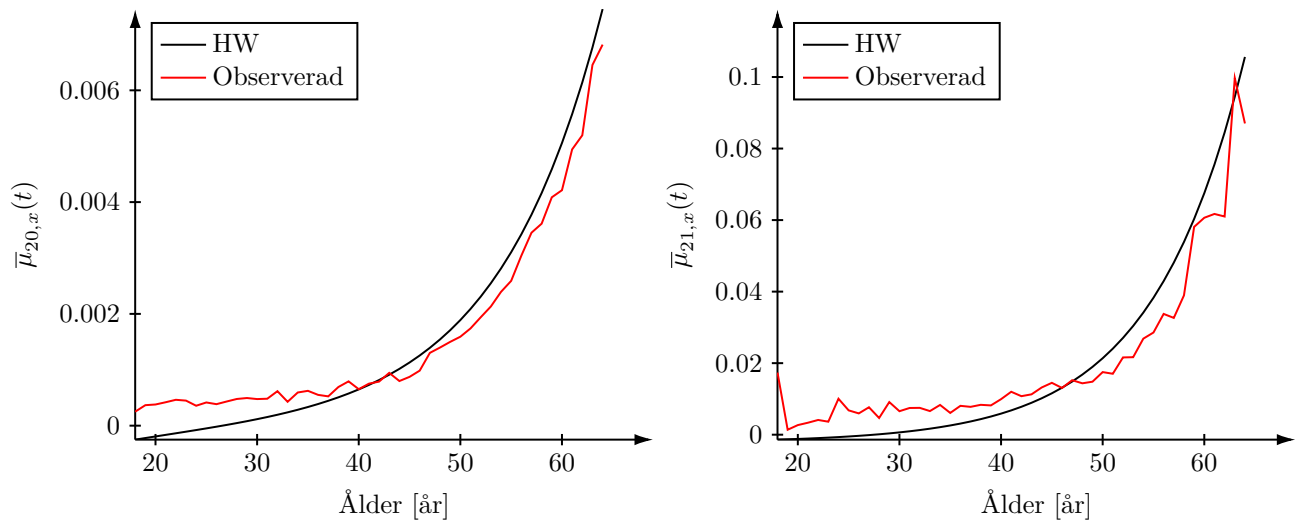
Figur 4.1: Observerade övergångsintensiteter $\bar{\mu}_{20,x}(t)$, $\bar{\mu}_{21,x}(t)$ respektive observerad utjämnad övergångsintensitet $\bar{\mu}_{12,x}(t)$ för åldrarna 18-64.



Figur 4.2: Övergångsintensiteter $\bar{\mu}_{20,x}(t)$ och $\bar{\mu}_{21,x}(t)$, Ornstein-Uhlenbeck och observerad för åldrarna 18-64.

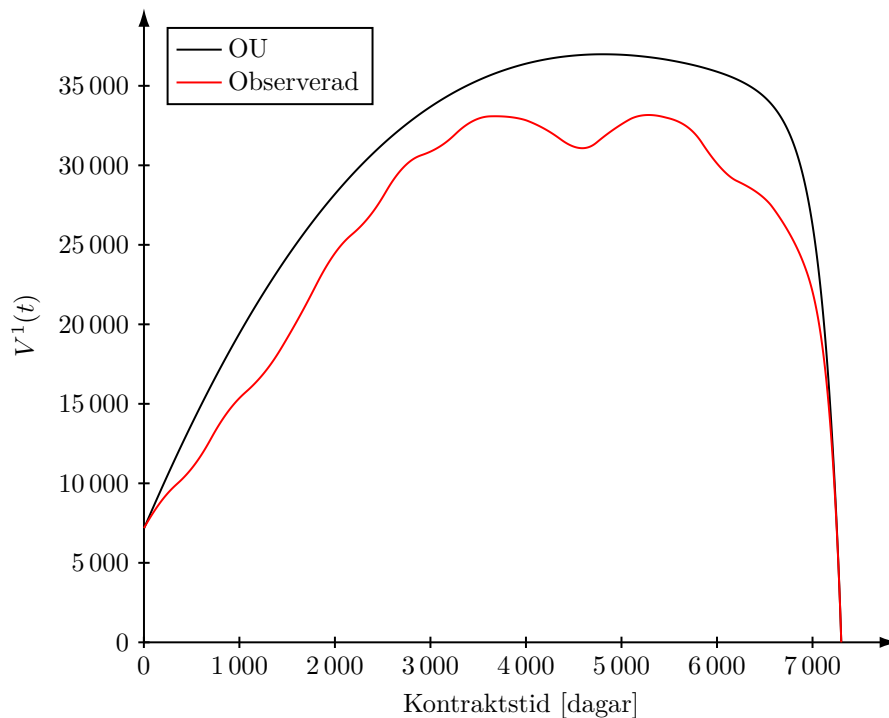


Figur 4.3: Övergångsintensiteter $\bar{\mu}_{20,x}(t)$ och $\bar{\mu}_{21,x}(t)$, Feller och observerad för åldrarna 18-64.

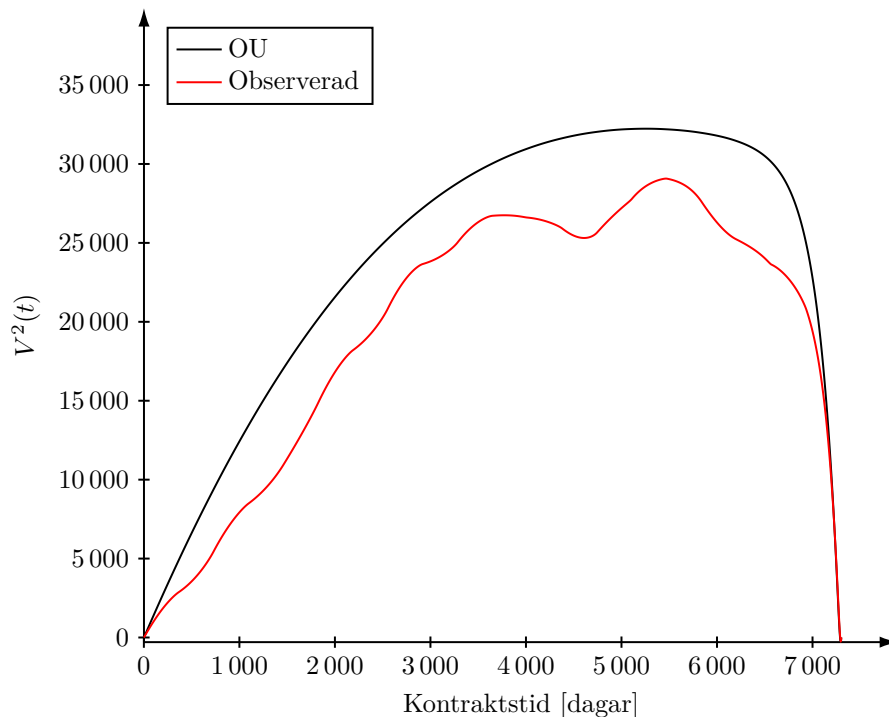


Figur 4.4: Övergångsintensiteter $\bar{\mu}_{20,x}(t)$ och $\bar{\mu}_{21,x}(t)$, Hull-White och observerad för åldrarna 18-64.

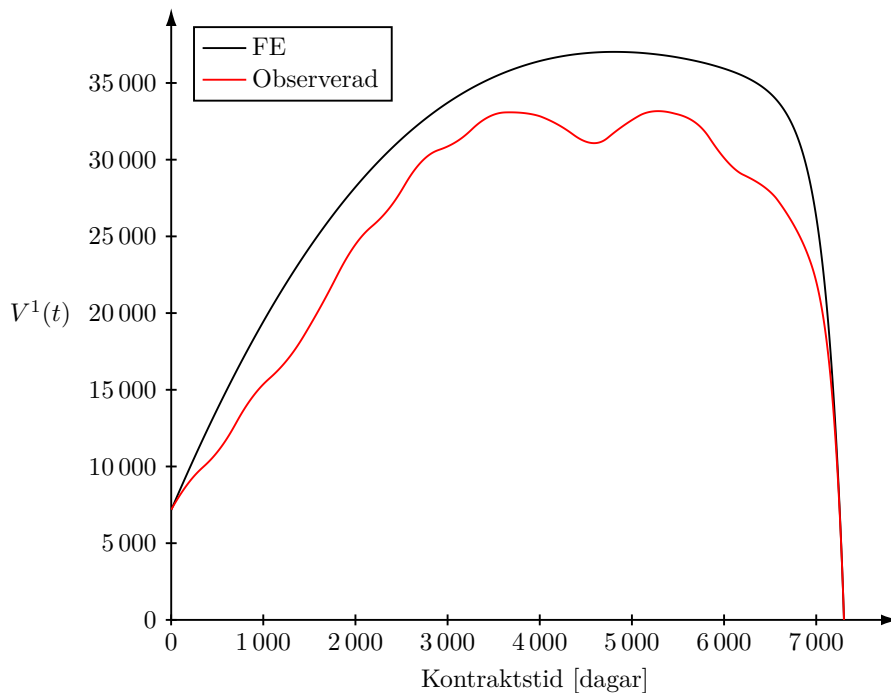
4.3 Prospektiva reserver



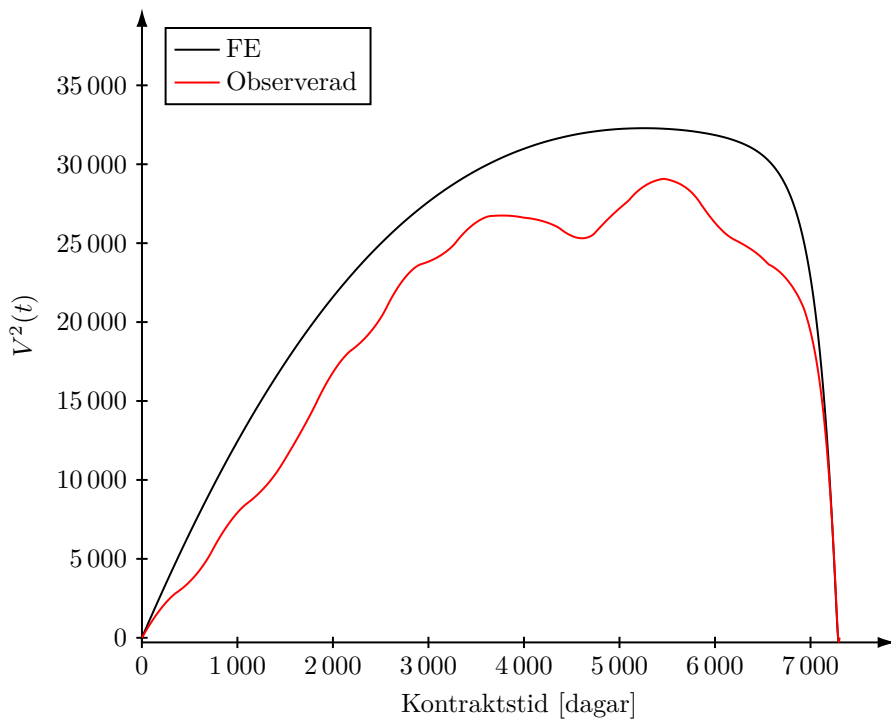
Figur 4.5: Prospektiv reserv för tillstånd 1, Ornstein-Uhlenbeck och observerad, kontraktstid 0-20 år.



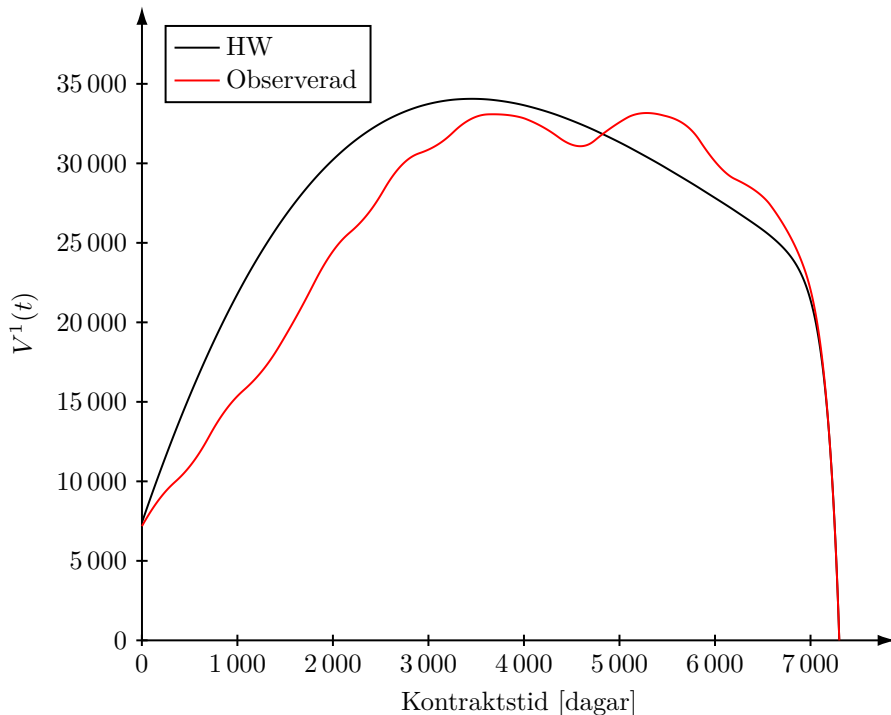
Figur 4.6: Prospektiv reserv för tillstånd 2, Ornstein-Uhlenbeck och observerad, kontraktstid 0-20 år.



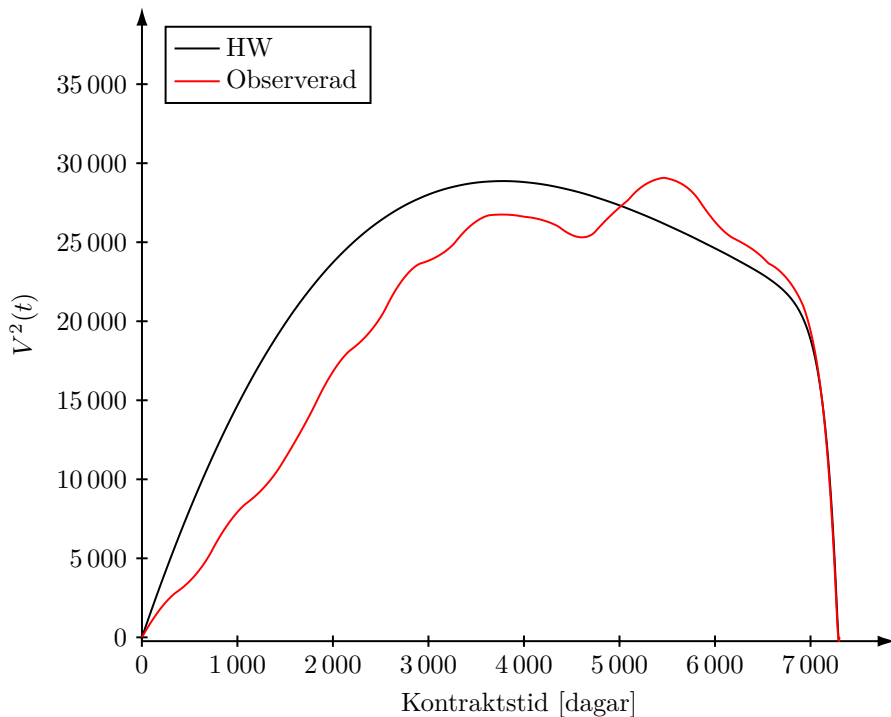
Figur 4.7: Prospektiv reserv för tillstånd 1, Feller och observerad, kontraktstid 0-20 år.



Figur 4.8: Prospektiv reserv för tillstånd 2, Feller och observerad, kontraktstid 0-20 år.

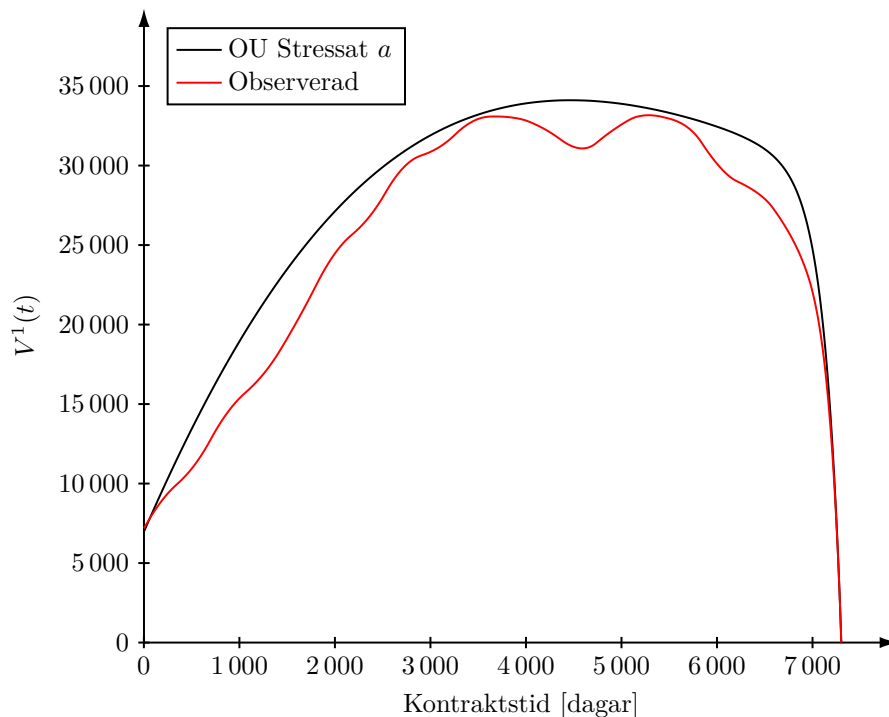


Figur 4.9: Prospektiv reserv för tillstånd 1, Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.

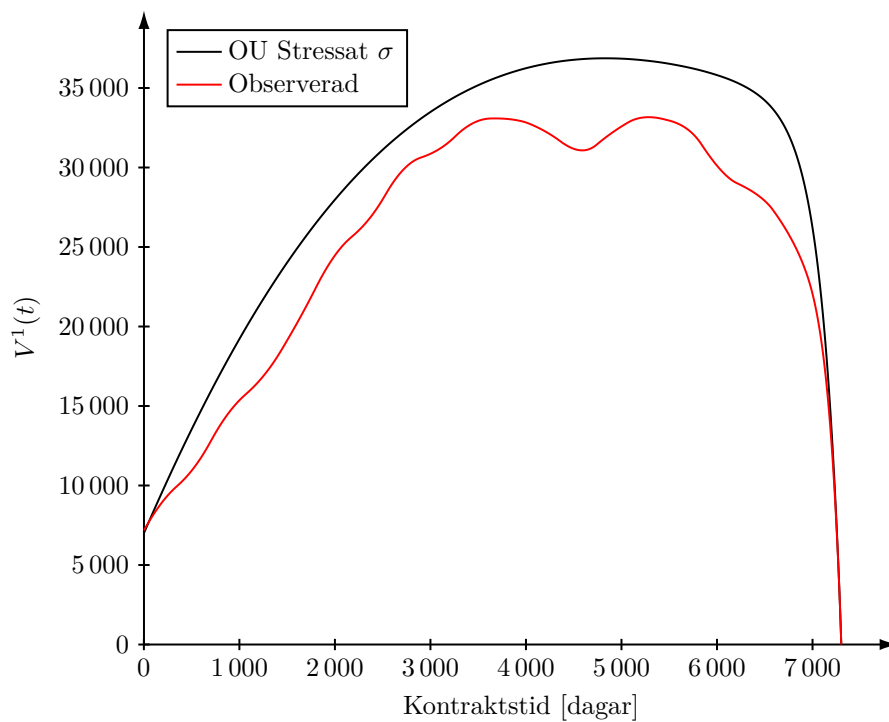


Figur 4.10: Prospektiv reserv för tillstånd 2, Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.

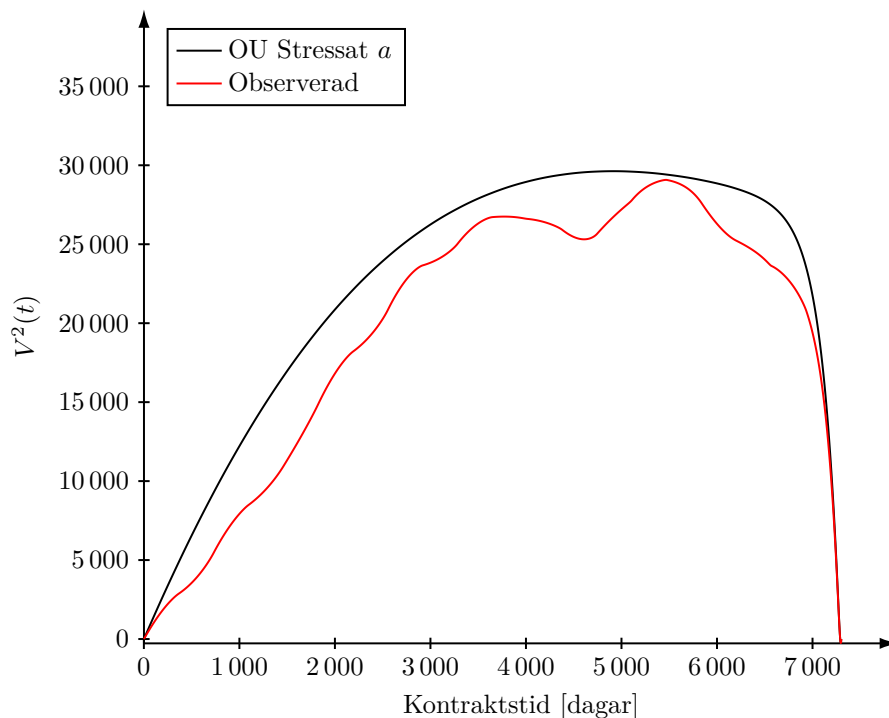
4.4 Stresstester



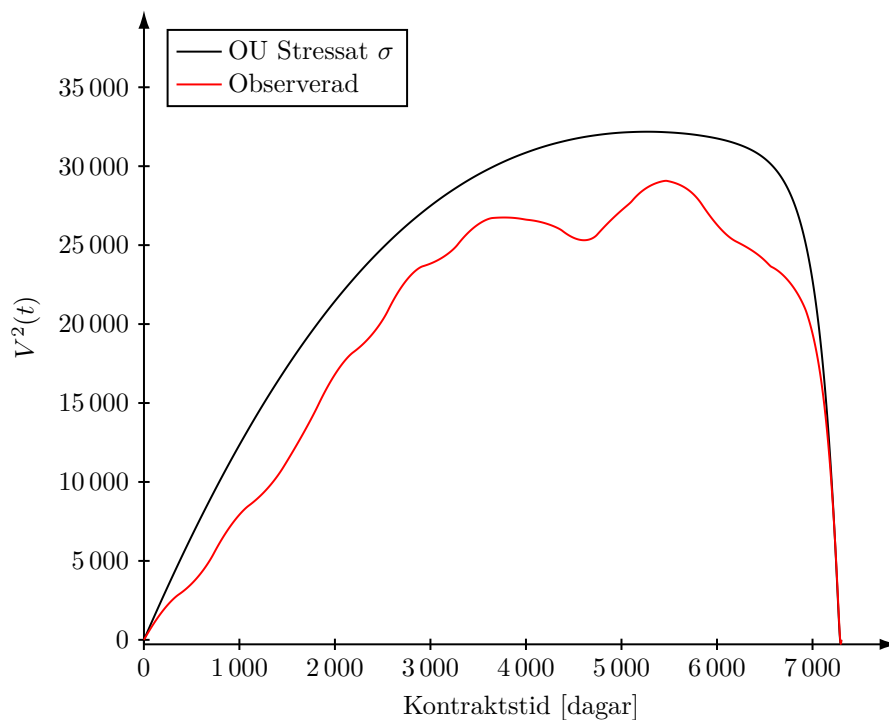
Figur 4.11: Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat a för Ornstein-Uhlenbeck och observerad, kontraktstid 0-20 år.



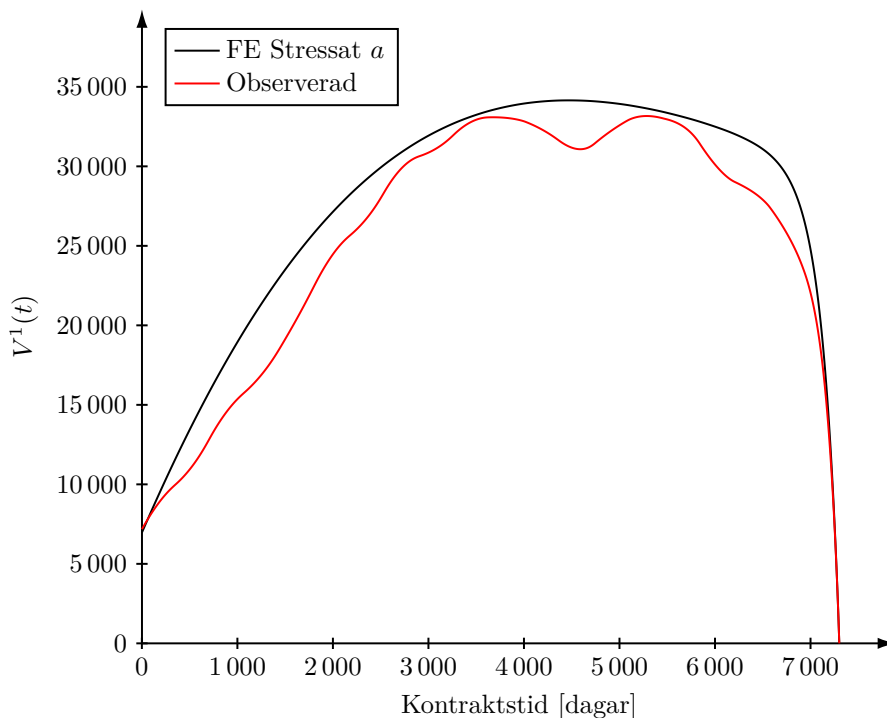
Figur 4.12: Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat σ för Ornstein-Uhlenbeck och observerad, kontraktstid 0-20 år.



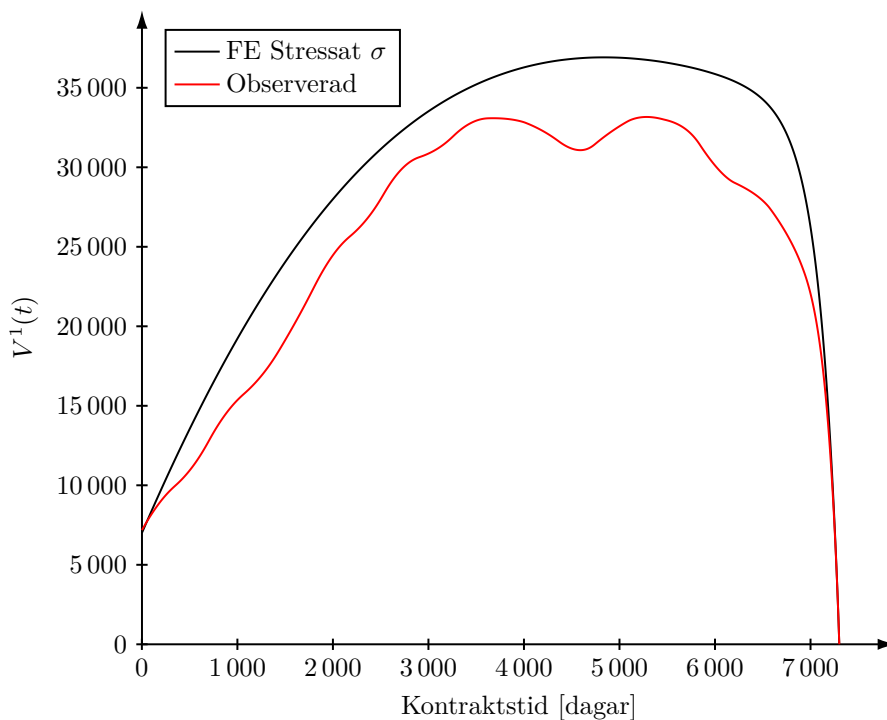
Figur 4.13: Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstestat a för Ornstein-Uhlenbeck och observerad, kontraktstid 0-20 år.



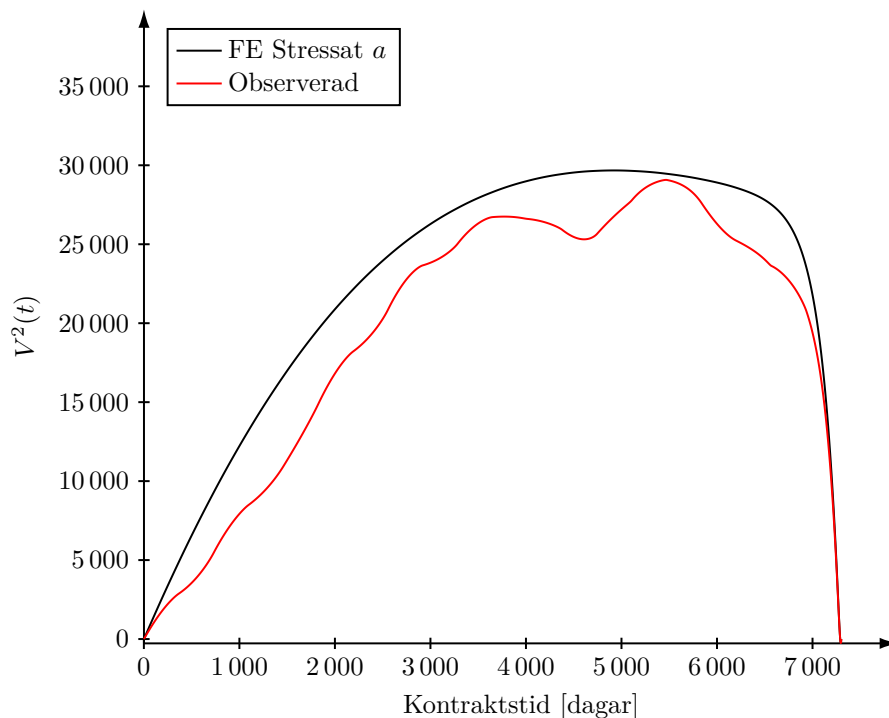
Figur 4.14: Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstestat σ för Ornstein-Uhlenbeck och observerad, kontraktstid 0-20 år.



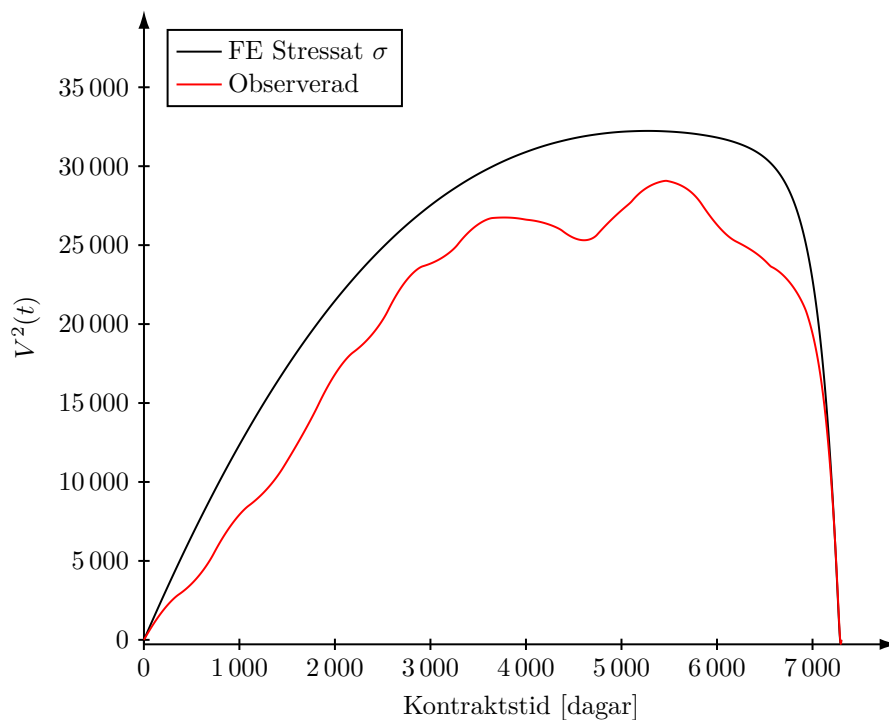
Figur 4.15: Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat a för Feller och observerad, kontraktstid 0-20 år.



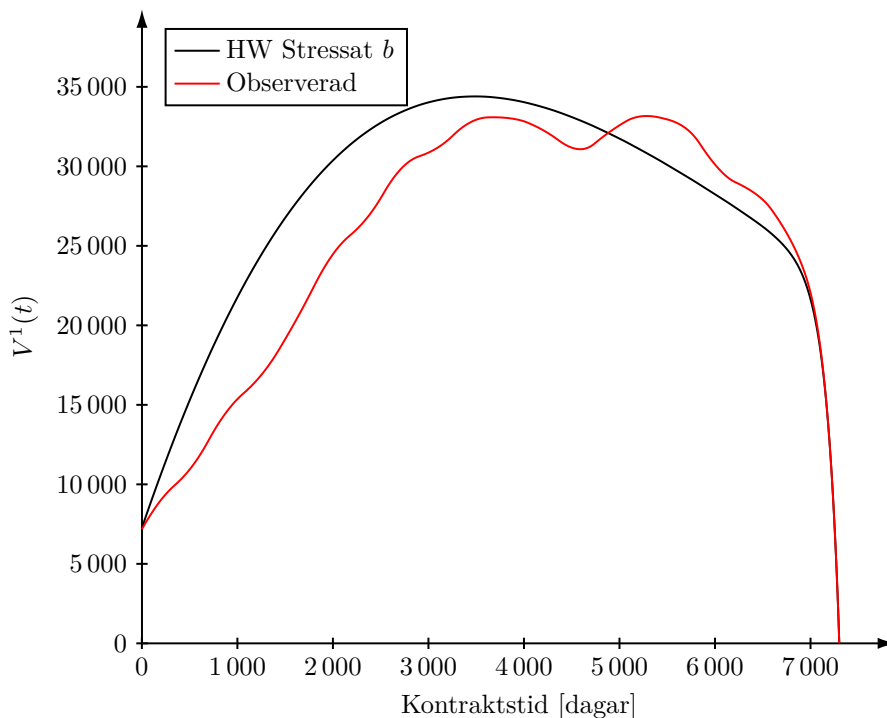
Figur 4.16: Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat σ för Feller och observerad, kontraktstid 0-20 år.



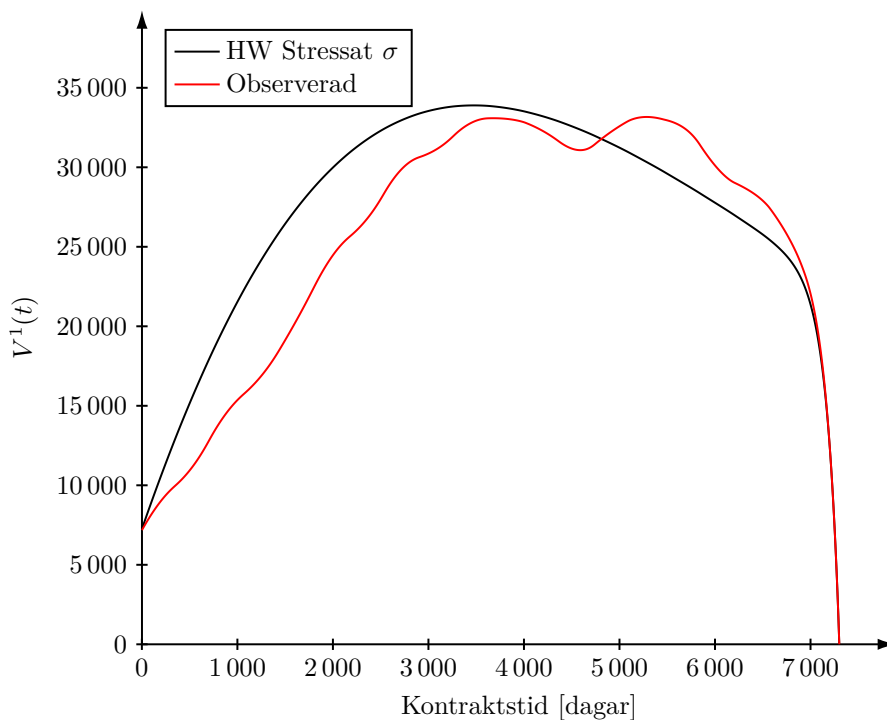
Figur 4.17: Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstestat a för Feller och observerad, kontraktstid 0-20 år.



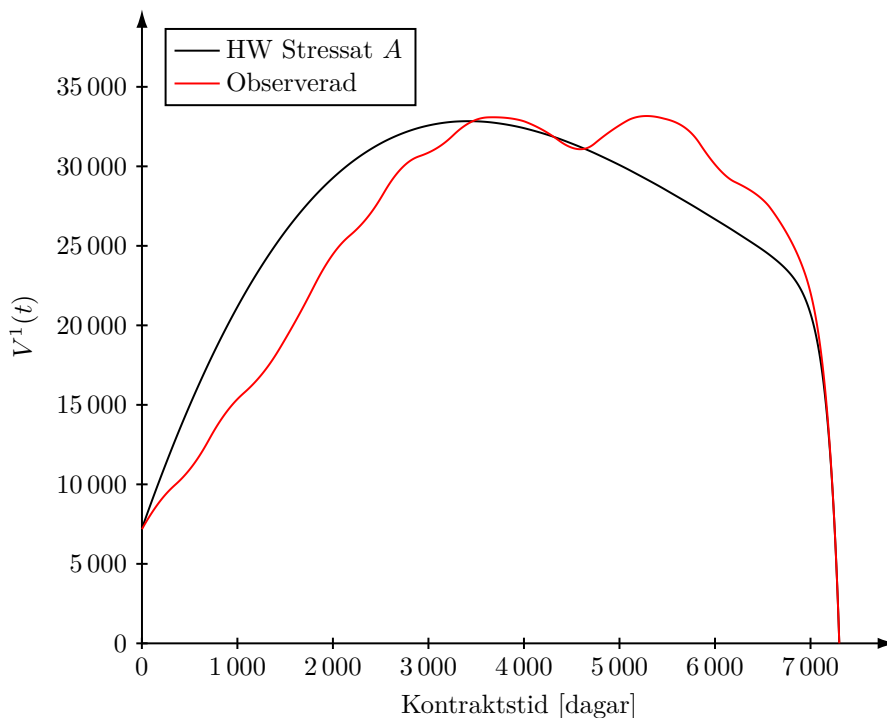
Figur 4.18: Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstestat σ för Feller och observerad, kontraktstid 0-20 år.



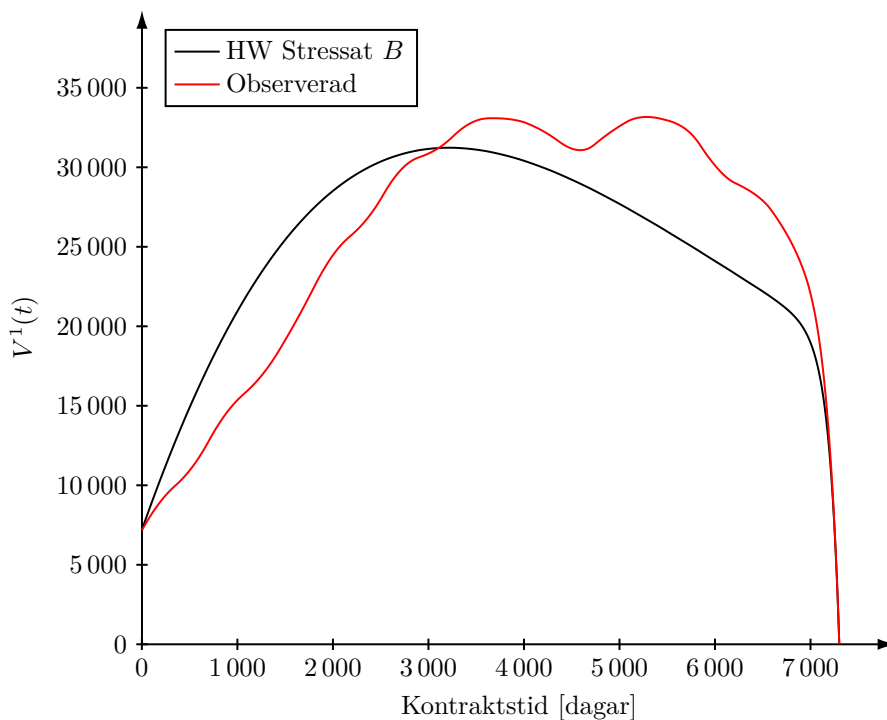
Figur 4.19: Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat b för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.



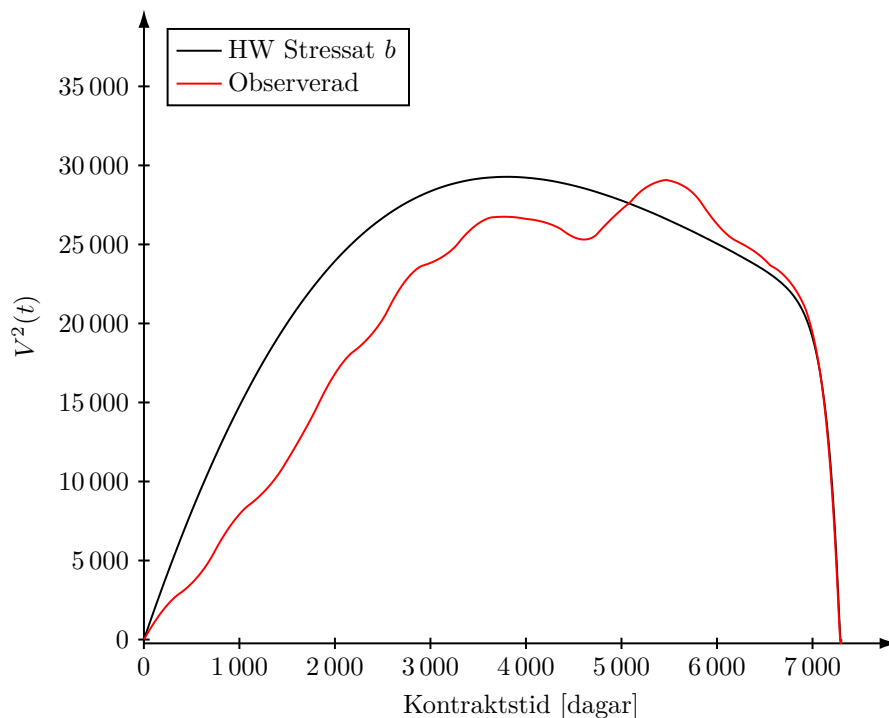
Figur 4.20: Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat σ för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.



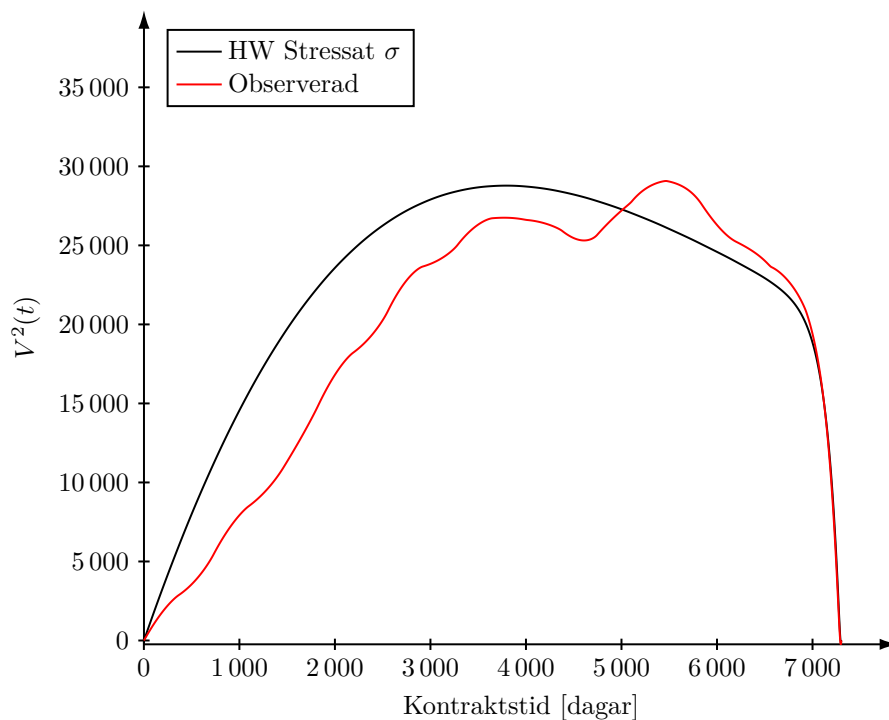
Figur 4.21: Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat A för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.



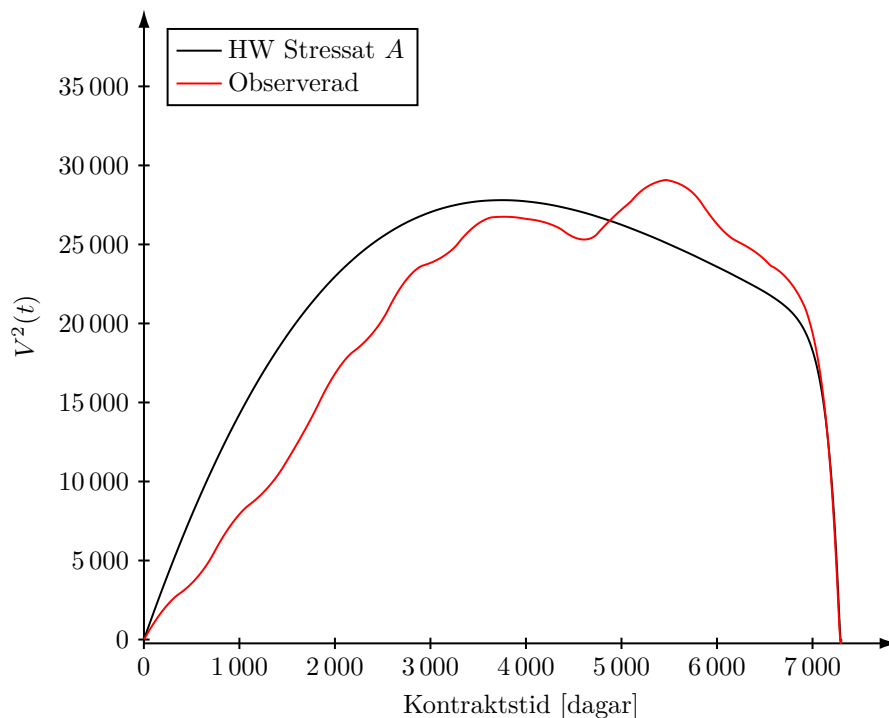
Figur 4.22: Prospektiv reserv för tillstånd 1, stresstestat B för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.



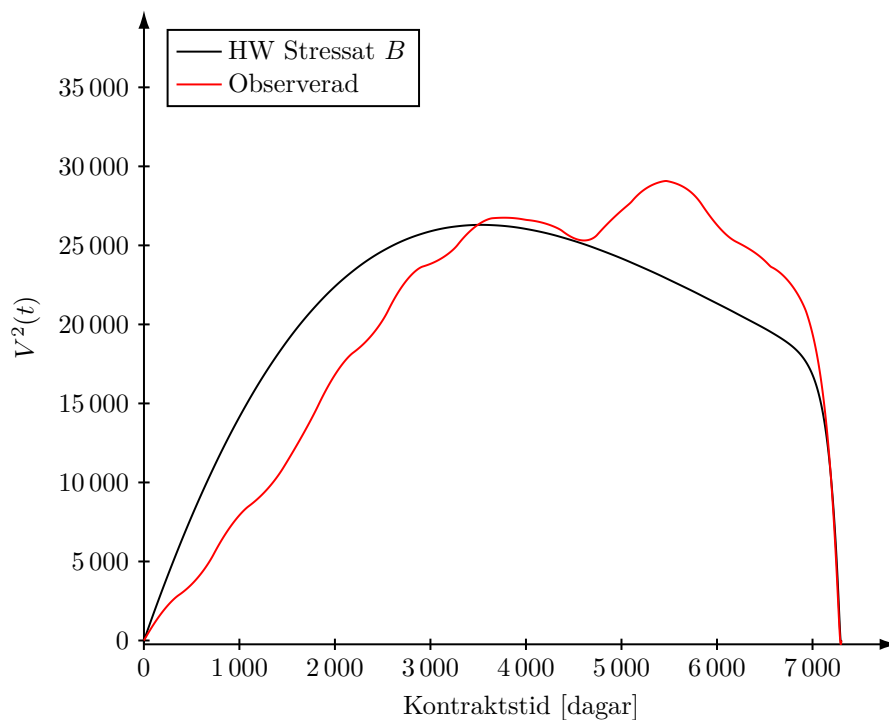
Figur 4.23: Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstest b för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.



Figur 4.24: Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstest σ för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.



Figur 4.25: Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstestat A för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.



Figur 4.26: Prospektiv reserv för tillstånd 2, stresstestat B för Hull-White och observerad, kontraktstid 0-20 år.

Kapitel 5

Diskussion

Här kommer resultaten att kommenteras och analyseras utifrån den underliggande teorin och tidigare arbete på området. Även de utmaningar som dykt upp på vägen kommer att diskuteras och hur ett snarlikt framtida arbete kan genomföras med hänsyn till de lärdomar som tagits. Till sist kommer det göras en bedömning kring lämpligheten i modellvalet samt hur denna kopplas till resultatens kvalitet.

5.1 Resultaten i ljuset av tidigare arbete

Som det tidigare nämnts baseras detta arbete på ämnet för författarens tidigare examensarbete (H. Andersson och Cato 2023). Viktiga aspekter som tagits med i detta arbete är exempelvis antalet storheter som undersökts. Detta då det är lätt hänt att resultatdelens omfattning blir för stor. Därför valdes det endast ett försäkringskontrakt, en modelluppsättning, en parameterkalibreringsmetodik och så vidare. Denna struktur går att skala godtyckligt vilket lämnar många möjligheter åt framtida författare av detta ämne.

En annan aspekt gäller begränsningen av den underliggande teorin. Liksom i det tidigare arbetet uppstod problemet att de ODE:er som existerar för varje affin kortränthemodell endast är väldefinierade för strikt positiva drifts- och diffusionskoefficienter. Detta gör det med andra ord ej möjligt att modellera avtagande intensiteter som avvecklingsintensiteten med den gällande teorin för kortränthemodeller. I stället användes den på förhand bestämda utjämnade intensiteten som impliceras av den avvecklingsfunktion som används i avsnitt 3.1 i (Försäkringstekniska Forskningsnämnden 2017). Detta är en uppenbar svaghet hos affina kortränthemodeller som modellklass då ett Markovskt försäkringskontrakt inkluderar både till- och avtagande övergångsintensiteter.

Det förmodligen största hindret i arbetet var parameterkalibreringen. Detta eftersom optimeringsproblemet som uppstår är icke-konvext och icke-linjärt. Därför är det nästan oundvikligt att hamna i ett lokalt optimum då startpunkterna inte väljs med stor omsorg. Detta ledde till att startpunkter fick väljas ut för respektive modell vilket var fallet i både detta och föregående arbete. Detta är ett problem som inte kan kringgås med vanliga optimeringslösare då endast lokala optima undersöks snarare än det globala. Utgångspunkten i detta arbete var att återanvända metodiken för parameterkalibreringen i avsnitt 4.3.6 i (H. Andersson och Cato 2023), dels för att den är relativt enkel att implementera och att omfattningen av arbetet skulle hållas på en rimlig nivå men även för att det utgör ett centralt resultat i det förra arbetet. Dock finns det skäl för att separat modellering av ingående intensiteter i Thieles differentialekvationer inte fångar försäkringskontraktets dynamik. Ett exempel på detta är det faktum att reserverna för både Ornstein-Uhlenbeck och Feller med stressade driftskoefficienter följer den observerade reserven bättre än den ostressade. Det är alltså möjligt att de enskilda övergångsin-

tensiteterna som modellerats är optimala med hänsyn till avvikelsen mot observerad data men att de tillsammans vid lösning av Thieles differentialekvationer inte ger en optimalt modellerad reserv. Ett sätt att kringgå denna problematik är att använda den likelihood som beskrivs i avsnitt 11.2 i (Norberg 2002). Då denna i stället används som målfunktion vid parameterkalibreringen tas hänsyn till hela försäkringskontraktets struktur och tillstånd. Dessutom går det att formulera likelihooden i termer av parametriska övergångsintensiteter vilket är lämpligt då korträntemodeller används. Sammantaget är denna metodik något som bör undersökas vidare i framtida arbeten.

Ett problem som var speciellt för detta arbete var att den prospektiva reserven inte gick att beräkna då Thieles differentialekvationer löstes med årdiskretisering på grund av för mycket brus i indatan vilket gjorde att lösaren inte kunde konvergera. Därför fick både ränta och övergångsintensiteter linjärinterpoleras till dagsdiskretisering i stället, något som underlättade för lösaren. Dock var det aldrig möjligt att undersöka längre löptider då samma problem uppstod vilket var skälet till att löptiden begränsades till 20 år.

5.2 Korträntemodellernas prestation

Då parameterkalibreringen i detta arbete utfördes inom ramen för Markovska försäkringskontrakt måste därför hänsyn tas till alla tillstånd och motsvarande övergångsintensiteter när optimeringsproblemet (3.5) formuleras. Detta tillsammans med sambandet (3.4) leder till det simultana optimeringsproblemet (3.6) vilket löses över flera parameterrum. Detta var tyvärr något som med den tidigare nämnda problematiken med optimeringslösaren inte gav något rimligt resultat. Förmodligen beror detta på att det är svårt att påtvinga entydighet i lösningen till optimeringsproblemet eftersom den punktvisa produkten av två modellerade intensiteter kan matcha det observerade värdet utan att de enskilda resulterande modellerna på något vis minimerar det kvadratiske medelfelet mot observerad data. Detta ledde till att optimeringsproblemet fick modifieras till (3.5) för respektive övergångsintensitet. Med andra ord betraktades endast två tillstånd åt gången. För exempelvis insjuknandeintensiteten $\mu_{21}(t)$ minimerades felet endast mellan en modell för insjuknandet och observerad data över insjuknandet. Värt att nämna är att det inte borde finnas någon kvalitativ skillnad i de enskilda resulterande övergångsintensiteterna även beroendet mellan dem inte fångas. Utöver detta användes även en egen skriven optimeringsfunktion som itererar målfunktionen stegvis över den valda parameterytan för att på detta vis efterlikna en global optimeringslösare. Detta gav tillfredställande resultat med hänsyn till problematiken som fanns med de inbyggda optimeringslösarna i R.

I detta liksom det tidigare arbetet uppvisade korträntemodellerna goda egenskaper vad gäller modellering av övergångsintensiteter, åtminstone om denna analys görs grafiskt vid jämförelse mot observerad data. Dock kan det konstateras att denna modellering gav bättre resultat då större åldersspann användes i (H. Andersson och Cato 2023). I det förra arbetet gjordes ingen vidare analys av någon storhet som inkluderar de modellerade övergångsintensiteterna och betalströmmar, något som gjorts i detta arbete. Därför gick det inte att upptäcka någon kvalitativt avvikande modell. Som kan ses i resultatdelen underskattar de modellerade prospektiva reserverna den observerade prospektiva reserven med relativt stora belopp i kronor mätt. När en vidare analys görs för de modellerade övergångsintensiteterna mot de observerade förekommer det större relativa avvikelser än vad som kan urskiljas grafiskt. Dessa avvikelser slår därför igenom den prospektiva reserven så pass mycket då felet ackumuleras under en längre tid. Detta vittnar om att korrekt anpassade övergångsintensiteter är av största betydelse då större avvikelser i försäkringskontrakt på beståndsnivå i ett försäkringsbolag påverkar de försäkringstekniska avsättningarna.

5.3 Slutsatser

Sammantaget kan det konstateras att även om den modellering som detta arbete beskrivit vilar på en solid teoretisk grund finns det fortfarande återkommande problem och begränsningar vid implementering av korträntemodeller i aktuariella sammanhang. En modellklass är sällan så allsidig att den kan användas godtyckligt utan att det finns risk för bristande resultat eller användarvänlighet och korträntemodeller är inget undantag. Något som kunde observeras i detta arbete i jämförelse med det föregående var att korträntemodellerna presterade bättre vid modellering över större tidsspann på cirka 80 år vilket kan jämföras med det undersökta försäkringskontraktet vars löptid endast var 20 år. Detta ger uttryck för att sofistikerad modellering av komplexa storheter som den prospektiva reserven kräver separat analys av varje ingående storhet för att uppnå tillräcklig kvalitet. Till exempel måste modellval, modifieringar och förenklingar göras med hänsyn till vad det är som undersöks. Med andra ord räcker det inte med att använda en modell rakt av utan hänsyn till komplexiteten i problemställningen. En annan viktig aspekt är att tillräcklig efterforskning inom området innan implementationen kan vara avgörande i om önskvärda resultat fås eller ej. Till exempel hade parameterestimeringen enligt avsnitt 11.2 i (Norberg 2002) fångat den dynamik som uppstår i försäkringskontrakt med flertalet tillstånd. Dock hade det inneburit en avvägning mellan arbetets omfattning och resultatens kvalitet.

Slutligen bör det sägas att det är av intresse att vidare undersöka korträntemodeller då det finns utvidgningar av dessa som inte behandlas i detta arbete samt att mer sofistikerade metoder för parameterskattningar utforskas. Dock inom ramen för modellering av försäkringskontrakt är det tydligt att korträntemodeller har sina fördelar men att de är begränsade i sina användningsområden och ska därför tillämpas med hänsyn till just detta.

Litteraturförteckning

- Andersson, Gunnar (2013). *Livförsäkringsmatematik*. Svenska Försäkringsföreningen. ISBN: 978-91-637-3458-8.
- Andersson, Henrik och Robin Bakke Cato (2023). *Stokastisk modellering och prognosticering inom livförsäkring: En dödlighetsundersökning på Länsförsäkringar Livs bestånd*. URL: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1775303/FULLTEXT01.pdf>. (accessed: 14.03.2024).
- Anevski, Dragi (2015). *Introduction to Inference for Stochastic processes*. URL: https://www.maths.lu.se/fileadmin/maths/matematisk_statistik/FMS012MASB03/inferenceforprocesses_01.pdf. (accessed: 26.05.2022).
- Asmussen, Søren och Mogens Steffensen (2020). *Risk and Insurance*. Springer Nature Switzerland AG. ISBN: 978-3-030-35175-5.
- Duffie, Darrell (2005). "Credit risk modeling with affine processes". *Journal of Banking Finance, Volume 29, Issue 11, November 2005, Pages 2751-2802*. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037842660500035X>.
- Eklom, Jonas (September 2021). *Föreläsningssanteckningar i Finansiell värderingsmetodik (TPPE53), föreläsning 1*.
- Finansinspektionen (2024). *Diskonteringsräntekurvor, mars 2024*. URL: <https://www.fi.se/sv/publicerat/statistik/diskonteringsrantekurvor/2024/diskonteringsrantekurvor-mars-2024/>. (accessed: 15.04.2024).
- Försäkringstekniska Forskningsnämnden, Svensk Försäkring (2017). *Sjuklighetsundersökning inom svensk försäkring - Sjukförsäkringsfallens längd 2008 - 2015*. URL: https://www.svenskforsakring.se/globalassets/rapporter/sjuklighetsundersokningar/sor235067_sus-broschyr-sf-web.pdf. (accessed: 29.03.2024).
- Grundkommittén (1989). *Teknisk utredning för beräkning av premier, återköpsvärden mm*. Svenska Livförsäkringsbolags Aktuarienämnd, Stockholm, Sverige.
- Haug, Martin (2016). *A Brief Introduction to Stochastic Calculus*. URL: <http://www.columbia.edu/~mh2078/FoundationsFE/IntroStochCalc.pdf>. (accessed: 04.03.2022).
- Kakihara, Yūichirō (2003). "Stochastic Processes". *Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition) 2003, Pages 105-116*. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B0122274105007390>.
- Lee, Ronald D. och Lawrence R. Carter (1992). *Modeling and Forecasting U. S. Mortality*. URL: https://www.jstor.org/stable/2290201?seq=1#metadata_info_tab_contents. (accessed: 03.02.2022).
- Luciano, Elisa och Elena Vigna (2005). "Non Mean Reverting Affine Processes for Stochastic Mortality". *ICER Applied Mathematics Working Paper No. 4*. URL: <https://ssrn.com/abstract=724706>.
- Norberg, Ragnar (2002). *Basic Life Insurance Mathematics*. URL: https://web.archive.org/web/20170120070203id_/http://insurance-institute.ru/content/f5c4d540.pdf. (accessed: 12.03.2024).

- SCB (2024a). *Döda efter ålder senaste året*. URL: <https://www.scb.se/hitta-statistik/sverige-i-siffror/manniskorna-i-sverige/doda-i-sverige/#doda-efter-alder>. (accessed: 15.04.2024).
- (2024b). *Folkmängden efter ålder och kön . År 1860 - 2023*. URL: https://www.statistikdatabasen.scb.se/pxweb/sv/ssd/START__BE__BE0101__BE0101A/BefolkningR1860N/. (accessed: 15.04.2024).
- Xu, Tao (2004). *Skattning av intensiteten i sjukförsäkring*. URL: <https://www2.math.su.se/matstat/reports/serieb/2004/rep7/report.pdf>. (accessed: 29.03.2024).
- Zeddouk, Fadoua och Pierre Devolder (2020). *Mean reversion in stochastic mortality: why and how?* URL: <https://doi.org/10.1007/s13385-020-00237-y>. (accessed: 01.02.2022).
- Zhang, Tusheng (2015). *Martingale Theory for Finance*. URL: <https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/Tusheng.Zhang/publications/Math67201-47201notes-3.pdf>. (accessed: 22.03.2022).