



Stockholms
universitet

Den Cramérska assuransmatematiken

Leo G. Levenius

Masteruppsats 2025:10
Försäkringsmatematik
Juni 2025

www.math.su.se

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm



Den Cramérska assurancesmatematiken

Leo G. Levenius*

Juni 2025

Sammanfattning

I föreliggande uppsats undersökes, sammanställs samt vidareutvecklas professor H. Cramérs kontributioner till assurancesmatematiken. Tre större områden identifieras och utgör lejonparten av innehållet:

Första delen fokuserar på dödlighetsstudier och kretsar kring arbetet utfört av Cramér tillsammans med H. Wold för att numeriskt anpassa Makehams formel för att modellera dödlighetsintensiteten. Metoden appliceras sedan på ny data för att beskriva dödligheten i Sverige åren 1931 till 2023. Det finnes då en log-linjärt avtagande trend i dödlighetsintensiteten under tidsperioden.

Nästa kapitel behandlar ruenteori och Cramér–Lundberg-modellen. En bred teoretisk bakgrund presenteras med framhävd tonvikt på resultat och analyser som är särskilt förknippade med Cramér. Den allmänna teorin exemplifieras för fallet med exponentialfördelade skadekostnader vilket även illustreras empiriskt med hjälp av simuleringar. Vidare inkluderas några egna resultat rörande försäkringsbolagets riskreserv samt identifiering och åtgärdande av en av Cramér felaktigt framställd karakteristisk funktion.

Uppsatsen avslutas med nollpunktsmetoden; en teknik uppfunnen av Cramér som sedan länge försvunnit till det obskura. Nollpunktsmetoden användes för att skatta premiereserven för en kombinerad livsfalls- och dödsfallsförsäkring. Detta genom att variera dödlighetsantagandet efter tecknet på den så kallade risksumman. Metoden inkorporeras med Thieles differentialekvation och det förevisas hur den kan tillämpas för att bestämma en konservativt skattad premie.

Nyckelord: Harald Cramér, assurancesmatematik, Makehams formel, Cramér–Lundberg-modellen, nollpunktsmetoden.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.
E-post: leo.levenius@math.su.se. Handledare: Filip Lindskog.

Abstract in English

In this essay, Professor H. CRAMÉR's contributions to actuarial mathematics are examined, compiled, and further developed. Three major areas are identified, forming the core of the content:

The first section focuses on mortality studies and revolves around the work carried out by CRAMÉR together with H. Wold to numerically fit Makeham's formula for modelling the force of mortality. The method is then applied to new data to describe mortality in Sweden from 1931 to 2023. A log-linearly decreasing trend in the force of mortality is then observed over this period.

The next chapter explores ruin theory and the Cramér–Lundberg model. A broad theoretical background is presented, with a particular focus on results and analyses specifically associated with CRAMÉR. The general theory is exemplified in the case of exponentially distributed claims costs, which is also illustrated empirically using simulations. Furthermore, some original results are included regarding the insurance company's risk reserve, as well as the identification and correction of an erroneous characteristic function proposed by CRAMÉR.

The essay concludes with the zero-point method; a technique invented by CRAMÉR that has long since faded into obscurity. The zero-point method is used to estimate the premium reserve for a combined life and death insurance policy by varying the mortality assumption based on the sign of the so-called risk sum. The method is integrated with Thiele's differential equation, demonstrating how it can be applied to determine a conservatively estimated premium.

Key Words: HARALD CRAMÉR, actuarial mathematics, Makeham's formula, Cramér–Lundberg model, zero point method.

Företal

Denna uppsats torde tillfyllestgöra det självständiga arbetet svarande mot trettio högskolepoäng för en filosofie masterexamen i försäkringsmatematik och diplomerat medlemskap i Svenska Aktuarieföreningen. Den är skriven vid Matematiska institutionen å Stockholms universitet. Uppsatsen ämnas publikt försvaras den 9 juni 2025, klockan 12.40 i Cramérrummet, Albanovägen 28, Stockholm.

Först och främst måste jag be att få tacka min mentor

Högädle Herr Professorn FILIP LINDSKOG

som sedan jag först kungjorde min idé till detta eljest uppsatsämne i mars månad förlidet år, följt mina upptäckter med synnerligt intresse samt gifvit råd och vinkar, exempelvis till motbeviset af CRAMÉRS karakteristiska ekvation (3.36) och litteratur kring nollpunktsmetoden; jämte värdefull korrekturläsning.

Vidare vill jag aflägga ett särdeles varmt tack till mina vänner

Herr Fil. Kandidaten LUCIANO EGUSQUIZA CASTILLO

– med sin gemytlighet, chevalereskhet och tämlighet; och hvars »dumma frågor» och ifrågasättande har sett till att hålla mig i schack – samt

Herr Amanuensen JACK ZHAN

– med sin charm, humor och ofattbara intelligens; och hvars sällskap jag har haft privilegiet att få dela på oräkneliga äfventyr. Tack för EDER ovärderliga hjälp som Ni bistodo med under författandet af denna uppsats; icke minst genom varsina uttömmande referentgranskningar. Men framför allt, låten mig det säga, tack för att Ni städse varo där för mig och stodo vid min sida under dessa år. Det torde hvara tämligen trivialt att ankomma till konklusionen att detta icke hade hvarit possibelt förutan EDER – åtminstone ej så fröjdefullt.

Slutligen frambäres den vördsammaste af tacksägelser till

HANS MAJESTÄT KONUNGEN

för hvilken jag, i djupaste underdånighet, har att få tacka för mitt ringa – men med nit och redlighet förvaltade – ämbete vid detta alltjämt kungl. universitet som HANS MAJESTÄTS ödmjuka och trogne amanuens.

Albano på pingstdagen, anno 2025.

Författaren.

”[CRAMÉR] var en akademiker med enastående förmåga och prestationer, med ett extraordinärt inflytande inom sitt gebit. Han var en gentleman i dess finaste bemärkelse, uppkommen ur det allra bästa av en stark svensk tradition.”

– M. R. Leadbetter [33, s. 96, egen övers.]



Professor Harald Cramér på duk av F. Schüldt. Fotografi av original tillhörande Stockholms universitet.

Innehållsförteckning

Sammanfattning	i
Abstract in English	ii
Företal	iii
Notation och symboler	vii
1 Introduktion	1
1.1 Bakgrund	1
1.2 Harald Cramér	1
1.3 Litteraturöversikt	2
1.3.1 Sammanfattning av litteratur	2
1.3.2 Dödlighetsstudier	3
1.3.3 Ruinteori	3
1.3.4 Nollpunktsmetoden	5
1.3.5 Tidigare forskning	5
1.4 Några allmänliga stokastiska kontributioner	5
1.4.1 Cramérs teorem	6
1.4.2 Cramérs dekompositionsteorem	6
1.4.3 Cramér–Rao-gränsen	6
1.4.4 Cramér–Slutskys teorem	7
1.4.5 Cramér–Wolds teorem	7
2 Dödlighetsstudier	9
2.1 Makehams formel	9
2.1.1 En till oberoende variabel	10
2.1.2 Skattning av parametrar	11
2.1.3 Momentmetoden	12
2.1.4 Utjämning av parametrar	13
2.2 Dödlighet i Sverige 1931–2023	14
2.2.1 Makehamparametrar	14
2.2.2 Dödlighetsskattning	15

3	Ruinteori	17
3.1	Cramér–Lundberg-modellen	17
3.1.1	Kommentar om individuell riskteori	18
3.1.2	Homogen Poissonprocess	18
3.1.3	Skadekostnadens fördelning	20
3.2	Kumulativ skadekostnad	21
3.2.1	Kumulanter	21
3.3	Riskreserven	24
3.3.1	Kommentar om Cramérs notation	25
3.3.2	Karakteristisk funktion	25
3.3.3	Kumulanter	28
3.3.4	Gaussisk approximation	29
3.3.5	Martingaler	30
3.4	Ruin	32
3.4.1	Nettovinstvillkoret	33
3.4.2	Cramér–Lundberg-olikheten	35
3.4.3	Cramérs ruingräns	36
3.5	Exponentialfördelade skadekostnader	37
4	Nollpunktsmetoden	41
4.1	Olika former av livförsäkringar	41
4.2	Premiereserv	41
4.3	Risksumma	42
4.4	Nollpunktsmetoden	43
4.5	Högstpremie- och uppdelningsmetoden	44
4.6	Numeriskt exempel	45
	Litteraturförteckning	47
	Assuransmatematisk bibliografi	50

Notation och symboler

Ω	Utfallsrum
$\mathcal{F}$	Händelserum (σ -algebra)
$\mathbb{P}$	Sannolikhetsmått
$F_X(x)$	Fördelningsfunktion (för X)
$\bar{F}_X(x)$	Överlevnadsfunktion (för X)
$f_X(x)$	Täthet (för X)
$G_X(\tau)$	Sannolikhetsgenererande funktion (för X)
$M_x(\tau)$	Momentgenererande funktion (för X)
$K_X(\tau)$	Kumulatgenererande funktion (för X)
$\varphi_X(\tau)$	Karakteristisk funktion (för X)
$\mathbb{1}_A$	Indikatorfunktion (av mängd A)
n. s.	Nästan säkert
h. s. b.	(H)vilket skulle bevisas

$\mu(x)$	Dödlighetsintensitet (för x -åring)
α, β, c	Parametrar i Makehams formel
T_k	Tid för k :te skadan
$N(t)$	Antal skador (vid tid t)
λ	Intensitet för skadeprocess
ξ_k	Kostnad för k :te skadan
$S(t)$	Kumulativ skadekostnad (vid tid t)
u	Initialkapital
p_1	Aktuariell premie
θ	Säkerhetsmarginal
$U(t)$	Riskreserv (vid tid t)
W_k	Tid mellan k :te skadan och skadan innan
T	Tid för ruin
$\psi(u)$	Sannolikhets för ruin (med initialkapital u)
R	Utjämningskoefficient
$V(t)$	Premiereserv (vid tid t)
$r(t)$	Ränta (vid tid t)
π	Engångspremie
$R(t)$	Risksumma (vid tid t)
$D(t)$	Dödsförmån (vid tid t)
$L(t)$	Livsörmån (vid tid t)

Kapitel 1

Introduktion

1.1 Bakgrund

Professor H. CRAMÉR var en av 1900-talets ledande profiler inom matematisk statistik och assuransmatematik. Han har länge varit en förebild och inspiration för undertecknad och hans porträtt har en given plats på mitt kontor. Men jag har aldrig riktigt varit så fullt bildad i hans gärningar som jag har önskat. Det är med anledning av detta jag har valt just CRAMÉR som ämne för min examensuppsats.

Syftet med denna uppsats är att ordentligt förstå och sammanfatta vad professor CRAMÉR har inneburit för assuransmatematiken. Efter en litteraturinsamling identifieras tre större ämnen som avhandlas i denna uppsats. I kapitel 2 beskrivs CRAMÉRS arbete inom dödlighetsstudier, med särskilt fokus på Makehams formel. Kapitel 3 är den mest omfattande och fokuserar på ruinteori och Cramér–Lundberg-modellen. Slutligen har vi kapitel 4 som handlar om den nu närmast bortglömda nollpunktsmetoden som användes för premiesättning i livförsäkring. Teorin varvas med exempel för att visa hur väl de kan appliceras i praktiken.

1.2 Harald Cramér

CARL HARALD CRAMÉR föddes den 25 september 1893 i Stockholm, son till bankdirektören Carl Fredrik Cramér och Emelie Cramér.¹ 1912 påbörjade han studier inom matematik och kemi vid Stockholms högskola (dagens Stockholms universitet). Omsider övergav CRAMÉR det senare ämnet och 1917 promoverades han till filosofie doktor med en gradualavhandling [7] om Dirichletserier. Liksom många unga svenska matematiker på den tiden sökte sig CRAMÉR till försäkringsindustrin. Efter en kortare period på Kungl. Försäkringsinspektionen påbörjade han tjänstgöring som aktuarie; först hos Svenska livförsäkringsbolaget och sedan hos reasuransbolaget Sverige. Tiden i försäkringsbranschen väckte CRAMÉRS intresse för områden som sannolikhets- och ruinteori.

1929 inrättades den första professuren i försäkringsmatematik och matematisk statistik i Sverige vid Stockholms högskola. CRAMÉR, som utöver sitt aktuarie-

¹Cramér var både Emelies flick- och äktenskapsnamn.

arbete även var lektor i matematik på högskolan, utnämndes av Kungl. Maj:t till dess professor. Professuren var övervägande initierad samt finansierad av svenska försäkringsbolag som såg ett behov av ett sådant ämbete. Innan dess var svenska aktuarier främst skolade i ren matematik med försumbara inslag av statistisk inferens och sannolikhetsteori. CRAMÉR skrev två betydande läroböcker i sannolikhetsteori som länge användes som kurslitteratur på institutionen; [19] (känd bland studenter som *Lilla Cramér*) och [18] (*Stora Cramér*).

CRAMÉR innehöll befattningen i närmare tre decennier och från 1950 kombinerade han det med att vara högskolans rektor. Hans institution såg elever med olika bakgrunder – ej allenast inom assurance – och under andra världskriget agerade det som en fristad åt flera europeiska matematiker. 1958 utsågs CRAMÉR till Sveriges universitetskansler och efterträddes på posten som professor av sin tidigare adept d:r U. Grenander. Den ökade administrerande bördan satte aldrig stopp för CRAMÉRS forskning och även långt efter sin pension fortsatte han skriva artiklar och föreläsa runt om i världen.

Bland CRAMÉRS utmärkelser finnes Guymedaljen i guld, franska Hederslegionen och Kungl. Nordstjärneorden. Han var ledamot av Kungl. Vetenskapsakademien, Ingenjörsvetenskapsakademien och Vetenskaps-Societeten i Uppsala samt de danska, finska, norska och spanska vetenskapsakademierna, ävensom hedersledamot av Royal Statistical Society, International Statistical Institute och American Academy of Arts and Sciences. CRAMÉR utsågs till hedersdoktor vid universiteten i Princeton, Köpenhamn, Stockholm (som juris d:r), Helsingfors, Edinburgh, Calcutta och Paris. Vidare var han hedersordförande för Svenska Aktuarieföreningen (ordförande 1935–1962).

Han gifte sig 1918 med Marta Hansson (1895–1973), dotter till professorn och statsrådet Nils Hansson och Cecilia Håkansson. Tillsammans fick de dottern Marie-Louise (gift Rasmussen) samt söner Thomas och Kim. CRAMÉR dog 92 år gammal, den 5 oktober 1985 i Stockholm. Han vilar på Djursholms begravningsplats.

För mer uttömmande biografier om CRAMÉR, se t. ex. [5] av G. Blom och [33] av M. R. Leadbetter. För en tillnärmelig självbiografi av CRAMÉR, se [25].

1.3 Litteraturöversikt

1.3.1 Sammanfattning av litteratur

Utgången för litteratursökningen till denna uppsats har varit [6] av G. Blom och B. Matérn. De har där sammanställt alla CRAMÉRS artiklar och böcker (så när som på några kortare rapporter, bokrecensioner och minnesrunor); 153 till antalet. Vidare har författaren hittat ytterligare en artikel av CRAMÉR om *Filip Lundberg som vetenskaplig författare* [23]. Av dessa har femtio stycken verk, skrivna mellan 1919 och 1969, identifierats som att vara av assurancematematisk karaktär. (En komplett lista på dessa finnes i bilagan till denna uppsats.) Av dem var 28 på svenska, 18 på engelska, tre på tyska samt en på tjeckiska. CRAMÉR arbetade för det mesta ensam, men skrev även artiklar tillsammans med E. Lundberg, R.

Palmqvist, I. Sjögren och H. Wold. Tolv artiklar finnes publicerade i sin helhet i [36]. Resterande har författaren lokaliserat via Stockholms universitetsbibliotek eller internet.

För att undvika vidlyftighet behandlar vi ej *allt* som CRAMÉR har bidragit med. Författaren finner istället tre assurancesmatematiska områden där CRAMÉRS kontributioner varit av betydande signifikans och som studeras utförligt i denna uppsats; dödlighetsstudier, ruintageori och nollpunktsmetoden.

1.3.2 Dödlighetsstudier

Det första ämnet som avhandlas i denna uppsats är CRAMÉRS arbete inom skattning och prediktion av dödligheter. 1931 tillkallades CRAMÉR av statsrådet D. Hansén för att tillsammans med sju andra sakkunniga presentera nya dödlighetsmodeller åt Kungl. Maj:t för att användas inom livränteförsäkring. Resultatet presenterades ett år senare i [45]. CRAMÉR bedrev sedan tidigare forskning inom ämnet och publicerade 1926 två artiklar; [11] och [26] (den senare tillsammans med R. Palmqvist och I. Sjögren). Han fortsatte emellertid även efter utredningen var färdiggjord och publicerade två artiklar tillsammans med sin discipel H. Wold; [27] från 1934 samt den uttömmande *Mortality Variations in Sweden* [28] året därpå. Det är den senare som uteslutande dissekteras i denna uppsats.

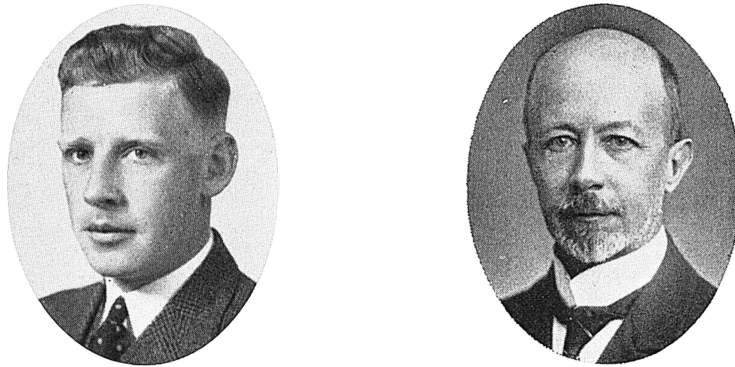
1.3.3 Ruintageori

Att författa en uppsats om *den Cramérska assurancesmatematiken* vore ej möjligt utan att inkludera ett kapitel om ruintageori. T. Mikosch [38, s. 151] beskrev CRAMÉRS forskning inom området som "banbrytande". CRAMÉRS viktigaste verk torde vara *On the Mathematical Theory of Risk* [12] från 1930 samt *Collective Risk Theory* [22] från 1955; bägge publicerade som festskrifter av försäkringsbolaget Skandia. A. Martin Löf [36, s. v] beskrev de tvenne artiklarna som "pionjärskapande" och "eminenta exempel av [CRAMÉRS] briljanta förklarande stil". Men dessa var långt ifrån de enda arbetena inom ruintageori av CRAMÉR och litteraturen citerad i denna uppsats inkluderar även [8], [10], [13], [17], [21], [24]. Ovan nämnda bok av Mikosch har också varit av stor betydelse för en modern och pedagogisk framställning av CRAMÉRS resultat. Avsnitt 3.2.1 och 3.3.3 i denna uppsats om kumulanter, avsnitt 3.3.2 om karakteristiska funktioner samt avsnitt 3.3.5 om martingaler tillämpade inom Cramér–Lundberg-modellen är enligt författarens kännedom nya resultat.

Även om CRAMÉRS originella forskning var omfattande är han bäst ihågkommen för att ha populariserat och vidareutvecklat d:r F. Lundbergs texter. Dennes son O. Lundberg skrev vid CRAMÉRS frånfälle i [35, s. 9 (egen övers.)]:

"Utan [CRAMÉRS] recension, som innehåller användbara förklaringar på vanligt matematiskt språk, är det tveksamt om Lundbergs arbeten skulle ha blivit korrekt förstådda."

F. Lundberg begränsade sina arbeten till svenska (exklusive en artikel som var på tyska) och formulerade sig på ett synnerligen egendomligt sätt. Många samtida



FIGUR 1.1. Professor H. Wold (t. v.) och fil. d:r F. Lundberg (t. h.) i *Svensk försäkringsmatrikel 1940* [39].

matematiker sökte förstå sig på hans texter utan framgång. CRAMÉR var emellertid den första att lyckas ”dechiffrera” dessa. Gällande Lundbergs *I. Approximerad framställning af sannolikhetsfunktionen II. Återförsäkring af kollektivrisker* [34] skrev CRAMÉR i [23, s. 90]:

”Sedan gammalt har denna avhandling haft ett stadgat rykte om sig för att vara svårläst, för att inte använda ett starkare ord. Fakultetsopponent vid disputationen var den framstående matematikern Erik Holmgren, och en tradition inom aktuariiekretsar förmåler att Ivar Fredholm – en av Sveriges förnämsta matematiker genom tiderna, och till skillnad från Holmgren även praktiskt verksam som försäkringsmatematiker – skall ha sagt att varken Holmgren eller Fredholm själv begripit något av avhandlingen. ’Välvilligt bedömd’ blev tydligen författaren i alla fall.”

CRAMÉR utvecklade sin syn på Lundbergs författarsätt i [10, ss. 226–227]:

”Det har en gång sagts om en världsbekant svensk matematiker, att han som akademisk föredragshållare i hög grad besatt förmågan att ge sina åhörare åtminstone en illusion av att de förstodo hans framställning. Lundberg synes snarare följa den motsatta principen. Han har en framstående förmåga att lägga även en ganska enkel matematisk bevisföring så, att läsaren får en mycket livlig förnimmelse av att inte begripa någonting alls. Det vimlar i hans skrifter av idéer, uppslag, satser och bevismetoder, stundom mer eller mindre utförda, stundom blott antyda. Men han synes i fullkomligt extraordinär grad sakna förmåga eller vilja att framställa sina tankar på ett för andra fattbart sätt. Sällan meddelar han sålunda annat än helt knapphändiga upplysningar om de förutsättningar, hans deduktioner utgå från, eller om meningen med de beteckningar, han inför. Förgäves väntar läsaren på några av dessa små värdefulla vinkar i form av randanmärkningar till bevisföringen, blickar framåt och bakåt, varigenom en välvillig författare kan underlätta hans mödor; av Lundberg är i detta avseende föga hjälp att

förvänta, och kommer verkligen någon gång ett sådant påpekande, så kan det stundom vara av en rent orakelmässig svårbegriplighet.”

1.3.4 Nollpunktsmetoden

M. R. Leadbetter [33], A. Martin-Löf [37] och B. V. Rao [41] har alla lyft fram den så kallade *nollpunktsmetoden* för premiesättning som en av CRAMÉRS stora upptäckter. Detta väckte följaktligen ett intresse hos författaren för metoden och något som givetvis skall inkluderas i denna uppsats. Det existerade emellertid ett aber; det tycktes inte finnas några referenser till denna metod, som förblev höljd i dunkel. ”Det tarvar en närmare undersökning” tänkte författaren för att citera CRAMÉR [9, s. 174].

Ingendera av de nyssnämnda artiklarna gör någon hänvisning till ett enskilt verk av CRAMÉR i ämnet. Men efter ett enträget letande har författaren identifierat *Utredning och förslag rörande grunder för liv- och pensionsförsäkring* [16] från 1938 som första gången CRAMÉR behandlar nollpunktsmetoden.² Vidare går det att härleda att nollpunktsmetoden ingått i CRAMÉRS undervisning, ty den förekommer som en tentaminafråga i [20] från 1953 vid Stockholms högskola. Det torde således vara plausibelt att ytterligare material finnes, men det har ej kunnat påträffas.

Även texter från andra upphovsmän än CRAMÉR är knaper. Författaren har i denna fråga identifierat tidigare nämnda [37] av Martin-Löf från 1995 samt två läroböcker från 1940 respektive 1958 av K. Hultman [31], [32] som exempel på material där nollpunktsmetoden diskuteras i någorlunda detalj. CRAMÉR refererade i förordet av sin egen lärobok [19] till Hultman som motivering till varför den andra upplagan ej längre innehåller något material om sannolikhetskalkylens användning på assurancesmatematik.

1.3.5 Tidigare forskning

Denna uppsats är till författarens vetskap den första i sitt slag. Den närmaste, både till namn och innehåll, torde vara Martin-Löfs *Harald Cramér and Insurance Mathematics* [37] från 1995. Artikeln ger en introduktion till CRAMÉRS ruinteori och nollpunktsmetod, men för det mesta är matematiken tämligen begränsad. Vidare finnes några mer nischade artiklar om CRAMÉR. Ett sådant exempel är [2] av E. Badolati och S. Ciccone som behandlar CRAMÉRS arbete inom ruinteori.

1.4 Några allmänliga stokastiska kontributioner

Värt att notera att CRAMÉRS forskning ej enbart var koncentrerad kring assurancesmatematik utan inkluderade en rik flora av matematiska och statistiska områden.

²Denna rapport är nu så obskur att den enda offentliga kopian författaren är medveten om finnes förvarad i ett magasin i Frescati, Stockholm och är i form av 60 knappt ihopfästade blad formaterad med skrivmaskin och delvis handritade ekvationer.

Vissa av dessa kan emellertid ha tillämpningar i assurancesmatematik; något denna uppsats ej utforskar djupare. Istället introduceras kortare presentationer över några av hans kändare teorem inom sannolikhets teori och statistisk inferens. Den intresserade läsaren kan därefter förkovra sig i dessa annorstädes.

1.4.1 Cramérs teorem

En av CRAMÉRS mest betydelsefulla upptäckter är nedan teorem för stora avvikelser, först presenterad i [15] (sedermera översatt till engelska i [42]). Nair m. fl. beskrev teoremet som ”ett tredje fundamentalt gränsvärdesteorem, bredvid stora talens lag och centrala gränsvärdesteoremet” [40, s. 73, egen övers.].

TEOREM 1.1. Låt $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara oberoende och lika fördelade lättsvansade stokastiska variabler och $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Då gäller det för $a > \mathbb{E}[X_1]$ att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mathbb{P}(S_n > an)}{n} = - \sup_{\tau > 0} \{a\tau - \log \mathbb{E}[e^{\tau X_1}]\}. \quad (1.1)$$

1.4.2 Cramérs dekompositionsteorem

Det var sedan länge känt att summan av två oberoende normalfördelade variabler själv är normalfördelad när P. Lévy år 1935 förmodade att det omvända också gäller. Detta bevisades året därpå av CRAMÉR i [14]. Teoremet i sin helhet uttryckes nedan.

TEOREM 1.2. Låt summan $X = X_1 + X_2$, där X_1 och X_2 är oberoende stokastiska variabler, vara normalfördelad. Då gäller det att även termerna X_1 och X_2 är normalfördelade.

1.4.3 Cramér–Rao-gränsen

På 1940-talet introducerade CRAMÉR i [18, kap. 32] en undre gräns för variansen av en väntevärdesriktig skattning; något som oberoende av CRAMÉR även härletts av C. R. Rao. Ett av de kändaste fallen synes nedan.

TEOREM 1.3. Låt $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara stokastiska variabler med tätheten $f(x; \theta)$ och $\hat{\theta}$ vara en väntevärdesriktig skattning av θ . Då gäller det att

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \left(n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x; \theta) \right)^2 f(x; \theta) dx \right)^{-1}. \quad (1.2)$$

Inversen av högerledet i (1.2) är känt som *Fisherinformationen* av θ .

Vidare undersökte CRAMÉR även då $(X_k)_{k \geq 1}$ är diskret, villkoren för när likhet gäller, en allmännare formel där vi ej antar $\hat{\theta}$ att vara väntevärdesriktig samt fallet då θ är multivariat.

1.4.4 Cramér–Slutskys teorem

I [18, s. 254] presenterade CRAMÉR vad han kallade ”ett konvergensteorem”. Gut betitlar i [30, s. 168] den som *Cramérs teorem*, men minst lika vanligt är det att E. Slutsky krediteras som dess upphovsman. Teoremet i fråga är som följer.

TEOREM 1.4. Låt $X_1, X_2, \dots$ och $Y_1, Y_2, \dots$ vara sekvenser av stokastiska variabler sådana att^a

$$X_n \xrightarrow{f} X \text{ och } Y_n \xrightarrow{s} a \text{ då } n \rightarrow \infty,$$

där X är en stokastisk variabel och a är en konstant. Då gäller det att

$$X_n + Y_n \xrightarrow{f} X + a; \quad (1.3)$$

$$X_n \cdot Y_n \xrightarrow{f} X \cdot a; \quad (1.4)$$

$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{f} \frac{X}{a}, \text{ för } a \neq 0; \quad (1.5)$$

då $n \rightarrow \infty$.

^aNotationerna $\xrightarrow{f}$ svarar mot *konvergens i fördelning*, d. v. s. $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$ punktvis för alla x sådana att $F_X(x)$ är kontinuerlig, samt $\xrightarrow{s}$ mot *konvergens i sannolikhet*, d. v. s. $\mathbb{P}(|Y_n - a| > \varepsilon) \rightarrow 0$ för alla $\varepsilon > 0$ då $n \rightarrow \infty$.

1.4.5 Cramér–Wolds teorem

CRAMÉR tillsammans med sin doktorandstudent H. Wold kom i [29] fram till nytänkande resultat rörande karakteristiska funktioner för multivariata fördelningar. En följd av detta är *Cramér–Wolds teorem* som ger ett villkor för att avgöra om en multivariat fördelning konvergerar. Mer specifikt [4, s. 383]:

TEOREM 1.5. Låt $\mathbf{X}_n = (X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,p})$ och $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ vara multivariata stokastiska variabler. Då gäller det att $\mathbf{X}_n \xrightarrow{f} \mathbf{X}$ då $n \rightarrow \infty$, om och endast om

$$\sum_{k=1}^p t_k X_{n,k} \xrightarrow{f} \sum_{k=1}^p t_k X_k \text{ då } n \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

för alla $(t_1, t_2, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p$.

Teorem 1.5 kan tolkas som att ifall $\mathbf{X}_n$ konvergerar i fördelning mot $\mathbf{X}$ är det ekvivalent med att alla linjära kombinationer av koordinaterna för $\mathbf{X}_n$ konvergerar mot diton av $\mathbf{X}$.

Kapitel 2

Dödlighetsstudier

Att modellera människans *dödlighet* torde utgöra ett av de mest centrala inslagen i livförsäkringens teoretiska ramverk. Vare sig utbetalningar sker medan den försäkrade lever eller till efterlevande vid dennes död, så är det av yttersta vikt för försäkringsbolaget att göra en kvalificerad gissning på vad kostnaden för det enskilda kontrakt eller hela portföljen kommer att landa på. I detta kapitel undersöker en metod framtagen av CRAMÉR som nyttjar Makehams formel för att skatta och prediktera dödlighetsintensiteten för olika åldrar och kalenderperioder. Som grund för sina resultat använde CRAMÉR omfattande data över Sveriges befolkning åren 1800–1930 för åldrarna 30–90 år.

2.1 Makehams formel

Vi börjar med att introducera vad som åsyftas när vi talar om dödlighetsintensitet.

DEFINITION 2.1. Låt X vara en stokastisk variabel definierad på ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ svarande mot åldern vid en individs dödsfall. För alla $x \geq 0$ betecknar vi *dödlighetsintensiteten* för en x -åring som

$$\mu(x) := \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X \leq x + \Delta x \mid X > x)}{\Delta x}. \quad (2.1)$$

En av de kändaste modellerna för att beskriva dödlighetsintensiteten är med *Makehams formel*

$$\mu(x) = \alpha + \beta c^x, \quad (2.2)$$

där $(\alpha, \beta, c) \in \mathbb{R}_+^3$ vilket skall tolkas som att samtliga parametrar är positiva. Antagandet om en exponentiellt växande dödlighetsintensitet presenterades av B. Gompertz medan den åldersoberoende termen introducerades av W. Makeham. Det är kring Makehams formel som CRAMÉR tillsammans med H. Wold (hädanefter beskrivna som CRAMÉR m. fl.) fokuserade sin dödlighetsforskning på och det är således fokuset i detta kapitel. CRAMÉR m. fl. [28, s. 171] menade att (för deras data) ger formeln en ”resonabel” anpassning till den sanna dödlighetsintensiteten

för alla åldrar över 30. Förklaringen till felanpassningen på yngre åldrar skyllde de på förekomsten av tuberkulos; ett problem som ej torde vara lika framträdande i dag, men felet kvarstår likväl på modern data.

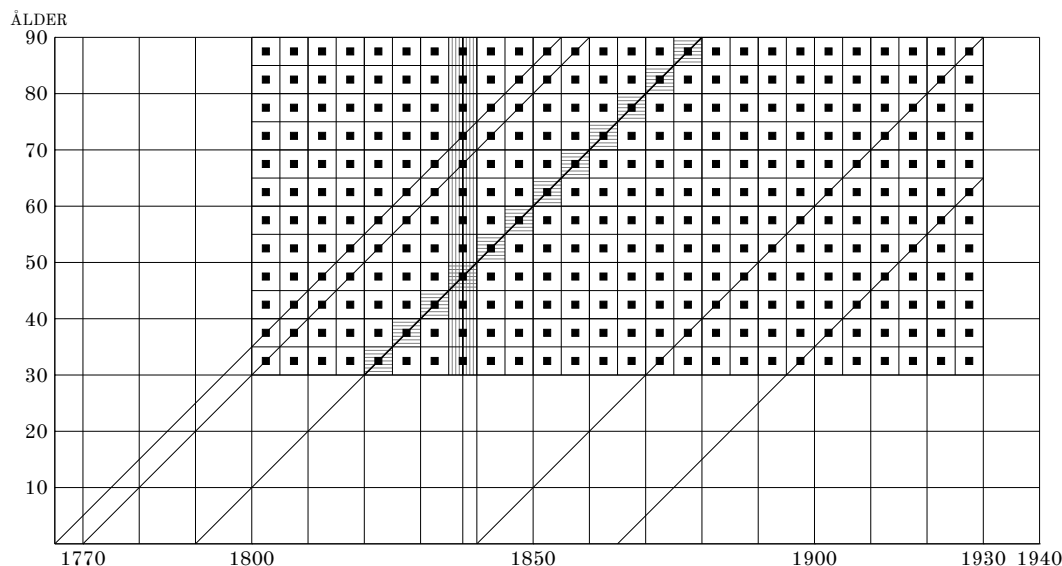
2.1.1 En till oberoende variabel

Det torde vara allmänt känt att dödlighetsintensiteten för exempelvis en i dag 50-årig svensk man, ej är densamma som för dito född på 1700-talet. Att dödlighetsintensiteten ändras med kalenderperioderna var något som var noterbart även under 1800- och början av 1900-talet när CRAMÉR m. fl. studerade angelägenheten. Denna parametrisering var de emellertid inte först med, men deras arbete var rigorösare än samtida litteratur samtidigt som de utvecklade nya metoder.

CRAMÉR m. fl. presenterade följande variant av Makehams formel som tager både ålder x och kalenderperiod t som argument;

$$\mu(x, t) = a_t + b_t c_t^x. \quad (2.3)$$

Observera hur de tre parametrarna enbart är funktioner av kalenderperiod och ej ålder. I analogi med (2.3) inkluderade de även en motsvarande funktion av ålder och generation $\tau = t - x$, men det är emellertid inget som i denna uppsats underkastas en närmare granskning. De två parametriseringarna ger inte nödvändigtvis snarlika skattningar, men CRAMÉR m. fl. fann ingendera att vara överlägsen [28, s. 189].



FIGUR 2.1. Schematisk representation av dödlighet för kalenderperiod och generation som framställd av CRAMÉR m. fl. [28, fig. 1], återskapad i `TikZ`.

I figur 2.1 syns ett diagram från deras artikel över hur vi skall tolka $\mu(x, t)$ respektive $\mu(x, \tau)$. (Notera att CRAMÉR m. fl. indelade sin data i femårsintervall och således svarar året t' mot perioden $[t' - 2.5, t' + 2.5)$ och analogt för åldrar.)

Ungefär i mitten av figuren har vi 47.5-åringar under kalenderperioden 1837.5. Den diagonala linjen som passerar genom rutan svarar mot deras generation, vilket i det här fallet är 1790. När vi sedan registrerar dödsfall kan detta indelas på två sätt. Antingen räknas antalet döda 47.5-åringar (och antalet döda för alla andra åldrar) under perioden 1837.5. Eller så räknas antalet döda 47.5-åringar av generation 1790 och för att få en översikt över dödligheten i hela generationen registreras dödsfall från 1822.5 (då de fyller 30) tills alla dött eller fyllt 90; som längst kalenderperiod 1877.5. Det förra fallet illustreras i figur 2.1 med vertikalt streckade rutor och den senare med horisontellt streckade rutor.

2.1.2 Skattning av parametrar

Den huvudsakliga praktiska utmaningen med Makehams formel (2.2) torde bestå i att avgöra hur parametrarna α , β och c lämpligast må skattas. CRAMÉR m. fl.:s [28, ss. 172–173] lösning var att använda sig av χ^2 -statistikan först introducerad av K. Pearson. För bekvämare notation och för att överensstämja med CRAMÉR m. fl. utelämnas indexeringen av t från detta avsnitt, men resultaten är helt analoga för (2.3) som (2.2).

Låt n_x och d_x svara mot antalet x -åringar utsatta för risk respektive som avlidit. Vidare låter vi $\hat{\mu}(x)$ vara den skattade dödlighetsintensiteten. Då är $n_x \hat{\mu}(x)$ en momentskattning på antalet döda x -åringar. CRAMÉR m. fl. presenterade sedan anpassningstestet av intresse som

$$\chi^2 := \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{(d_x - n_x \mu(x))^2}{n_x \mu(x)}, \quad (2.4)$$

där $\mathcal{X}$ är mängden med alla åldrar x i datamaterialet. Uppgiften nu består i att uttaga parameterskattningar sådana att $\hat{\mu}(x)$ är lösningen till

$$\min_{\mu(x) \in \{\alpha + \beta c^x : (\alpha, \beta, c) \in \mathbb{R}_+^3\}} \chi^2. \quad (2.5)$$

Att lösa (2.5) går i dag relativt smidigt tack vare olika moderna redskap. Men så var ej fallet på 1930-talet; vilket nödgade CRAMÉR m. fl. att utveckla alternativa metoder. Det första de gjorde var att använda lite *svart magi* och approximera (2.4) med

$$\tilde{\chi}^2 := \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{(d_x - n_x \mu(x))^2}{d_x}. \quad (2.6)$$

Att minimera $\tilde{\chi}^2$ beskrev de som ”uppenbarligen mycket simplare” än att minimera χ^2 . Men framför allt hävdade CRAMÉR m. fl. att då det ofta gäller att $d_x \approx n_x \mu(x)$ torde bytet ej innebära drastiskt skilda värden på parametrarna i $\hat{\mu}(x)$.

Minimeringsproblemet

$$\min_{\mu(x) \in \{\alpha + \beta c^x : (\alpha, \beta, c) \in \mathbb{R}_+^3\}} \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{(d_x - n_x \mu(x))^2}{d_x} \quad (2.7)$$

är emellertid fortfarande förenat med avsevärda svårigheter. Nästa förenkling som CRAMÉR m. fl. gjorde var att fixera ett värde på c och minimera $\tilde{\chi}^2$ givet detta. Sålunda vill vi istället för (2.7), lösa

$$\min_{\mu(x) \in \{\alpha + \beta c^x : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2\}} \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{(d_x - n_x \mu(x))^2}{d_x},$$

eller ekvivalent

$$\min_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2} \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{(d_x - \alpha n_x - \beta c^x n_x)^2}{d_x}. \quad (2.8)$$

Lösningen till (2.8) fås av ekvationssystemet där vi sätter partialderivatorna med avseende på α respektive β lika med noll:

$$\begin{cases} \alpha \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{n_x^2}{d_x} + \beta \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{c^x n_x^2}{d_x} = \sum_{x \in \mathcal{X}} n_x, \\ \alpha \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{c^x n_x^2}{d_x} + \beta \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{c^{2x} n_x^2}{d_x} = \sum_{x \in \mathcal{X}} c^x n_x. \end{cases} \quad (2.9)$$

Från (2.9) erhålles sedan skattningarna

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_x c^x n_x^2 / d_x \cdot \sum_x c^x n_x - \sum_x c^{2x} n_x^2 / d_x \cdot \sum_x n_x}{\left(\sum_x c^x n_x^2 / d_x\right)^2 - \sum_x n_x^2 / d_x \cdot \sum_x c^{2x} n_x^2 / d_x}, \quad (2.10)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_x n_x - \hat{\alpha} \sum_x n_x^2 / d_x}{\sum_x c^x n_x^2 / d_x}. \quad (2.11)$$

Sista steget är att bestämma $\hat{c}$. För det återvände CRAMÉR m. fl. [28, ss. 174] till χ^2 och (2.4). Givet olika värden $c_1, c_2, \dots$ beräknas motsvarande $\hat{\alpha}$ - och $\hat{\beta}$ -värden sådana att vi erhåller 3-tuplarna $(\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k, c_k)_{k \geq 1}$. Våra slutgiltiga parametrar $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{c})$ fås som lösningen till

$$\min_{(\alpha, \beta, c) \in (\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k, c_k)_{k \geq 1}} \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{(d_x - \alpha n_x - \beta c^x n_x)^2}{\alpha n_x + \beta c^x n_x}. \quad (2.12)$$

CRAMÉR m. fl. hävdade att en sådan lösning för jämnan existerar, ty om vi illustrerar de respektive $(\chi_k^2)_{k \geq 1}$ i ett diagram med $(\log_{10} c_k)_{k \geq 1}$ som abscissa, så går det närmare felfritt att anpassa ett konvext andragradspolynom till det. Slutmodellen för skattningen av en x -årings dödlighetsintensitet ges således av

$$\hat{\mu}(x) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \hat{c}^x.$$

2.1.3 Momentmetoden

Att komputera summorna i (2.10) och (2.11) var dock inget trivialt göromål år 1935, ehuru vi har gjort flera förenklingar. Sålunda föreslog CRAMÉR m. fl. [28,

s. 174] att istället använda en variant av *momentmetoden* för att skatta α och β . Skillnaden mellan de två metodernas skattningar ansåg de vara ”fullständigt obetydlig för praktiska ändamål”. För momentmetoden är tidsparametrisering erforderlig så vi återgår till (2.3). Motsvarande ekvationssystem till (2.9) för att bestämma $\hat{\alpha}_t$ och $\hat{\beta}_t$ uttryckte CRAMÉR m. fl. som

$$\begin{cases} \alpha \sum n_x + \beta \sum c^x n_x = \sum d_x, \\ \alpha \sum \sum n_x + \beta \sum \sum c^x n_x = \sum \sum d_x; \end{cases} \quad (2.13)$$

vilket fås från förut nämnda approximation $d_x \approx n_x \mu(x) = \alpha n_x + \beta c^x n_x$. Vid första anblick är tydning av (2.13) ej synbarlig på grund av bristfällig parametrisering. Vad CRAMÉR m. fl. emellertid åsyftade var

$$\begin{cases} \alpha_{t'} \sum_{x \in \mathcal{X}} n_{x,t'} + \beta_{t'} \sum_{x \in \mathcal{X}} c_{t'}^x n_{x,t'} = \sum_{x \in \mathcal{X}} d_{x,t'}, \\ \alpha_{t'} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{x \in \mathcal{X}} n_{x,t} + \beta_{t'} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{x \in \mathcal{X}} c_{t'}^x n_{x,t} = \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{x \in \mathcal{X}} d_{x,t}; \end{cases} \quad (2.14)$$

där t' är kalenderperioden vi vill modellera och $\mathcal{T}$ svarar mot mängden med alla perioder t tillgängliga i datan. I sådant fall blir skattningarna

$$\hat{\alpha}_{t'} = \frac{\sum_t \sum_x d_{x,t} \cdot \sum_x c_{t'}^x n_{x,t'} - \sum_t \sum_x c_{t'}^x n_{x,t} \cdot \sum_x d_{x,t'}}{\sum_t \sum_x n_{x,t} \cdot \sum_x c_{t'}^x n_{x,t'} - \sum_t \sum_x c_{t'}^x n_{x,t} \cdot \sum_x n_{x,t'}}, \quad (2.15)$$

$$\hat{\beta}_{t'} = \frac{\sum_x d_{x,t'} - \hat{\alpha}_{t'} \sum_x n_{x,t'}}{\sum_x c_{t'}^x n_{x,t'}}. \quad (2.16)$$

Vad gäller $\hat{c}_{t'}$ bestämmes den sammalunda som tidigare.

2.1.4 Utjämning av parametrar

Efter att ha skattat samtliga tre parametrar i Makehams formel för alla olika kalenderperioder valde CRAMÉR m. fl. [28, s. 179–184] att utjämna parametrarna. Detta har flera fördelar; det motverkar överanpassning och gör det möjligt att såväl inter- som extrapolera skattningarna över tiden. Grafisk framställning av deras data gav vid handen att $\log_{10} c_t$ växte utifrån en logistisk kurva. Upptäckten skiljde sig från tidigare forskning som ej fann en systematisk förändring i c_t (jfr [3] av F. Bernstein). Vidare anträffade CRAMÉR m. fl. att även $\log_{10} \beta_t$ följde en logistisk kurva – men en avtagande sådan. Som motivering till varför detta vore rimligt hänvisade de till faktumet att

$$\log_{10}(\mu(x, t) - \alpha_t) = \log_{10} \beta_t + x \log_{10} c_t$$

torde bringa att de beter sig likartat. Slutligen fann de att α_t minskade linjärt med tiden. Då en logistisk kurva stagnerar för stora värden på t blir således den långsiktiga effekten på dödlighetsintensiteten att $\mu(x, t)$ avtager linjärt. Hur väl detta stämmer överens på modern data undersökes närmare i nästkommande avsnitt.

Parametrarna till de logistiska kurvorna skattade Cramér m. fl. med en original metod som nyttjade minsta-kvadrat (se [28, bil. 2]). F  r $\alpha_t = r - st$ utgick de ånyo till att minimera $\tilde{\chi}^2$, fast med följande modifikation

$$\min_{(r,s) \in \mathbb{R}_+^2} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{(d_{x,t} - rn_{x,t} + stn_{x,t} - \hat{\beta}_t \hat{c}_t^x n_{x,t})^2}{d_x},$$

där $\hat{\beta}_t$ och $\hat{c}_t$   r de utjämnade logistiska skattningarna vid t .

2.2 Dödlighet i Sverige 1931–2023

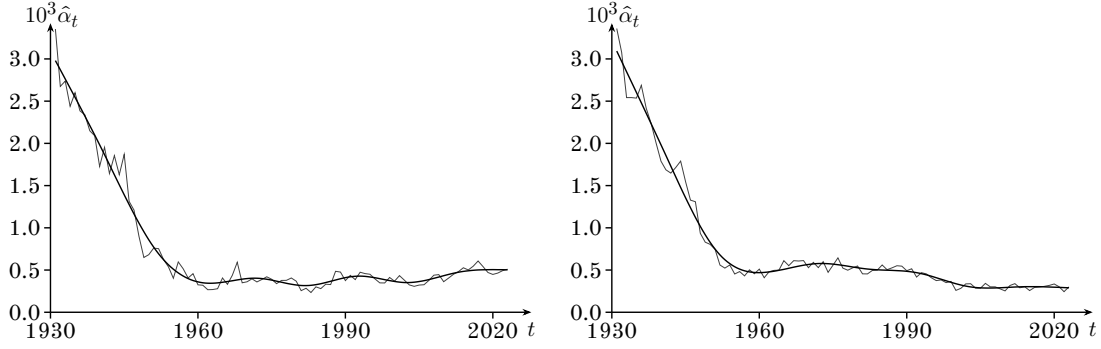
I detta avsnitt appliceras Cramér m. fl.:s metod för att anpassa Makehams formel för tiden efter deras artikel. Mer specifikt unders  kes dödligheten i Sverige från   r 1931 till 2023. Datan är inhämtad från *Human Mortality Database* (se <https://www.mortality.org/>). Samma underlag användes av J. Zhan i [44] där dödlighetsintensiteten modelleras efter Lee–Carters metod vilken numeriskt anpassats med artificiella neuronnät och den eminente läsaren som önskar jämföra de två metoderna hänvisas dit. Liksom Cramér m. fl. beaktas enbart åldrarna 30 till 90   r. Däremot indelas åldrar och kalenderperioder i intervall om 1 istället för 5   r då beräkningarna ej   r noterbart mer resurskrävande.

För att utjämna parametrarna avviker vi från Cramér m. fl. och begagnar oss istället av *kubiska splinefunktioner* som bestämmer med hjälp av generaliserad korsvalidering. Dels   r det enklare att implementera tack vare färdiga kodpaket, dels ger det bättre och mindre godtycklig anpassning än de mer primitiva metoder som fanns tillgängliga Cramér m. fl. Splinefunktioner har dock nackdelen i att de ej   r menade f  r extrapolering och förhindrar därmed oss från att adekvat prediktera framtida dödlighet. Problemet l  ses dock enkelt med *naturliga* kubiska splinefunktioner som antager linjärt beteende utanför de yttre gränserna; något som också visar sig rimligt för den aktuella datan.

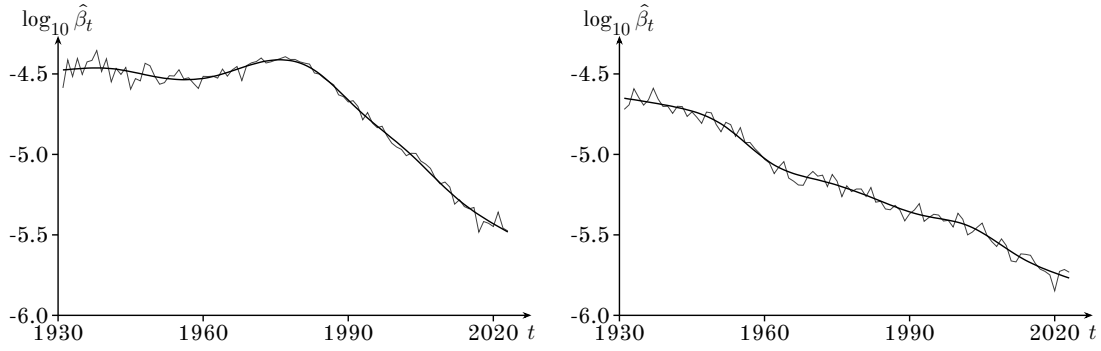
2.2.1 Makehamparametrar

Med bakgrund i avsnitt 2.1.2 skattar vi α_t , β_t och c_t med hjälp av χ^2 för alla heltalsvärden $t \in [1931, 2023]$. Därefter utjämnas skattningarna med kubiska splinefunktioner. I enlighet med Cramér m. fl. anpassar vi splinefunktionerna mot $\log_{10} \beta_t$ respektive $\log_{10} c_t$. Resultaten synes i figurer 2.2–2.4.

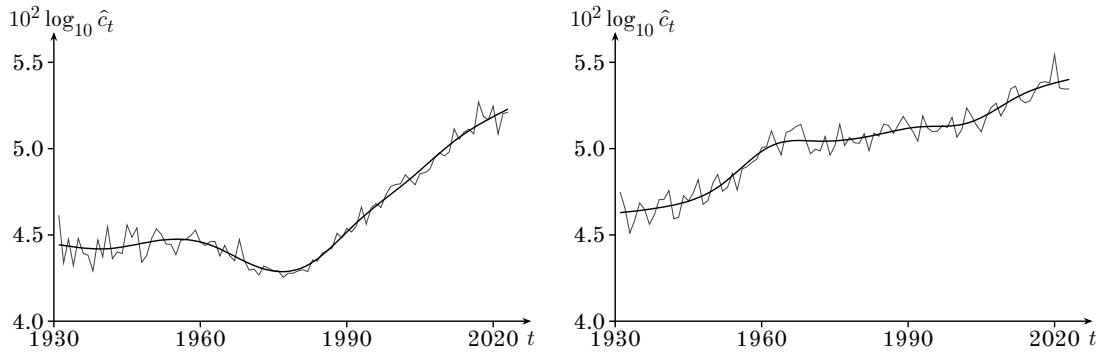
Vad gäller α_t bet  r den sig till en början precis som Cramér m. fl. predikterade; nämligen den avtager linjärt, både för män och för kvinnor. Detta fortgår till $t \approx 1960$ där den sedermera stannar i värde lite över noll. F  r män finnes det också att Cramér m. fl.:s prediktion att $\log_{10} \beta_t$ och $\log_{10} c_t$ torde vara närmast konstanta med tiden (på grund av stagnering i den logistiska kurvan) stämmer. Fast vid $t \approx 1975$ sker en plötslig förändring som medför att $\log_{10} \beta_t$ och $\log_{10} c_t$ istället börjar linjärt avtaga respektive växa. Hos kvinnor finnes ej samma tydliga brytpunkt utan där sker en liknande linjär förändring över hela tidsperioden.



FIGUR 2.2. Skattningar på α_t i (2.3) utifrån χ^2 samt utjämnat med kubiska splinefunktioner för män (t. v.) och kvinnor (t. h.).



FIGUR 2.3. Skattningar på β_t i (2.3) utifrån χ^2 samt utjämnat med kubiska splinefunktioner för män (t. v.) och kvinnor (t. h.).



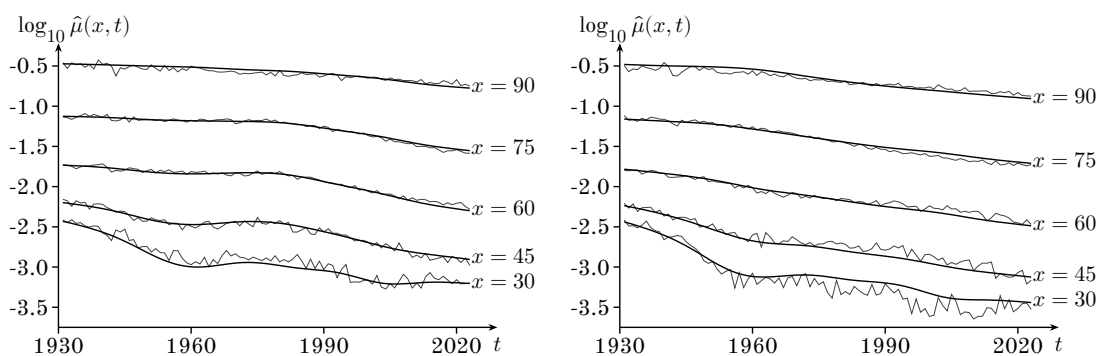
FIGUR 2.4. Skattningar på c_t i (2.3) utifrån χ^2 samt utjämnat med kubiska splinefunktioner för män (t. v.) och kvinnor (t. h.).

2.2.2 Dödlighetsskattning

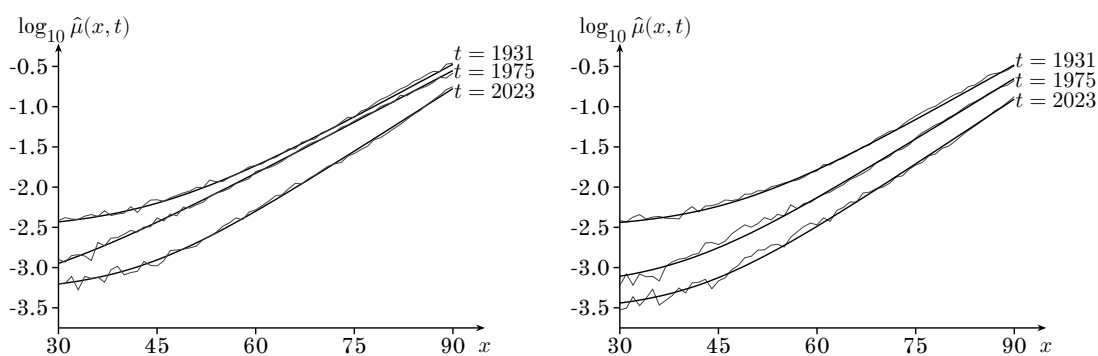
Givet de nu införskaffade *utjämnade* parametrarna är det möjligt att modellera $\hat{\mu}(x, t)$. I figur 2.5 ser vi dödlighetsintensiteten över tiden för olika åldrar. Det gäller att $\hat{\mu}(x, t)$ ger en god anpassning till den råa dödlighetsintensiteten $d_{x,t}/n_{x,t}$ för äldre åldrar, men brister för de yngre som uppvisar ett kraftigt irreguljär bete-

ende. Anpassningen är dock bättre för män än kvinnor. Beteendet i de respektive Makehamparametrarna synes tydligt i hur de påverkar dödlighetsintensiteten. För män synes förändringen kring $t \approx 1975$ i en kraftigare minskning av dödligheten som för de äldre åldrarna ej var särskild noterbar. Yngre åldrar hade dock sedan tidigare en betydande minskning vilket beror på att α_t då är mer framträdande. Kvinnor hade en tydligare minskning i dödlighetsintensiteten över hela perioden liksom väntat.

En annan illustration av $\hat{\mu}(x, t)$ göres i figur 2.6. Där fokuserar vi på skillnaden mellan olika t -värden. För män har vi en kraftig minskning för låga x , men en näppelig skillnad för äldre åldrar över första halvan av tidsperioden. Däremot ser vi en allmän minskning för den andra halvan vilket återspeglar förändringen i $\hat{\beta}_t$ och $\hat{c}_t$. Vad gäller kvinnor framgår det av det sagda att en likartad förändring sker över t , men en större ökning i början av tidsperioden för låga x .



FIGUR 2.5. Skattningar på $\mu(x, t)$ i (2.3) utifrån parametrar utjämnade med kubiska splinefunktioner samt råa dödligheter över åldrarna $x \in \{30, 45, 60, 75, 90\}$ för män (t. v.) och kvinnor (t. h.).



FIGUR 2.6. Skattningar på $\mu(x, t)$ i (2.3) utifrån parametrar utjämnade med kubiska splinefunktioner samt råa dödligheter över kalenderåren $t \in \{1931, 1975, 2021\}$ för män (t. v.) och kvinnor (t. h.).

Kapitel 3

Ruinteori

Ruinteori är den gren av assurancesmatematiken som studerar *ruin*, det vill säga att försäkringsbolaget ej har råd att betala sina åtaganden och blir insolvent. Detta kan göras både inom en ändlig eller oändlig tidshorisont. Till gagn för simpliciteten antar vi ständigt att försäkringsbolagets intäkter enbart kommer från premier och utgifter endast från utbetalningar kopplade till skador.¹ Därmed ignorerar vi exempelvis administrativa kostnader, skatter och intäkter från investeringar som ej är relevanta i denna kontext. Framför allt negligeras diskontering i form av ränta.

3.1 Cramér–Lundberg-modellen

En förutsättning för ruiniteori är *Cramér–Lundberg-modellen* vars fundament introducerades 1903 i [34] av F. Lundberg. Modellen populariserades sedermera av CRAMÉR i bl. a. [12] som även avsevärt utvecklade teorin. Den är en klassiker inom reservsättning och beskriver skadeprocessen över tid. T. Mikosch [38, s. 12] sammanfattar modellen i tre centrala antaganden som presenteras nedan med viss modifikation.

ANTAGANDE 3.1. Antalet skador $N = (N(t))_{t \geq 0}$ följer en homogen Poisson-process med intensiteten $\lambda > 0$. Vi betecknar skadornas ankomsttider med $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ sådana att $N(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}$ ($\sup \emptyset = 0$).

ANTAGANDE 3.2. Den k :te skadan som ankommer vid tiden T_k förorsakar skadekostnaden ξ_k . Sekvensen $(\xi_k)_{k \geq 1}$ består av oberoende stokastiska variabler som är likafördelade med ξ , där ξ är icke-negativ och har fördelningsfunktionen $F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \leq x)$ definierad på ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

¹Ordet ”skada” användes i brist på bättre synonymer (jfr engelskans *claim*) och skall ej tolkas bokstavligt då resultaten appliceras inom t. ex. livförsäkring.

ANTAGANDE 3.3. Sekvenserna $(T_k)_{k \geq 1}$ och $(\xi_k)_{k \geq 1}$ är oberoende. I synnerhet gäller det även att N och $(\xi_k)_{k \geq 1}$ är oberoende.

3.1.1 Kommentar om individuell riskteori

Cramér–Lundberg-modellen är den kändaste modellen i det som kallas för *kollektiv riskteori*. Detta kontrasteras mot *individuell riskteori* som var den dominerande skolan inom assurancesmatematiken innan Lundberg och Cramér. I den senare har försäkringsbolaget n kända kontrakt och vi studerar summan av nettovinsterna för alla kontrakt;

$$I(t) := \sum_{k=1}^n (q \min\{d_k, t\} - \mathbb{1}_{A_k} \xi_k). \quad (3.1)$$

Här svarar A_k mot att kontrakt k är kopplat till (minst) en skada, d_k är durationen på kontrakt k , ξ_k är den sammanlagda kostnaden för det k :te kontraktet och q är premieintäkten från ett kontrakt med durationen 1. Sålunda är $I(t)$ nettovinsten för hela portföljen som kan antaga både positiva och negativa värden. Om flera skador må inträffa för ett kontrakt kan (3.1) uttryckas som

$$I(t) = \sum_{k=1}^n \left(q \min\{d_k, t\} - \mathbb{1}_{A_k} \sum_{j=1}^{n_k} \xi_{kj} \right). \quad (3.2)$$

där n_k är antalet skador för det k :te kontraktet och ξ_{kj} är skadekostnaden för den j :te skadan i kontrakt k . Värt att notera är att (3.2) kan se som en blandning av de två metoderna där den inre summan $\sum_{j=1}^{n_k} \xi_{kj}$ kan beskrivas med hjälp av Cramér–Lundberg-modellen och ett stokastiskt n_k .

Notera skillnaden med Cramér–Lundberg-modellen där vi alltså ej gör något antagande om antalet kontrakt. Vidare uppdelar vi inte den totala kostnaden på individnivå utan på skadenivå vars totala antal är stokastiskt enligt en Poisson-process. Cramér studerade båda metoderna och skrev i [12, s. 13, egen övers.]:

”För det praktiska syftet att lösa problemen inom riskteorin ter sig emellertid bägge synesätten lika berättigade till vår uppmärksamhet.”

Författaren väljer dock att i denna uppsats koncentrera sig uteslutande på kollektiv riskteori och mer specifikt Cramér–Lundberg-modellen. Detta då det är den Cramér mest fokuserade på och extensivt utvecklade.

3.1.2 Homogen Poissonprocess

Vi börjar med att erinra oss om homogena Poissonprocesser som ingår i antagande 3.1. Definitionen nedan är inspirerad av Mikosch [38, ss. 7–10].

DEFINITION 3.4. Den stokastiska processen $N = (N(t))_{t \geq 0}$ definierad på ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ med avseende på filtreringen $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ kallas för en *homogen Poissonprocess* med intensitet $\lambda > 0$ om följande gäller.

i) Begynnelsevillkor:

$$N(0) = 0 \quad \text{n. s.}^a \quad (3.3)$$

ii) Oberoende inkrement:

För varje följd av tidpunkter $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ är inkrementen

$$N(t_{i-1}, t_i] = N(t_i) - N(t_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n; \quad (3.4)$$

parvis oberoende.

iii) Stationära inkrement:

Antalet händelser i ett intervall beror enbart på intervallets längd och ej dess placering. Mer specifikt gäller det för alla $0 \leq s < t$ och $h > 0$ att

$$F_{N(s,t]}(x) = F_{N(s+h,t+h]}(x) = e^{-\lambda(t-s)} \sum_{k \leq x} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}. \quad (3.5)$$

iv) Càdlàg-stigar:

Med sannolikhet 1 är stigarna $(N(t, \omega))_{t \geq 0}$ av processen N kontinuerliga från höger för $t \geq 0$ och har gränsvärden från vänster för $t > 0$. Vi säger att N har *càdlàg-stigar* (*continue à droite, limite à gauche*).

^aFörkortningen n. s. står för *nästan säkert*, d. v. s. händelsen har sannolikhet 1 (med avseende på sannolikhetsmåttet $\mathbb{P}$).

Det gäller således för antalet skador i Cramér–Lundberg-modellen att

$$F_{N(t)}(x) = e^{-\lambda t} \sum_{k \leq x} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \quad (3.6)$$

Detta var något som förbigående omnämndes av Lundberg och en rigorösare härledning gjordes av CRAMÉR i [8, ss. 9–11]. Själva sannolikhetsfördelningen har sitt ursprung hos S. D. Poisson omkring 80 år tidigare. Det får antagas vara känt att

$$\mathbb{E}[N(t)] = \text{Var}(N(t)) = \lambda t. \quad (3.7)$$

Vad antagande 3.1 innebär för Cramér–Lundberg-modellen är att skador inkommer med samma intensitet oberoende av kalenderår eller säsong. Detta är ofta ej ett plausibelt antagande i praktiken. T. ex. varierar antalet inkomna skador relaterade till väderberoende händelser som automobilolyckor eller skogsbränder i intensitet beroende på tiden på året. Motiveringen till antagandet är emellertid en avsevärt simplare modell. Vidare antager modellen att det är osannolikt att

flera skador sker samtidigt samt att vi ej får någon ytterligare information om förändringar i N givet tidigare inkrement. Bägge dessa antaganden går också att ifrågasätta med avseende på deras realism.

Det här är något CRAMÉR givetvis själv var medveten om; varvid han på äldre dagar [24, ss. 19–20] förespråkade en inhomogen Poissonprocess där λ är stokastisk, vilket vi betecknar med Λ ,² och/eller en funktion av tiden sådan att $\Lambda = \Lambda(t)$. I det förra fallet skulle (3.6) istället bli

$$F_{N(t)}(x) = \sum_{k \leq x} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dF_\Lambda(\lambda). \quad (3.8)$$

Vidare kritiserade CRAMÉR antagandet om oberoende inkrement i N och skrev i [21, s. 101, egen övers.]:

”Detta antagande kommer utan tvekan att innebära en viss idealisering av observerad fakta, men kan ändå anses vara tillräckligt realistisk för en första approximation.”

3.1.3 Skadekostnadens fördelning

Ruinteori kan grovt uppdelas i två områden beroende på om den enskilda skadekostnaden ξ följer en lång- eller lättsvansad fördelning. I klassiskt ruiniteori – vilket är det som förknippas med CRAMÉR – så antar vi att ξ är lättsvansad. Vi väljer att uttrycka detta formellt som följer [43, s. 395].

DEFINITION 3.5. Den *momentgenererande funktionen* av den stokastiska variabeln X är

$$M_X(\tau) := \mathbb{E}[e^{\tau X}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbb{E}[X^k] \tau^k, \quad (3.9)$$

givet det finnes $h > 0$ sådant att $\mathbb{E}[e^{\tau X}] < \infty$ för alla $|\tau| < h$.

ANTAGANDE 3.6. Det gäller att $M_\xi(\tau)$ existerar när $|\tau| < h$ för något $h > 0$.

Lekmannamässigt innebär antagande 3.6 att stora skadekostnader är högst osannolika. Detta medför fagrare modeller och mindre osäkerhet. Nackdelen är att antagandet ej torde vara rimligt för åtskilliga försäkringstyper. Vidare gör vi inget antagande på om ξ är kontinuerlig, diskret eller ingendera [12, ss. 14–17]. Det k :te momentet uttryckes således smidigast med Stieltjesintegralen

$$\mathbb{E}[\xi^k] = \int_0^\infty x^k dF_\xi(x). \quad (3.10)$$

²CRAMÉR använde gement λ för både den stokastiska variabeln och dess utfall vilket är tämligen tvetydigt.

Exempel på fördelningar för skadekostnaden som uppfyller antaganden 3.2 och 3.6 är exponential-, gamma-, och Weibull-fördelningarna (den senare bara om skevhetsparametern är större eller lika med 1). Även den Gaussiska fördelningen kan vara applicerbar givet sannolikheten för ett negativt utfall är försumbar.

3.2 Kumulativ skadekostnad

Vi introducerar den *kumulativa skadekostanden* i Cramér–Lundberg-modellen vid tiden $t \geq 0$ som

$$S(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k. \quad (3.11)$$

Om $N(t) = 0$ ansätter vi $S(t) = 0$. Notera att $S(t)$ är en *sammansatt Poisson-process* och många av de resultat som här presenteras gäller även i allmänhet för densamma och ej enbart inom Cramér–Lundberg-modellen.

En stor utmaning inom ruenteori är att beskriva fördelningen på $S(t)$, emedan det är den som mol allena står för osäkerheten i modellen. Vi börjar med att bestämma dess väntevärde och varians.

PROPOSITION 3.7. I Cramér–Lundberg-modellen gäller det för kumulativa skadekostnaden $S(t)$ definierad i (3.11) att

$$\mathbb{E}[S(t)] = \lambda t \mathbb{E}[\xi], \quad (3.12)$$

$$\text{Var}(S(t)) = \lambda t \mathbb{E}[\xi^2]. \quad (3.13)$$

Bevis. Från antaganden 3.2 och 3.3 samt ekvation (3.7) får vi med hjälp av betingning

$$\mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k \mid N(t)\right]\right] = \mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[\xi] = \lambda t \mathbb{E}[\xi]$$

och

$$\begin{aligned} \text{Var}(S(t)) &= \text{Var}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k\right) = \text{Var}\left(\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k \mid N(t)\right]\right) + \mathbb{E}\left[\text{Var}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k \mid N(t)\right)\right] \\ &= \text{Var}(N(t))\mathbb{E}[\xi]^2 + \mathbb{E}[N(t)]\text{Var}(\xi) = \lambda t(\mathbb{E}[\xi]^2 + \text{Var}(\xi)) \\ &= \lambda t(\mathbb{E}[\xi]^2 + \mathbb{E}[\xi^2] - \mathbb{E}[\xi]^2) = \lambda t \mathbb{E}[\xi^2]. \end{aligned}$$

h. s. b.

3.2.1 Kumulanter

Ett sätt att beskriva en sannolikhetsfördelning är med hjälp av dess *kumulanter*, vilka delar similariteter med moment.

DEFINITION 3.8. Den *kumulantgenererande funktionen* av den stokastiska variabeln X är

$$K_X(\tau) := \log M_X(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \kappa_k \tau^k, \quad (3.14)$$

där $\kappa_k = \kappa_k(X)$ svarar mot den k :te *kumulanten* för X .

De två första kumulanterna är de bekanta väntevärdet och variansen.

LEMMA 3.9. Låt $\kappa_k = \kappa_k(X)$. Det gäller att

$$\kappa_1 = \mathbb{E}[X], \quad (3.15)$$

$$\kappa_2 = \text{Var}(X). \quad (3.16)$$

Bevis. Genom att differentiera (3.14) k gånger³ och ansätta $\tau = 0$ finner vi

$$\frac{d^k}{d\tau^k} K_X(\tau) \Big|_{\tau=0} = \kappa_k. \quad (3.17)$$

Analogt får vi från (3.9) att

$$\frac{d^k}{d\tau^k} M_X(\tau) \Big|_{\tau=0} = \mathbb{E}[X^k]. \quad (3.18)$$

Således

$$\kappa_1 = \frac{d}{d\tau} K_X(\tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau} \log M_X(\tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = \mathbb{E}[X]$$

samt

$$\kappa_2 = \frac{d^2}{d\tau^2} K_X(\tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{M''_X(0)M_X(0) - (M'_X(0))^2}{M_X(0)^2} = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \text{Var}(X).$$

h. s. b.

Med hjälp av lemma 3.9 kan vi uttrycka (3.12) och (3.13) i proposition 3.7 som

$$\kappa_1 = \lambda t \mathbb{E}[\xi], \quad (3.19)$$

$$\kappa_2 = \lambda t \mathbb{E}[\xi^2]. \quad (3.20)$$

Vi ser ut att finna ett mönster avseende kumulanter och moment; nämligen att den k :te kumulanten för $S(t)$ är lika med produkten av intensiteten, tiden samt det k :te momentet av ξ . Fast stämmer dito även för $k \geq 3$?⁴ Svaret är ja.

³För att detta skall vara möjligt antager vi att potensseriens konvergensradie ρ är nollskild och inför inskränknigen $|\tau| < \rho$.

⁴Förmodandet av teorem 3.10 tillskrives fil. d:r Per Alexandersson.

TEOREM 3.10. I Cramér–Lundberg-modellen gäller det för kumulativa skadekostnaden $S(t)$ definierad i (3.11) för alla $k = 1, 2, 3, \dots$ att

$$\kappa_k = \lambda t \mathbb{E}[\xi^k]. \quad (3.21)$$

Bevis. Det gäller att den momentgenererande funktionen för $S(t)$ är

$$\begin{aligned} M_{S(t)}(\tau) &= \mathbb{E}[e^{\tau S(t)}] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{\tau \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k} \mid N(t)\right]\right] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{\tau \xi}]^{N(t)}] \\ &= \mathbb{E}[M_\xi(\tau)^{N(t)}] = \mathbb{E}[e^{(\log M_\xi(\tau))N(t)}] = M_{N(t)}(\log M_\xi(\tau)). \end{aligned}$$

Den momentgenererande funktionen för Poissonfördelningen är känd, nämligen

$$M_{N(t)}(\tau) = \mathbb{E}[e^{\tau N(t)}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\tau k} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t e^\tau)^k}{k!} = e^{\lambda t(e^\tau - 1)}, \quad (3.22)$$

som existerar för alla $\tau \in \mathbb{R}$. Således är

$$M_{S(t)}(\tau) = \exp\{\lambda t(e^{\log M_\xi(\tau)} - 1)\} = \exp\{\lambda t(M_\xi(\tau) - 1)\}. \quad (3.23)$$

Detta ger oss den kumulatantgenererande funktionen

$$K_{S(t)}(\tau) = \lambda t(M_\xi(\tau) - 1). \quad (3.24)$$

Från (3.17), (3.18) och (3.24) finner vi slutligen att

$$\kappa_k = \frac{d^k}{d\tau^k} \lambda t(M_\xi(\tau) - 1) \Big|_{\tau=0} = \lambda t \frac{d^k}{d\tau^k} M_\xi(\tau) \Big|_{\tau=0} = \lambda t \mathbb{E}[\xi^k].$$

h. s. b.

Med hjälp av teorem 3.10 kan vi få en bredare teoretisk förståelse över $S(t)$:s fördelning. CRAMÉR förespråkade i [13, s. 168] nödvändigheten av att undersöka högre moment för fördelningen; något vi nu alltså kan givet vi känner till λ samt momenten för ξ . T. ex. är skevheten lika med

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S(t) - \mathbb{E}[S(t)]}{\sqrt{\text{Var}(S(t))}}\right)^3\right] = \frac{\mathbb{E}[(S(t) - \mathbb{E}[S(t)])^3]}{\sqrt{\text{Var}(S(t))}^3} = \frac{\kappa_3}{\sqrt{\kappa_2^3}} = \frac{\mathbb{E}[\xi^3]}{\sqrt{\lambda t \mathbb{E}[\xi^2]^3}}, \quad (3.25)$$

där formeln för $\kappa_3 = \kappa_3(X)$ följer av

$$\begin{aligned} \kappa_3 &= \frac{d^3}{d\tau^3} \log M_X(\tau) \Big|_{\tau=0} = [\dots] = M_X'''(0) - 3M_X''(0)M_X'(0) + 2M_X'(0)^3 \\ &= \mathbb{E}[X^3] - 3\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X] + 2\mathbb{E}[X]^3 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.3 Riskreserven

Låt det initiala kapitalet hos försäkringsbolaget vid tiden $t = 0$ betecknas med $u \geq 0$. Vi antager att bolaget får kontinuerliga och konstanta (*pro rata temporis*) premieinbetalningar $(1 + \theta)p_1$, där p_1 svarar mot den aktuaria premien intjänad vid $t = 1$ (CRAMÉR använde uttrycket *riskpremie* [8, ss. 7–8]), d. v. s. $p_1 := \lambda \mathbb{E}[\xi]$, och $\theta \geq 0$ är en säkerhetsmarginal. Under tidsperioden $\Delta t > 0$ är sålunda bolagets intäkter lika med $(1 + \theta)p_1 \Delta t$. Vi definierar försäkringsbolagets *riskreserv* vid tiden $t \geq 0$ som

$$U(t) := u + (1 + \theta)p_1 t - S(t), \quad (3.27)$$

där $S(t)$ är den kumulativa skadekostnaden som tidigare är definierad i (3.11). CRAMÉR prefererade att ansätta medelskadan som penningenheter, d. v. s. $\mathbb{E}[\xi] = 1$ och således fås det förenklade uttrycket

$$U(t) = u + (1 + \theta)\lambda t - S(t). \quad (3.28)$$

På liknande sätt genom att manipulera tidsenheten går det att erhålla

$$U(t) = u + (1 + \theta)t - S(t). \quad (3.29)$$

Detta var sedvanligt i tidig kollektiv riskteori, men (3.29) har i modern litteratur fallit ur bruk [2, s. 194]. Vidare för smidigare notation inför vi

$$p_k := \lambda \mathbb{E}[\xi^k]. \quad (3.30)$$

PROPOSITION 3.11. I Cramér–Lundberg-modellen gäller det för riskreserven $U(t)$ definierad i (3.27) att

$$\mathbb{E}[U(t)] = u + \theta p_1 t, \quad (3.31)$$

$$\text{Var}(U(t)) = p_2 t. \quad (3.32)$$

Bevis. Beviset följer omedelbart från proposition 3.7 med notationen i (3.30). Vi har

$$\mathbb{E}[U(t)] = u + (1 + \theta)p_1 t - \mathbb{E}[S(t)] = u + p_1 t + \theta p_1 t - p_1 t = u + \theta p_1 t$$

och

$$\text{Var}(U(t)) = \text{Var}(S(t)) = p_2 t.$$

h. s. b.

3.3.1 Kommentar om Cramérs notation

Notera att notationen i (3.27) aldrig brukades av CramÉR; det närmaste är (3.28) som (med några andra variabelnamn) användes i [17, s. 26]. I hans kändaste artikel inom ruenteori, *On the Mathematical Theory of Risk*, lät CramÉR [12, s. 68] beteckna riskreserven med⁵

$$x + \theta P + u. \quad (3.33)$$

Vi börjar med att observera att CramÉR lät bli att införa en symbol för hela uttrycket. Det finnes en viss familjaritet mellan (3.33) och (3.27) i form av θ och u som liksom tidigare svarar mot säkerhetsmarginalen respektive startkapitalet. Med x lät han beteckna den kumulativa skadekostnaden subtraherat från den intjänade aktuariella premien, d. v. s.

$$x = p_1 t - S(t) \quad (3.34)$$

som alltså har väntevärde lika med noll. Vidare satte han $\mathbb{E}[\xi] = 1$ sådant att $p_1 = \lambda$. Därefter införde CramÉR $P := p_1 t$ som den ackumulerade aktuariella premien som han använde som oberoende variabel istället för tiden t . Således svarar θP i (3.33) mot den förväntade ackumulerade vinsten för försäkringsbolaget. Detta är ett tämligen pikant val av oberoende variabel och återkommer inte heller i de flesta av CramÉRS senare artiklar i ämnet. Alternativt kan P ses som en linjärt transformerad tidsenhet sådan att $\mathbb{E}[N(1)] = 1$ och vi erhåller då (3.29).

Anledningen denna uppsats envisas med (3.27) istället för (3.33) är för att den förre är mer i linje med modern notation (jfr [38, s. 152]), är mer generell samt i författarens subjektiva bedömning mer förståelig.

3.3.2 Karakteristisk funktion

Vi ämnar uttrycka den karakteristiska funktionen (eller *adjunkten* om vi använder Cramérsk terminologi [12, s. 18]) för riskreserven $U(t)$. Till vår hjälp använder vi sannolikhetsgenererande funktioner och vi inleder med att definiera båda två nedan.

DEFINITION 3.12. Den *karakteristiska funktionen* av den stokastiska variabeln X är

$$\varphi_X(\tau) := \mathbb{E}[e^{i\tau X}].$$

DEFINITION 3.13. Den *sannolikhetsgenererande funktionen* av den stokastis-

⁵CramÉR använde egentligen λ istället för θ , men den senare användes här för att överensstäm-
ma med uppsatsens notation och för att ej förväxlas med intensiteten för skadeprocessen.

ka variabeln X som antager värden på de icke-negativa heltalen är

$$G_X(\tau) := \mathbb{E}[\tau^X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \tau^k. \quad (3.35)$$

CRAMÉR presenterade utan bevis i [17, s. 26] den karakteristiska funktionen för riskreserven som lika med⁶

$$\varphi_{U(t)}(\tau) = \exp \left\{ i\tau(u + \theta p_1 t) + \lambda t \int_0^{\infty} (e^{i\tau x} - 1 - i\tau x) dF_{\xi}(x) \right\}. \quad (3.36)$$

Vad uppsatsens författare emellertid gör gällande härvid, är att (3.36) måste anses såsom varande av en orimlig natur. Det argumenteras inledningsvis varför sådant är fallet för att sedan härleda ett korrekt uttryck. Som hjälp behöves den tredje kumulanten av $U(t)$ vilken listas nedan.

LEMMA 3.14. I Cramér–Lundberg-modellen gäller det för riskreserven $U(t)$ definierad i (3.27) att

$$\kappa_3 = -p_3 t. \quad (3.37)$$

Bevis. Vi finner från (3.26), proposition 3.11 och teorem 3.10 att

$$\begin{aligned} \kappa_3 &= \mathbb{E}[(U(t) - \mathbb{E}[U(t)])^3] = \mathbb{E}[(p_1 t - S(t))^3] \\ &= (p_1 t)^3 - 3(p_1 t)^2 \mathbb{E}[S(t)] + 3p_1 t \mathbb{E}[S(t)^2] - \mathbb{E}[S(t)^3] \\ &= (p_1 t)^3 - 3(p_1 t)^2(p_1 t) + 3p_1 t((p_1 t)^2 + p_2 t) - p_3 t - 3p_2 t p_1 t - (p_1 t)^3 \\ &= (p_1 t)^3 - 3(p_1 t)^3 + 3(p_1 t)^3 + 3p_1 p_2 t^2 - p_3 t - 3p_1 p_2 t^2 - (p_1 t)^3 \\ &= -p_3 t, \end{aligned}$$

där vi för $\kappa_k = \kappa_k(X)$ använt det kända resultatet

$$\mathbb{E}[X^3] = \kappa_3 + 3\kappa_2 \kappa_1 + \kappa_1^3. \quad (3.38)$$

h. s. b.

I analogi med (3.17) gäller det att om $\kappa_k = \kappa_k(X)$ existerar så är

$$\frac{1}{i^k} \cdot \frac{d^k}{d\tau^k} \log \varphi_X(\tau) \Big|_{\tau=0} = \kappa_k. \quad (3.39)$$

⁶Eftersom CRAMÉR använde (3.28) för att definiera riskreserven skriver vi om (3.36) för att vara förenlig med (3.27) som brukas i denna uppsats.

Således har vi för CRAMÉRS (3.36) att

$$\begin{aligned}\kappa_3 &= \frac{1}{i^3} \cdot \frac{d^3}{d\tau^3} \log \varphi_{U(t)}(\tau) \Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{1}{i^3} \cdot \frac{d^3}{d\tau^3} \left(i\tau(u + \theta p_1 t) + \lambda t \int_0^\infty (e^{i\tau x} - 1 - i\tau x) dF_\xi(x) \right) \Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{1}{i^3} \cdot \frac{d^2}{d\tau^2} \left(i(u + \theta p_1 t) + \lambda t \int_0^\infty (ixe^{i\tau x} - ix) dF_\xi(x) \right) \Big|_{\tau=0} \quad (3.40)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{i^3} \cdot \frac{d}{d\tau} \left(\lambda t \int_0^\infty (ix)^2 e^{i\tau x} dF_\xi(x) \right) \Big|_{\tau=0} \quad (3.41)$$

$$= \frac{1}{i^3} \cdot \lambda t \int_0^\infty (ix)^3 e^{i\tau x} dF_\xi(x) \Big|_{\tau=0}$$

$$= \lambda t \int_0^\infty x^3 dF_\xi(x)$$

$$= p_3 t \neq -p_3 t$$

som lemma 3.14 menar att vi skall erhålla. Följaktligen bär det sig inte bättre än att CRAMÉR agerade culpöst med sina beräkningar och angav en felaktig karakteristisk funktion. Från (3.40) och (3.41) ser vi (jfr beviset till teorem 3.16) att κ_1 respektive κ_2 för (3.36) överensstämmer med vad proposition 3.11 dikterar; vilket motiverar varför vi behövde undersöka den tredje kumulanten. Törhända ligger däruti även en förklaring till CRAMÉRS misstag.

Nu till den *korrekta* karakteristiska funktionen för riskreserven. Till att börja med finner vi

$$\begin{aligned}\varphi_{U(t)}(\tau) &= \mathbb{E}[e^{i\tau U(t)}] = \mathbb{E}[\exp\{i\tau(u + (1 + \theta)p_1 t - S(t))\}] \\ &= \exp\{i\tau(u + (1 + \theta)p_1 t)\} \cdot \mathbb{E}[\exp\{i(-\tau)S(t)\}] \\ &= \exp\{i\tau(u + (1 + \theta)p_1 t)\} \cdot \varphi_{S(t)}(-\tau).\end{aligned} \quad (3.42)$$

Det gäller att

$$\begin{aligned}\varphi_{S(t)}(\tau) &= \mathbb{E}[e^{i\tau S(t)}] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{i\tau \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k} \mid N(t)\right]\right] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{i\tau \xi}]^{N(t)}] \\ &= \mathbb{E}[\varphi_\xi(\tau)^{N(t)}] = G_{N(t)}(\varphi_\xi(\tau)).\end{aligned} \quad (3.43)$$

För en Poissonfördelning är den sannolikhetsgenererande funktionen lika med

$$G_{N(t)}(\tau) = \mathbb{E}[\tau^{N(t)}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \tau^k = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t \tau)^k}{k!} = e^{\lambda t(\tau-1)}. \quad (3.44)$$

Om vi kombinerar (3.42)–(3.44) resulterar det i

$$\begin{aligned}\varphi_{U(t)}(\tau) &= \exp\{i\tau(u + (1 + \theta)p_1 t) + \lambda t(\varphi_\xi(-\tau) - 1)\} \\ &= \exp\{i\tau(u + \theta p_1 t) + \lambda t(\varphi_\xi(-\tau) - 1 + i\tau \mathbb{E}[\xi])\} \\ &= \exp\left\{i\tau(u + \theta p_1 t) + \lambda t \int_0^\infty (e^{-i\tau x} - 1 + i\tau x) dF_\xi(x)\right\}.\end{aligned} \quad (3.45)$$

Observera skillnaden jämfört med (3.36) i form av felaktiga tecken i den inre exponenten och den sista termen i integranden. Att kunna korrigera ett sådant lapsus drygt ett halvtannat halvsekel senare får väl sägas vara ett bevis på att fortsatt kritisk granskning kan bära frukt – även när källan är så vördnadsbjudande som CRAMÉR. Vi avslutar det här avsnittet med att framhäva den sanna karakteristiska funktionen för $U(t)$ med ett teorem.

TEOREM 3.15. I Cramér–Lundberg-modellen gäller det för riskreserven $U(t)$ definierad i (3.27) att

$$\varphi_{U(t)}(\tau) = \exp \left\{ i\tau(u + \theta p_1 t) + \lambda t \int_0^\infty (e^{-i\tau x} - 1 + i\tau x) dF_\xi(x) \right\}. \quad (3.46)$$

3.3.3 Kumulanter

Utifrån det som förevisades i avsnitt 3.3.2 går det att härleda en motsvarighet till teorem 3.10 fast för riskreserven.

TEOREM 3.16. I Cramér–Lundberg-modellen gäller det för riskreserven $U(t)$ definierad i (3.27) för alla $k = 1, 2, 3, \dots$ att

$$\kappa_k = \begin{cases} u + \theta p_1 t & \text{om } k = 1, \\ (-1)^k p_k t & \text{om } k \geq 2. \end{cases} \quad (3.47)$$

Bevis. Vi har för den karakteristiska funktionen i teorem 3.15 att

$$\frac{d}{d\tau} \log \varphi_{U(t)}(\tau) = i(u + \theta p_1 t) + \lambda t \int_0^\infty (-ixe^{-i\tau x} + ix) dF_\xi(x)$$

och kan med induktion visa att för $k \geq 2$ så är

$$\frac{d^k}{d\tau^k} \log \varphi_{U(t)}(\tau) = (-i)^k \lambda t \int_0^\infty x^k e^{-i\tau x} dF_\xi(x).$$

Division med i^k samt ansättningen $\tau = 0$ resulterar i

$$\frac{1}{i^k} \cdot \frac{d}{d\tau} \log \varphi_{U(t)}(\tau) \Big|_{\tau=0} = u + \theta p_1 t$$

respektive

$$\frac{1}{i^k} \cdot \frac{d^k}{d\tau^k} \log \varphi_{U(t)}(\tau) \Big|_{\tau=0} = (-1)^k \lambda t \int_0^\infty x^k dF_\xi(x) = (-1)^k p_k t.$$

Ergo följer teoremet i fråga av (3.39).

h. s. b.

3.3.4 Gaussisk approximation

Från (3.27) och proposition 3.11 inför vi den normerade riskreserven vid tiden $t > 0$ som

$$\tilde{U}(t) := \frac{U(t) - u - \theta p_1 t}{\sqrt{p_2 t}} = \frac{p_1 t - S(t)}{\sqrt{p_2 t}}. \quad (3.48)$$

CRAMÉR lade fram i [17, s. 27] nedan lemma förutan bevis;⁷ något som vartefter tillförs här.

LEMMA 3.17. I Cramér–Lundberg-modellen gäller det för normerade riskreserven $\tilde{U}(t)$ definierad i (3.48) att den uppfyller limesrelationen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{\tilde{U}(t)}(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\tau^2}. \quad (3.49)$$

Bevis. Det följer från teorem 3.15 att

$$\varphi_{\tilde{U}(t)}(\tau) = \exp \left\{ \lambda t \int_0^\infty \left(e^{-\frac{i\tau}{\sqrt{p_2 t}}x} - 1 + \frac{i\tau}{\sqrt{p_2 t}}x \right) dF_\xi(x) \right\}. \quad (3.50)$$

Maclaurinutveckling av den inre exponenten ger

$$e^{-\frac{i\tau}{\sqrt{p_2 t}}x} = 1 - \frac{i\tau}{\sqrt{p_2 t}}x - \frac{\tau^2}{2p_2 t}x^2 + \mathcal{O}(t^{-\frac{3}{2}}x^3) \quad \text{då } t \rightarrow \infty.$$

Notera att $\mathcal{O}(t^{-\frac{3}{2}}x^3)$ är integrerbar med avseende på $F_\xi(x)$ till följd av antagande 3.6. Den karakteristiska funktionen (3.50) blir därför

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{U}(t)}(\tau) &= \exp \left\{ \lambda t \int_0^\infty \left(-\frac{\tau^2}{2p_2 t}x^2 + \mathcal{O}(t^{-\frac{3}{2}}x^3) \right) dF_\xi(x) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{1}{\mathbb{E}[\xi^2]} \int_0^\infty x^2 dF_\xi(x) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}}) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{2} + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Slutligen med återopande av definitionen av stora ordo så slutleder vi

$$\varphi_{\tilde{U}(t)}(\tau) \rightarrow e^{-\frac{1}{2}\tau^2} \quad \text{då } t \rightarrow \infty.$$

h. s. b.

Gränsfunktionen i (3.49) svarar mot den välbekanta *Gaussiska* eller *normala* av standardtyp. Detta överensstämmer med vad som torde förväntas med hänvisning till det centrala gränsvärdesteoremet. Vad vi tydligen finner är att efter en lång tid kan vi approximera riskreserven med en Gaussisk fördelning. För att vara mer exakt kan följande resultat medelst några intermediära sannolikhetssteoremer visas.

⁷CRAMÉR beskrev lemmat helt sonika som ”låter det lätt visa sig”.

TEOREM 3.18. I Cramér–Lundberg-modellen gäller det för riskreserven $U(t)$ definierad i (3.27) att den för stort $t > 0$ är approximativt Gaussiskt fördelat med väntevärde och varians givna av proposition 3.11. Mer specifikt är^a

$$F_{U(t)}(x) \sim \Phi\left(\frac{x - u - \theta p_1 t}{\sqrt{p_2 t}}\right), \quad (3.52)$$

där

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau. \quad (3.53)$$

^aFör funktionerna $f(t)$ och $g(t)$ innebär $f(t) \sim g(t)$ att $f(t)/g(t) \rightarrow 1$ då $t \rightarrow \infty$.

Betyder teorem 3.18 att vi nu vet allt om riskreserven och enbart behöver beakta den Gaussiska fördelningen? Givetvis inte. I samband med att CRAMÉR dryftade samtida assurancesmatematisk forskning – som var särskilt fixerad kring nämnda approximation⁸ – skrev han i [12, s. 13, egen övers.]:

”I den här artikeln kommer det att hävdas att approximationen som erhålles genom att använda den normala funktionen i många fall inte är tillräckligt bra för att rättfärdiga de slutsatser som har dragits på detta sätt.”

Men å andra sidan ansåg CRAMÉR att den Gaussiska approximationen ej skall förkastas helt och skrev i [13, s. 167, egen övers.]:

”Personligen är jag benägen att anse att frågan om den approximation som den normala lagen tillhandahåller är en punkt av grundläggande betydelse.”

En förklaring till varför den Gaussiska approximationen brister torde synas i (3.51). Vi ser nämligen där hur konvergensen mot den sanna fördelningen sker med intensiteten $t^{-\frac{1}{2}}$. Detta är tämligen sakteligt och innebär att t måste vara Broddingnagiskt innan vi komfortabelt må tillämpa teorem 3.18.

3.3.5 Martingaler

DEFINITION 3.19. Den stokastiska processen $\{Y(t) : t \geq 0\}$ säges vara en *martingal* i kontinuerlig tid med avseende på den stokastiska processen $\{X(t) : t \geq 0\}$ om för alla $t \geq 0$ följande gäller.

i) $\mathbb{E}[Y(t)] < \infty$.

ii) $\mathbb{E}[Y(t) \mid \{X(\tau) : \tau \in [0, s]\}] = Y(s)$ n. s., för alla $s < t$.

⁸Allt är normalfördelat om man tror på det tillräckligt” för att självitera författaren.

Om likheten i *ii*) ersättes med $\geq$ kallar vi det för en *submartingal* och om den ersättes med $\leq$ för en *supermartingal*.

Martingaler har många angenäma egenskaper och tack vare teoremet som härnäst skall beskrivas kan vi applicera dem på riskreserven i försäkringsbolaget.

TEOREM 3.20. I Cramér–Lundberg-modellen gäller det för riskreserven $U(t)$ definierad i (3.27) att den är en submartingal med avseende på filtreringen genererad av sig själv. Om riskreserven saknar en säkerhetsmarginal, d. v. s. $\theta = 0$, är $U(t)$ en martingal.

Bevis. Vi börjar med att observera att för givet $t \geq 0$ så är

$$\mathbb{E}[|U(t)|] \leq u + (1 + \theta)p_1t + \mathbb{E}[|S(t)|] = u + (2 + \theta)p_1t < \infty,$$

där vi för första olikheten använt oss av triangelolikheten samt

$$\mathbb{E}[|S(t)|] = \mathbb{E}[S(t)] = p_1t.$$

Därmed är *i*) i definition 3.19 uppfyllt. Vidare har vi från antaganden 3.1–3.3 för alla $s < t$ att

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U(t) \mid \{U(\tau) : \tau \in [0, s]\}] &= u + (1 + \theta)p_1t - \mathbb{E}[S(t) \mid \{U(\tau) : \tau \in [0, s]\}] \\ &= u + (1 + \theta)p_1t - S(s) - \mathbb{E}[S(s, t) \mid \{U(\tau) : \tau \in [0, s]\}] \\ &= u + (1 + \theta)p_1t - S(s) - \mathbb{E}[S(s, t)] \\ &= u + (1 + \theta)p_1t - S(s) - \mathbb{E}[S(t - s)] \\ &= u + (1 + \theta)p_1t - S(s) - p_1(t - s) \\ &= u + (1 + \theta)p_1s - S(s) + (t - s)\theta p_1 \\ &= U(s) + (t - s)\theta p_1 \\ &\geq U(s) \text{ n. s.} \end{aligned}$$

Observera att olikheten i det sista steget är en likhet när $\theta = 0$. Således har vi visat *ii*) i definition 3.19 och teoremet. h. s. b.

Vi kan nu applicera Doob–Meyers dekompositionsteorem på teorem 3.20 genom att dela upp riskreserven som summan av en martingal med noll i väntevärde, $p_1t - S(t)$, samt en icke-avtagande predikterbar process, $u + \theta p_1t$. Denna uppdelning var något som användes av CRAMÉR i [12, s. 68] (jfr x och $\theta P + u$ i (3.33)) och illustreras i denna uppsats i figur 3.1 nedan. (Observera att varken teorin om martingaler eller det aktuella dekompositionsteoremet fanns till kännedom vid publikationen av CRAMÉRS artikel år 1930.)

3.4 Ruin

Vi introducerar nu det mest centrala begreppet i ruiniteori, nämligen *ruin*. Ruin innebär att försäkringsbolaget upptagar en negativ riskreserv under en viss tid. För vilka tidpunkter som är intressanta och om bolaget kan återhämta sig efter en eventuell negativ riskreserv föreligger det olika definitioner vi kan använda oss av. CRAMÉR presenterade i [12, s. 12] tre former av ruin som torde vara av intresse. Vi samlar de i följande definition där det även förses en tillhörande matematisk notation.

DEFINITION 3.21. I Cramér–Lundberg-modellen med riskreserven $U(t)$ definierad i (3.27) och perioden $\mathcal{T} \subseteq [0, \infty)$ har vi följande tre definitioner av *ruin*.

A. Ruin sker vid slutet av perioden $\mathcal{T}$:

$$\text{Ruin} := \{U(\sup_{t \in \mathcal{T}} \{t\}) < 0\}. \quad (3.54)$$

B. Ruin sker någon gång under perioden $\mathcal{T}$:

$$\text{Ruin} := \{\inf_{t \in \mathcal{T}} \{U(t)\} < 0\}. \quad (3.55)$$

C. Ruin sker vid slutet av en räkenskapsperiod under perioden $\mathcal{T}$:

$$\text{Ruin} := \{\inf_{t \in \mathcal{R}} \{U(t)\} < 0\}, \quad (3.56)$$

där $\mathcal{R} = \{t_1, t_2, \dots\} \subset \mathcal{T}$.

CRAMÉR menade att i praktiken är C den viktigaste men samtidigt den svåraste att modellera. Fast genom att variera övre gränsen i $\mathcal{T}$ är det möjligt att erhålla en approximation på C med hjälp av A . Fördelen med Cramér–Lundberg-modellen är att det är relativt smidigt att modellera B vilket med individuell riskteori är närmast omöjligt. Notera att i A och C kan riskreserven vara negativ i $\mathcal{T}$ utan att försäkringsbolaget nödvändigtvis hamnar i ruin vilket ej är fallet för B . Observera även att vi för B och C ej bryr oss om ruin inträffar flera gånger, utan enbart *om* det inträffar. I denna uppsats fokuserar vi emellertid främst på B och (3.55) där $\mathcal{T} = [0, \infty)$, d. v. s. ”inträffar $\{U(t) < 0\}$ för något $t \geq 0$?” För detta upplägg går det att härleda ett flertal intressanta resultat med hjälp av Cramér–Lundberg-modellen [12, s. 69].

Vi introducerar vidare följande begrepp kopplade till ruin.

DEFINITION 3.22. I Cramér–Lundberg-modellen med ruin definierad i definition 3.21.B har vi (första) *tiden för ruin* $T \in \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ i $\mathcal{T}$ som

$$T := \inf\{t \in \mathcal{T} : U(t) < 0\}. \quad (3.57)$$

Om $T = \inf \emptyset$ observeras ingen ruin i $\mathcal{T}$ och vi sätter $T = \infty$.

DEFINITION 3.23. I Cramér–Lundberg-modellen med ruin definierad i definition 3.21.B och tiden för ruin T definierad i definition 3.22 har vi *ruin-sannolikheten* för initialkapitalet $u \geq 0$ som

$$\psi(u) := \mathbb{P}(\text{Ruin} \mid U(0) = u) = \mathbb{P}(T \in \mathcal{T}). \quad (3.58)$$

Vi illustrerar i figur 3.1 hur $U(t)$ kan utvecklas med tiden. Till höger i figuren har vi illustrerat samma slumpvandring men i stil med CRAMÉRS [12, fig. 8] där han utnyttjade

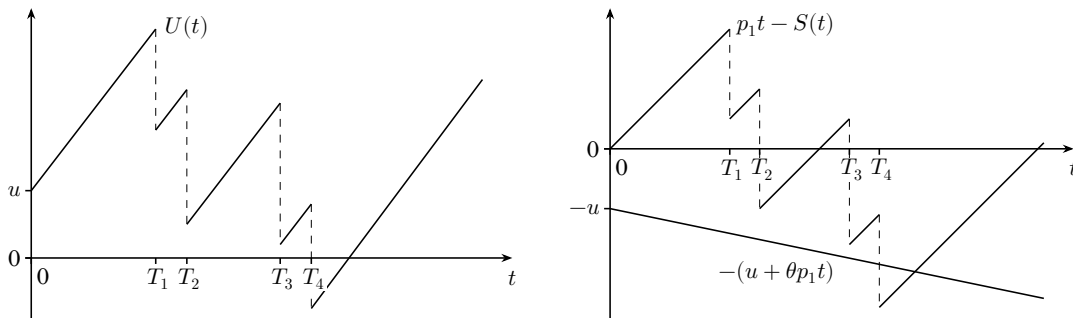
$$\{U(t) < 0\} = \{p_1 t - S(t) < -(u + \theta p_1 t)\}. \quad (3.59)$$

Vid $t = 0$ följer per definition att $U(0) = u$. Sedan ökar tillgångarna linjärt med takten $(1+\theta)p_1 t$ fram tills den första skadan som sker vid $t = T_1$. Slumpvandringen pågår sedan tills $t = T_4 = T$ där $U(t) < 0$ och försäkringsbolaget hamnar i ruin. Notera att $U(t)$ är strikt växande mellan stegen och sålunda kan ruin enbart ske då $t \in (T_k)_{k \geq 1}$. Vidare har $U(t)$ càdlàg-stigar där för alla ankomsttider T_k så är

$$\lim_{t \downarrow T_k} U(t) = U(T_k), \quad (3.60)$$

$$\lim_{t \uparrow T_k} U(t) = U(T_k) + \xi_k; \quad (3.61)$$

och eljest är $U(t)$ kontinuerlig.



FIGUR 3.1. Exempel på en slumpvandring för riskreserven $U(t)$ med $\theta = 0.2$ som slutar i ruin vid $t = T_4$. T. v. illustreras ruin av $\{U(t) < 0\}$ medan t. h. göres en Cramérsk uppdelning av $U(t)$ där ruin synes av $\{p_1 t - S(t) < -(u + \theta p_1 t)\}$.

3.4.1 Nettovinstvillkoret

Nödvändigheten av säkerhetsmarginalen $\theta \geq 0$ i (3.27) och sålunda varför den totala premien ej hållbart kan vara lägre än den aktuariella premien är inget CRAMÉR

rigoröst motiverade. Det torde kanske vara uppenbart, men vi väljer ändå att inkludera en djupare motivering inspirerad av Mikosch [38, ss. 154–156].

Vi introducerar tiden mellan skadorna ξ_{k-1} och ξ_k som

$$W_k := \begin{cases} T_1 & \text{om } k = 1, \\ T_k - T_{k-1} & \text{om } k \geq 2. \end{cases} \quad (3.62)$$

Från definition 3.4 om homogena Poissonprocesser följer det av celebret resultat att alla element i $(W_k)_{k \geq 1}$ är oberoende och likafördelade med W som är exponentielfördelad med intensiteten $\lambda > 0$. D. v. s. för $x \geq 0$ är

$$F_W(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (3.63)$$

och eljest $F_W(x) = 0$; samt

$$\mathbb{E}[W] = \frac{1}{\lambda}, \quad (3.64)$$

$$\text{Var}(W) = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (3.65)$$

Vi kan således uttrycka den aktuariatiska premien som

$$p_1 = \lambda \mathbb{E}[\xi] = \frac{\mathbb{E}[\xi]}{\mathbb{E}[W]}. \quad (3.66)$$

Antag att försäkringsbolaget drabbas av ruin vid tiden $t = T_n$ för något $n \geq 1$. Vi kan då omformulera (3.55) där $\mathcal{T} = [0, \infty)$ som

$$\text{Ruin} = \{\inf_{t \geq 0} \{U(t)\} < 0\} = \{\inf_{n \geq 1} \{U(T_n)\} < 0\}.$$

Notera att $T_n = \sum_{k=1}^n W_k$. Därav finner vi

$$\begin{aligned} \text{Ruin} &= \{\inf_{n \geq 1} \{u + (1 + \theta)p_1 T_n - S(T_n)\} < 0\} \\ &= \left\{ \inf_{n \geq 1} \left\{ -\sum_{k=1}^n (\xi_k - (1 + \theta)p_1 W_k) \right\} < -u \right\} \\ &= \left\{ \sup_{n \geq 1} \left\{ \sum_{k=1}^n (\xi_k - (1 + \theta)p_1 W_k) \right\} > u \right\}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Således kan ruin ses som en slumpvandring med stegstorleken $\xi_k - (1 + \theta)p_1 W_k$ som någon gång överstiger u . Från stora talens lag gäller det att om $\theta \geq 0$ så är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - (1 + \theta)p_1 W_k) = \mathbb{E}[\xi] - (1 + \theta) \frac{\mathbb{E}[\xi]}{\mathbb{E}[W]} \mathbb{E}[W] = -\theta \mathbb{E}[\xi] \leq 0 \quad \text{n. s.}, \quad (3.68)$$

där vi använt oss av (3.64) och (3.66) som båda är ändliga. Vi ser nu nödvändigheten i vårt krav $\theta \geq 0$, ty annars skulle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\xi_k - (1 + \theta)p_1 W_k) = \infty \quad \text{n. s.}$$

och således från (3.67) är ruin oundvikligt, d. v. s. $\psi(u) \equiv 1$. En simpel heuristisk motivering till detta resultat är att observera högra diagrammet i figur 3.1. Är $\theta < 0$ följer det att den linjära grafen är strikt växande, medan $p_1 t - S(t)$ är centrerad kring noll. De två graferna är därmed garanterade att korsa varandra (d. v. s. ruin inträffar) oavsett värde på u . Denna inskränkning där vi utesluter det degenererade fallet $\theta < 0$ är känt som *nettovinstvillkoret* och är ett nödvändigt antagande för kommande resultat i detta kapitel.

3.4.2 Cramér–Lundberg-olikheten

Följande teorem som ger oss en övre gräns på ruinsannolikheten introducerades av Lundberg, emellertid utan fullständigt bevis. CRAMÉR var den första att rigoröst utföra ett sådant i [10, ss. 235–242]. CRAMÉRS bevis involverar bl. a. partiella differentialekvationer och är tämligen intrikat. Beviset som följer nedan är istället inspirerat av Mikosch [38, ss. 159–160].

TEOREM 3.24. I Cramér–Lundberg-modellen gäller det för ruinsannolikheten $\psi(u)$ definierad i definition 3.23 att

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad (3.69)$$

där R är *utjämningskoefficienten* definierad som den unika positiva lösningen (givet en sådan existerar) till ekvationen

$$M_{\xi-(1+\theta)p_1 W}(R) = 1. \quad (3.70)$$

Bevis. Vi börjar med att för $n \geq 1$ introducera

$$S_n := \sum_{k=1}^n (\xi_k - (1+\theta)p_1 W_k) \quad (3.71)$$

(ej att förväxla med den kumulativa skadekostnaden $S(t)$) samt

$$\psi_n(u) := \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq \ell \leq n} \{S_\ell\} > u\right). \quad (3.72)$$

Det gäller för alla $u \geq 0$ att $\psi_n(u) \uparrow \psi(u)$ då $n \rightarrow \infty$ (jfr (3.67)). Således räcker det att bevisa den eftertraktade olikheten med $\psi_n(u)$ i vänsterledet för alla $n \geq 1$ vilket vi gör med hjälp av induktion. Basfallet följer av Markovs olikhet och definitionen av utjämningsfaktorn (observera att $M_{S_1}(R) = M_{\xi-(1+\theta)p_1 W}(R) := 1$);

$$\psi_1(u) = \mathbb{P}(S_1 > u) = \mathbb{P}(e^{RS_1} > e^{Ru}) \leq e^{-Ru} \mathbb{E}[e^{RS_1}] = e^{-Ru} M_{S_1}(R) = e^{-Ru}.$$

Antag nu att $\psi_k(u) \leq e^{-Ru}$ för något $k \geq 1$. Det följer från lagen om total sannolikhet att

$$\psi_{k+1}(u) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq \ell \leq k+1} \{S_\ell\} > u\right) = \mathbb{P}(S_1 > u) + \mathbb{P}\left(\max_{2 \leq \ell \leq k+1} \{S_\ell\} > u, S_1 \leq u\right). \quad (3.73)$$

Vi finner för den andra termen att

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{2 \leq \ell \leq k+1} \{S_\ell\} > u, S_1 \leq u\right) &= \mathbb{P}\left(\max_{2 \leq \ell \leq k+1} \{S_1 + (S_\ell - S_1)\} > u, S_1 \leq u\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq \ell \leq k} \{S_\ell\} > u - S_1, S_1 \leq u\right) \\
&= \int_{-\infty}^u \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq \ell \leq k} \{S_\ell\} > u - x\right) dF_{S_1}(x) \\
&= \int_{-\infty}^u \psi_k(u - x) dF_{S_1}(x) \\
&\leq \int_{-\infty}^u e^{R(x-u)} dF_{S_1}(x),
\end{aligned}$$

som följer av induktionsantagandet. Då $e^{R(x-u)} \geq 1$ när $x \geq u$ gäller det för den första termen i (3.73) att

$$\mathbb{P}(S_1 > u) = \int_u^\infty dF_{S_1}(x) \leq \int_u^\infty e^{R(x-u)} dF_{S_1}(x).$$

Således är (3.73) övre begränsat av

$$\begin{aligned}
\psi_{k+1}(u) &\leq \int_u^\infty e^{R(x-u)} dF_{S_1}(x) + \int_{-\infty}^u e^{R(x-u)} dF_{S_1}(x) \\
&= e^{-Ru} \int_{-\infty}^\infty e^{Rx} dF_{S_1}(x) = e^{-Ru} M_{S_1}(R) = e^{-Ru},
\end{aligned}$$

vilket var det som var menat att demonstreras. Sålunda med hänvisning till induktionsprincipen och motiveringen ovan, är $\psi(u) \leq e^{-Ru}$ för alla $u \geq 0$ och vi är på mammas gata. h. s. b.

3.4.3 Cramérs ruingräns

Mikosch [38, s. 162] beskrev följande teorem, känt som *Cramérs ruingräns*, som ”ett av de viktigaste resultaten inom riskteori”. Teoremet som ger ett asymptotiskt beteende för riskreserven, presenterades liksom teorem 3.23 först av Lundberg och bevisades sedermera av CRAMÉR i [12, ss. 77–80]. Notera att vi härför antager att tätheten $f_\xi(x)$ existerar vilket ej gjorts tidigare (se avsnitt 3.1.3).

TEOREM 3.25. I Cramér–Lundberg-modellen med utjämningsfaktorn $R > 0$ (som vi antager existerar och löser (3.70)) och där ξ har en täthet, gäller det för ruinsannolikheten $\psi(u)$ definierad i definition 3.23 att för stort $u \geq 0$ är

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru}, \quad (3.74)$$

där

$$C = \left(\frac{R}{\theta \mathbb{E}[\xi]} \int_0^\infty x e^{Rx} \bar{F}_\xi(x) dx \right)^{-1}. \quad (3.75)$$

Beviset av ifrågavarande teorem beskrivs av Mikosch som ”tämigen tekniskt” och utelämnas i denna uppsats. Läsaren refereras istället till [38, ss. 162–167] av vederbörande eller allra främst ursprungskällan av CRAMÉR. Kortfattat löste CRAMÉR det genom att först visa att $\psi(u)$ satisfierar Volterras integralekvation sådan att

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{(1+\theta)p_1} \left(\int_0^u \psi(u-x) \bar{F}_\xi(x) dx + \int_u^\infty \bar{F}_\xi(x) dx \right). \quad (3.76)$$

Därefter använde han resultat av P. G. Lejeune Dirichlet och baron A.-L. Cauchy inom komplexanalysen för att härleda nämnda asymptotiska resultatet. Mikosch å andra sidan håller sitt bevis inom den reella analysen och förlitar sig främst på förnyelsesteori för att erhålla samma slutsats.

3.5 Exponentialfördelade skadekostnader

I detta avsnitt undersöker riskreserven och ruinsannolikheten när skadekostnaderna antagas vara exponentialfördelade (när detta är ett rimligt antagande låter vi i denna uppsats vara osagt). Den bakomliggande intensiteten betecknas med $\gamma > 0$ sådan att för $x \geq 0$ så är

$$F_\xi(x) = 1 - e^{-\gamma x} \quad (3.77)$$

och eljest $F_\xi(x) = 0$. Vi erhåller då från teorem 3.15 (eller enklare av (3.45)) den karakteristiska funktionen

$$\varphi_{U(t)}(\tau) = \exp \left\{ i\tau \left(u + \lambda t \left(\frac{1+\theta}{\gamma} - \frac{1}{\gamma + i\tau} \right) \right) \right\}, \quad (3.78)$$

där vi använt oss av $p_1 = \frac{\lambda}{\gamma}$ samt det kända resultatet för exponentialfördelningen

$$\varphi_\xi(\tau) = \int_0^\infty e^{i\tau x} \gamma e^{-\gamma x} dx = \frac{\gamma}{\gamma - i\tau} \int_0^\infty (\gamma - i\tau) e^{-(\gamma - i\tau)x} dx = \frac{\gamma}{\gamma - i\tau}. \quad (3.79)$$

Analogt fås den momentgenererande funktionen till

$$M_\xi(\tau) = \frac{\gamma}{\gamma - \tau}, \quad (3.80)$$

som är definierad för $\tau < \gamma$. Vi har då en explicit lösning till (3.70);

$$M_{\xi-(1+\theta)p_1 W}(R) = M_\xi(R) \cdot M_W(-(1+\theta)p_1 R) = \frac{\gamma}{\gamma - R} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + (1+\theta)p_1 R} = 1,$$

som följer av antagandet om oberoende och förenklas till

$$R = \gamma \frac{\theta}{1 + \theta}. \quad (3.81)$$

Enligt teorem 3.24 är alltså ruinsannolikheten uppåt begränsad av

$$\psi(u) \leq \exp \left\{ -\gamma \frac{\theta}{1 + \theta} \cdot u \right\}. \quad (3.82)$$

Vidare erhåller vi från teorem 3.25 för stort $u \geq 0$ att

$$\psi(u) \sim C \exp \left\{ -\gamma \frac{\theta}{1 + \theta} \cdot u \right\}, \quad (3.83)$$

där

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{R}{\theta \mathbb{E}[\xi]} \int_0^\infty x e^{Rx} \bar{F}_\xi(x) dx \right)^{-1} = \left(\frac{\gamma R}{\theta} \int_0^\infty x e^{Rx} e^{-\gamma x} dx \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\gamma R}{(\gamma - R)\theta} \int_0^\infty x (\gamma - R) e^{-(\gamma - R)x} dx \right)^{-1} = \frac{(\gamma - R)^2 \theta}{\gamma R} = \frac{1}{1 + \theta}. \end{aligned}$$

(För den näst sista likheten använde vi att integralen är lika med väntevärdet av en exponentialfördelning med intensiteten $\gamma - R$.)

I den återstående delen av detta avsnitt undersöker det hur väl empirin överensstämmer med de teoretiska resultaten. Utan förlust av generalitet låter vi $\lambda = \gamma = 1$ sådan att $\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}[S(t)] = t$ samt $R = \theta/(1 + \theta)$. Vi utför simuleringar och skattar ruinsannolikheten med

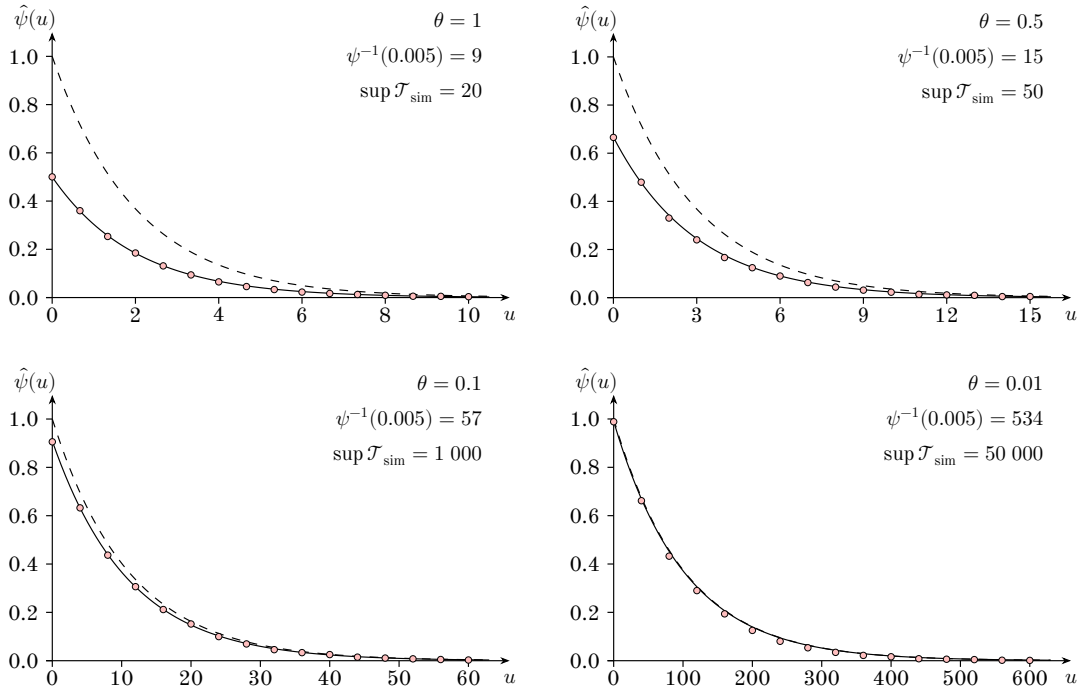
$$\hat{\psi}(u) := \frac{1}{n_{\text{sim}}} \sum_{k=1}^{n_{\text{sim}}} \mathbb{1}_{\text{Ruin}_k}, \quad (3.84)$$

där Ruin_k innebär att den k :te simuleringen hamnade i ruin under perioden $\mathcal{T}_{\text{sim}}$ och $n_{\text{sim}} = 10\,000$ är antalet simuleringar. I figur 3.2 synes $\hat{\psi}(u)$ jämfört med högerleden i (3.82) och (3.83) för olika säkerhetsmarginaler $\theta \in \{1, 0.5, 0.1, 0.01\}$ när $u \rightarrow \infty$. I figuren erhålles även (heltals) u -värdet nödvändigt för $\psi(u) = 0.005$ (med $\psi(u)$ given av (3.86), d. v. s.

$$u = \psi^{-1}(0.005) = -\frac{1 + \theta}{\theta} \log(0.005(1 + \theta)). \quad (3.85)$$

Valet av denna gräns följer av Europeiska unionens Solvens II-direktiv,⁹ men torde tagas *cum grano salis* och ej ses som en universell lösning för ett försäkringsbolag som vill undvika insolvens. Notera även att $\mathcal{T}_{\text{sim}} \subset \mathcal{T} = [0, \infty)$ och anledningen till detta är förstås att det är omöjligt att göra en oändligt lång simulering. Däremot väljes $\sup \mathcal{T}_{\text{sim}}$ sådan att sannolikheten för ruin efter denna tid är försumbar; så den ändliga tidshorisonten torde ej påverka resultatet.

⁹Jfr 8 kap. 1 § försäkringsrörelselagen (2010:2043).



FIGUR 3.2. Empirisk ruinsannolikhet $\hat{\psi}(u)$ jämfört med teorem 3.24 (streckad) och 3.25 (heldragen) för olika säkerhetsmarginaler θ när skadekostnaderna är exponentialfördelade med intensiteten $\gamma = 1$.

Somliga observationer av figur 3.2: När säkerhetsmarginalen $\theta \downarrow 0$ närmar sig kurvan från teorem 3.25 den övre gränsen från teorem 3.24. Detta är förstås väntat då C i (3.83) konvergerar mot 1 samtidigt. Vi finner också en kraftig ökning i nödvändigt initialkapital $u = \psi^{-1}(0.005)$ när $\theta \downarrow 0$. För $\theta = 0.01$ jämfört med $\theta = 1$ kräves drygt 60 gånger större kapital för samma trygghet. Vi ser även en väldig ökning i nödvändig storlek på $\sup \mathcal{T}_{\text{sim}}$ för samma förändring av θ . Särskild avsevärd var $\theta = 0.01$ som tog inemot 10 dygn (235 timmar) för att simulera värdena i figuren. (Notera hur punkterna ligger strax under den teoretiska linjen vilket indikerar att ännu bredare tidsintervall och således fler simuleringar behöves för fullständig konvergens.)

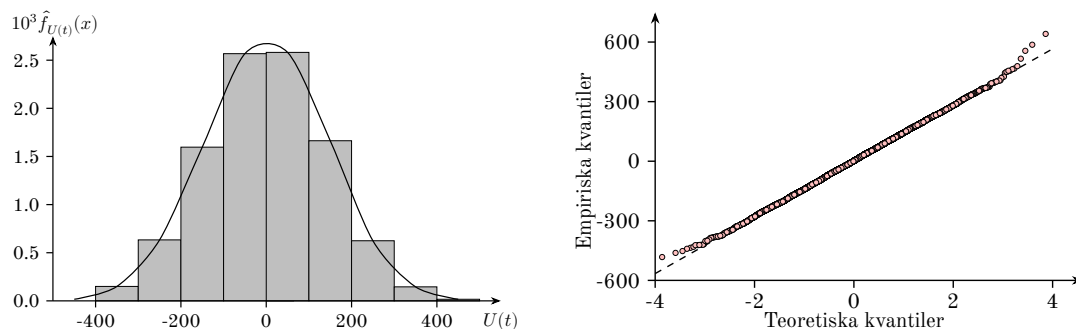
Slutligen den mest centrala iakttagelsen från figur 3.2; de empiriska skattningarna ger en nästintill perfekt anpassning till teorem 3.24 (eventuella avvikelser försvinner när $n_{\text{sim}} \rightarrow \infty$). Detta kan ses som tämligen oväntat ty teoremet beskriver en limesrelation, men resultat är detsamma för alla värden på u . Det är tydligen så att för exponentialfördelade skadekostnader så är ruinsannolikheten *exakt*, d. v. s.

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp \left\{ -\gamma \frac{\theta}{1+\theta} \cdot u \right\}, \quad (3.86)$$

något som bevisades av CRAMÉR i [12, s. 81] med utgång från (3.76).

Vi avslutar detta kapitel om ruinteori med att empiriskt visa teorem 3.18 för exponentialfördelade skadekostnader; riskreserven är approximativt Gaussiskt för-

delat efter en lång tid. Liksom förut låter vi $\lambda = \gamma = 1$. Vidare antar vi att $u, \theta = 0$ sådana att $\mathbb{E}[U(t)] \equiv 0$ samt $\text{Var}(U(t)) = 2t$. Vi presenterar resultatet från 10 000 simuleringar i figur 3.3 vid tidpunkten $t = 10\,000$. Som förväntat överensstämmer även här empirin med teorin. Men teoremet ger som sagt blott en approximation för ändliga t vilket synes av några uteliggare i Q–Q-diagrammet.



FIGUR 3.3. Empirisk täthet $\hat{f}_{U(t)}(x)$ och Gaussiskt Q–Q-diagram för riskreserven $U(t)$ med $\mathbb{E}[U(t)] \equiv 0$ och $\text{Var}(U(t)) = 2t$ vid tiden $t = 10\,000$ när skadekostnaderna är exponentialfördelade med intensiteten $\gamma = 1$.

Kapitel 4

Nollpunktsmetoden

En livförsäkring kan enkelt indelas i två scenarion. I det första är försäkringsbolagets utbetalningar kopplade till att den försäkrade är vid liv medan den andra sammanfaller med den försäkrades död. För att erhålla en konservativ skattning på premien som skall finansiera utbetalningarna är det därför fördelaktigt att för försäkringar som är beroende av att den försäkrade är vid liv antaga låg dödlighet och hög dödlighet där utbetalningar göres vid dödsfallet. Men livförsäkringar kan vara mer komplicerade än så och innefatta båda scenarion samt involvera flera liv. Detta medför frågor för vilket dödlighetsantagande som skall användas och när. I detta kapitel undersökes en teknik uppfunnen av CRAMÉR för att lösa detta problem; *nollpunktsmetoden*.

4.1 Olika former av livförsäkringar

Inom livförsäkring finnes det två huvudgrenar. Den första är *livsfallsförsäkring* och kan enklast tänkas som en pension. Den försäkrade gör under en förutbestämd period premieinbetalningar och erhåller (om han lever) utbetalningar från z års ålder under en viss period eller livet ut. Detta ställes emot *dödsfallsförsäkring* där den försäkrade inbetalar premier och det utbetalas ersättning efter hans död till exempelvis hans hustru och minderåriga barn som var beroende av hans försörjning. Det är även möjligt med försäkringar som är en kombination av de två. Exempelvis kan en *assuranspolis* (försäkringsbrev) ge ersättning till en man från det att han fyller z år, dör han innan dess får hans hustru istället pengar.

4.2 Premiereserv

Låt $V(t)$ beteckna *premiereserven* för en godtycklig försäkring vid tiden $t \geq 0$ efter inträdet. Hultman [32, s. 87] definierade premiereserven som ”nuvärdet av bolagets framtida förpliktelser minus nuvärdet av den försäkrades framtida förpliktelser.” Bolagets förpliktelser innefattar här för att göra utbetalningar till den försäkrade, medan den försäkrade är förpliktad att göra premieinbetalningar. En ordentligare matematisk definition av premiereserven gavs av S. Asmussen och M.

Steffensen [1, s. 125] och lyder

$$V(t) := \mathbb{E} \left[\int_t^\infty e^{-\int_t^s r(\tau) d\tau} dB(s) \mid \mathcal{F}_t \right], \quad (4.1)$$

där $r(t)$ är en deterministisk räntefunktion, $B(t)$ en stokastisk variabel svarandes mot samtliga utbetalningar subtraherat med inbetalade premier som göres under perioden $[0, t]$ och $\mathcal{F}_t$ beskriver historiken fram till t . Givet en aktuariell premie är $\mathbb{E}[B(t)] \equiv 0$ och det finnes omedelbart innan försäkringens inträde ($t = 0-$) att

$$V(0-) = 0. \quad (4.2)$$

För fallet där hela (aktuariella) premien inbetalas i form av en klumpsumma π vid $t = 0$ har den försäkrade inga fler förpliktelser dädanefter och det gäller att

$$V(0) = \pi. \quad (4.3)$$

I en livsfallsförsäkring där den försäkrade förväntas leva längre än väntat eller i en dödsfallsförsäkring där den försäkrade väntas avlida tidigare än väntat, gäller det för en kontinuerligt inbetalad (aktuariell) premie att $V(t) > 0$. Bolaget kan då ej täcka sin fordran enbart med hjälp av premien utan behöver nyttja andra tillgångar. Fallet $V(t) < 0$ innebär att den försäkrade har en nettoförpliktelse mot bolaget och skulle exempelvis kunna uppstå för en dödsfallsförsäkring där det efter inträdet sker en oväntad minskning av dödligheten. En teknisk term för premiereserv som användes inom försäkringsredovisning är *avsättning för ej intjänade premier*.

4.3 Risksumma

Vi introducerar den så kallade *risksumman* för en försäkrad som

$$R(t) := D(t) - V(t), \quad (4.4)$$

där $D(t)$ svarar mot *dödsförmånen* eller ”premiereserven omedelbart efter ifrågavarande persons dödsfall, därest detta inträffar vid tiden t , innan ännu någon utbetalning skett efter dödsfallet” [16, s. 17]. Sålunda kan risksumman tolkas som det belopp bolaget skall tillskjuta utöver premiereserven om ett dödsfall inträffar. Notera att för en ren livsfallsförsäkring är $D(t) \equiv 0$, ty ingen part har några förpliktelser efter dödsfallet, så risksumman blir i detta fall blott

$$R(t) = -V(t). \quad (4.5)$$

Är $R(t) > 0$ föranleder dödsfallet tydligen en utgift för bolaget och försäkringen har vid detta tillfälle karaktären av en dödsfallsförsäkring (*dödsfallskaraktär*). I fallet då $R(t) < 0$ innebär dödsfallet en inkomst för bolaget vilket karaktäriserar en livsfallsförsäkring (*livsfallskaraktär*). Risksumman kan generaliseras till att omfamna en assurancespolis som svarar mot en godtycklig kombination av livsfall- och dödsfallsförsäkringar samt involverar en eller flera personer (exempelvis en försörjare och hans familj); såväl som tillämpas på pensionsförsäkringar och livräntor, jfr [32, ss. 202–203].

4.4 Nollpunktsmetoden

Följande två stycken är inspirerade av A. Martin-Löf [37, ss. 12–13]. Föreställ en assurancespolis som är en godtycklig kombination av livfalls- och dödsfallsförsäkringar, involverar en person som vid inträdet är x år och vars fullständiga premie π inbetalas vid $t = 0$. (Mer generella poliser utelämnas från att inkluderas i denna uppsats men är emellertid fullt möjliga att modellera med metoden.) Vi vill då bestämma premien vilket enligt (4.3) fås av $\pi = V(0)$. Det gäller att premiereserven $V(t)$ satisfierar *Thieles differentialekvation*

$$\frac{d}{dt}V(t) = r(t)V(t) - L(t) - \mu(x+t)R(t), \quad (4.6)$$

där $L(t)$ är *livsförmånen* och $\mu(x+t)$ är dödlighetsintensiteten för åldern $x+t$. Tolkningen av (4.6) är att premiereserven ändras dels genom förräntning av ingående premiereserv, dels genom utbetalningar när den försäkrade är vid liv. Men den påverkas även av den sista termen vars effekt beror på $R(t)$:s tecken. Är $R(t) > 0$ minskar förändringen av $V(t)$ och tvärsom för $R(t) < 0$.

Låt den sanna dödligheten vara okänd, men med givna övre och undre begränsningar sådana att $\mu_L(x+t) \leq \mu(x+t) \leq \mu_D(x+t)$ för alla $t \geq 0$. Vidare gäller det att $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ med den heuristiska motiveringen att varken bolaget eller den försäkrade har några förpliktelser långt efter den försäkrades död (om vi antager att dödsförmånen har en ändlig tidsperiod, d. v. s. $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$). Givet dessa antaganden vill vi erhålla en konservativt skattad premie.

CRAMÉRS lösning var att variera $\mu(x+t)$ efter tecknet på $R(t)$ med bang-bang-kontroll, mer specifikt

$$\mu(x+t) = \begin{cases} \mu_L(x+t) & \text{om } R(t) < 0, \\ \mu_D(x+t) & \text{om } R(t) > 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

(När $R(t) = 0$ försvinner $\mu(x+t)R(t)$ från (4.6) så värdet på $\mu(x+t)$ är då irrelevant.) Detta har effekten att en minskning i premiereserven blir extra kraftig medan en ökning i premiereserven blir mildare. Bägge två bidrar till att öka storleken på $V(0)$ och därmed π . Som motivering till nollpunktsmetoden hänvisade CRAMÉR [16, s. 18] till rena livfalls- och dödsfallsförsäkringar som använder olika dödlighetsskattningar, jfr L- och D-tabeller. För en ren livsfallsförsäkring sättes parametrarna i Makehams formel (se (2.2) på sida 9) annorlunda sådana att den skattade dödlighetsintensiteten blir lägre än för dödsfallsförsäkringen. (CRAMÉR [16, s. 9] menade att det är praktiskt fördelaktigt om $\hat{c}$ i Makehams formel är densamma för de två försäkringarna, men det återspeglades emellertid inte alltid av datan.) Detta tänk applicerade CRAMÉR på livförsäkringar i allmänhet fast där valet av dödlighetsskattning istället göres efter om risksumman $R(t)$ är av livfalls- eller dödsfallskaraktär vid tiden t . När försäkringen har livsfallskaraktär behandlas den som en livsfallsförsäkring och dödsfallsförsäkring vid dödsfallskaraktär. Tidpunkten då $R(t)$ byter tecken kallas för *nollpunkten*.

CRAMÉR skrev följande om metoden i [16, s. 18]:

”[Nollpunktsmetoden] kan genomföras på tillräckligt enkelt sätt för flertalet i praktiken förekommande kombinerade försäkringar på ett liv och även vid vissa tvålivsförsäkringar. I de fall, där metodens exakta tillämpning skulle ställa sig alltför komplicerad, kan dock en approximativ beräkning ske. Även för premiereservberäkning, vinstfördelning m. m. ger nollpunktsmetoden rationella och i allmänhet enkla regler.”

Nollpunktsmetoden har den praktiska fördelen att den endast kräver lösningen till en differentialekvation, till skillnad från högstpremie- och uppdelningsmetoden (se avsnitt 4.5) som fordrar två respektive minst två ekvationer. (Detta argument är emellertid ej så kraftfullt i modern tid där en lösning kan tagas fram närmast omedelbart numeriskt, men spelade betydande roll under CRAMÉRS samtid.) Som kritik till metoden lyfte CRAMÉR upp att den ger upphov till en diskontinuerlig dödlighetsintensitet (jfr figur 4.2) vilket torde anses obilligt. Men effekten på premien jämfört med en kontinuerlig övergång menade han var försumbar då $R(t) \approx 0$ i en omgivning kring nollpunkten. Det ger även en tillfredsställande lösning att behandla alla dödlighetsantaganden på samma sida om nollpunkten desamma. Slutligen poängterade CRAMÉR att nollpunktsmetoden kunde (i alla fall då) ställa sig alltför komplicerad för vissa försäkringskombinationer. Med anledning av detta föreslog CRAMÉR att metoden ej skall göras obligatorisk för samtliga kombinerade försäkringar utan ses som ett riktmärke som premien minst skall uppgå till.

4.5 Högstpremie- och uppdelningsmetoden

I [16, ss. 18–21] kontrasterade CRAMÉR nollpunktsmetoden med två av samtidens ledande tekniker för val av dödlighetsantagande; *högstpremiemetoden* och *uppdelningsmetoden*. Högstpremiemetoden går ut på att beräkna premien dels med $\mu(x+t) = \mu_L(x+t)$ och dels med $\mu(x+t) = \mu_D(x+t)$ och sedan välja den som ger högst premie. Uppdelningsmetoden å andra sidan delar upp försäkringen i mindre delförsäkringar, beräknar premien för respektive delförsäkring med lämpligt dödlighetsantagande och sedan bestämmer den totala premien som deras summa. Låt π_n vara premien som erhålles från nollpunktsmetoden, π_h högstpremiemetoden och π_u uppdelningsmetoden. Då gäller det att

$$\pi_h \leq \pi_n \leq \pi_u. \quad (4.8)$$

CRAMÉR menade emellertid att högstpremiemetoden (namnet till trots) ofta resulterar i alltför låg premie och det är således nödvändigt att inkludera ett säkerhetstillägg. Hur detta tillägg sedermera skall bestämmas är inte alltid en bagatell. Uppdelningsmetoden har också sina brister. Exempelvis är den ej entydig då uppdelningen kan ske godtyckligt. Högst premie erhålles när försäkringen tude-las sådan att livs- och dödsförmånerna är var för sig med dödlighetsintensiteterna $\mu_L(x+t)$ respektive $\mu_D(x+t)$. Denna metod menade CRAMÉR skall användas som en övre gräns för premien och poängterade att den ibland kan bli oskäligt hög. Uppdelningsmetoden är fördelaktig ur tarifieringssynpunkt då genom att sammanställa

massa enkla försäkringar går det sedan snabbt att bestämma premien för kombinerade försäkringar.

4.6 Numeriskt exempel

Vi avslutar denna uppsats med att illustrera nollpunktsmetoden på följande assuranspolis och jämför den framtagna premiereserven med högstpremie- och uppdelningsmetoden. Den försäkrade ingår i försäkringen vid 65 års ålder och inbetalar hela premien π vid $t = 0$. Han erhåller därefter 1 krona årligen vilket utbetalas kontinuerligt så länge han lever, men som längst tills han fyller 90 år. Dör den försäkrade innan dess utbetalas till yttermera visso en engångssumma på 10 kronor. Räntan antagas vara konstant och på fem procent. Detta upplägg ger upphov till följande differentialekvation av Thiele;

$$\frac{d}{dt}V(t) = 0.05V(t) - 1 - \mu(65+t)(10 - V(t)), \quad (4.9)$$

med $V(25) = 0$. Dödlighetsskattningarna som användes är hämtade från 1937 års L- och D-tabeller vilka (för män) definierades av Makehamformlerna [16, s. 52]

$$10^3 \mu_L(65+t) = 1.5 + 0.041 \cdot 10^{0.042(65+t)}, \quad (4.10)$$

$$10^3 \mu_D(65+t) = 3 + 0.06 \cdot 10^{0.042(65+t)}. \quad (4.11)$$

Notera att i detta exempel antagas dödlighetsintensiteten för enkelhetens skull vara deterministisk och oberoende av kalenderperiod.

Vi löser (4.9) numeriskt med hjälp av Eulers metod. Låt $t_0 = 25$ och $V_0 = V(t_0) = 0$ samt för $k \geq 0$;

$$V_{k+1} = V_k - f(t_k, V_k) \Delta t, \quad (4.12)$$

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t; \quad (4.13)$$

där

$$f(t_k, V_k) = \begin{cases} 0.05V_k - 1 - \mu_L(65+t_k)(10 - V_k) & \text{om } V_k > 10, \\ 0.05V_k - 1 - \mu_D(65+t_k)(10 - V_k) & \text{om } V_k < 10; \end{cases} \quad (4.14)$$

och $\Delta t > 0$ är ett litet tal (för resultaten nedan användes $\Delta t = 0.01$). Vår eftersökta premie skattas således med $V_{25/\Delta t} \approx V(0) = \pi$.

För högstpremiemetoden bestäms premien av $\pi = \max\{V_1(0), V_2(0)\}$, där $V_1(t)$ respektive $V_2(t)$ satisfierar

$$\frac{d}{dt}V_1(t) = 0.05V_1(t) - 1 - \mu_L(65+t)(10 - V_1(t)), \quad (4.15)$$

$$\frac{d}{dt}V_2(t) = 0.05V_2(t) - 1 - \mu_D(65+t)(10 - V_2(t)). \quad (4.16)$$

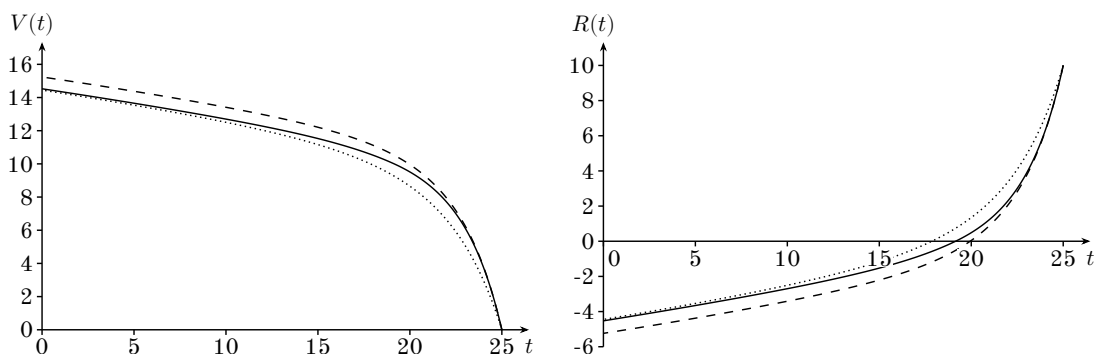
Uppdelningsmetoden ger å andra sidan som högst $\pi = V_L(0) + V_D(0)$, där

$$\frac{d}{dt}V_L(t) = 0.05V_L(t) - 1 + \mu_L(65+t)V_L(t), \quad (4.17)$$

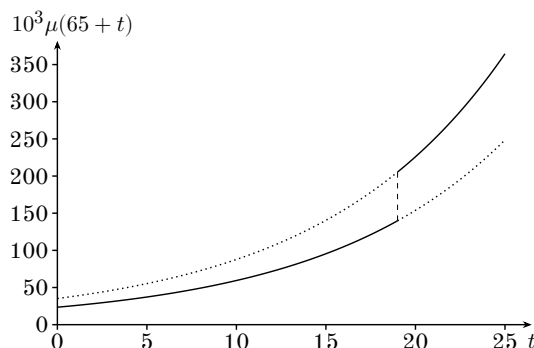
$$\frac{d}{dt}V_D(t) = 0.05V_D(t) - \mu_D(65+t)(10 - V_D(t)). \quad (4.18)$$

Liksom med nollpunktsmetoden löses (4.15)–(4.18) numeriskt med Eulers metod.

Resultaten för de tre metoderna syns i figur 4.1. Vi finner som väntat av (4.8) att uppdelningsmetoden ger högst premie (15.23 kronor), följt av nollpunktsmetoden (14.52 kronor) och lägst högstpremiemetoden (14.44 kronor). Vidare finnes det att nollpunkten för nollpunktsmetoden sker vid $t \approx 19$. (Hur detta påverkar dödlighetsantagandet visas i figur 4.2.) Sålunda innebär kontrakt där den försäkrade avlider före 84 års ålder en vinst för bolaget och en förlust om han lever längre. För $t > 25$ är $R(t) = 0$, d. v. s. bolaget går plus minus noll om den försäkrade lever längre än 90 år. Således skall vi enligt CRAMÉR [16, s. 21] sätta premien $\pi \in [14.52, 15.23]$.



FIGUR 4.1. Approximerad premiereserv $V(t)$ och risksumma $R(t) = 10 - V(t)$ för (4.9) utifrån nollpunkts- (heldragen linje), högstpremie- (prickad linje) samt uppdelningsmetoden (streckad linje).



FIGUR 4.2. Illustration av $\mu(65+t)$ samt $\mu_L(65+t)$ och $\mu_D(65+t)$ (prickade linjer) med nollpunkten vid $t \approx 19$.

Litteraturförteckning

- [1] ASMUSSEN, S. och STEFFENSEN, M., *Risk and Insurance*. Cham: Springer, 2020 (se s. 42).
- [2] BADOLATI, E. och CICCONE, S., "On Cramér's First Contributions to Ruin Theory", *North American Actuarial Journal*, **21**, nr 2, ss. 193–203, 2017 (se ss. 5, 24).
- [3] BERNSTEIN, F., "Säkuläre Sterblichkeitsänderung und Prinzip der Gewinnverteilung mittels einer Höcknerschen Überschusskonstanten λ ", *Blätter für Versicherung-Mathematik*, **2**, ss. 390–392, 1933 (se s. 13).
- [4] BILLINGSLEY, P., *Probability and Measure*, 3. uppl. New York: John Wiley & Sons, 1995 (se s. 7).
- [5] BLOM, G., "Harald Cramér 1893–1985", *The Annals of Statistics*, **15**, nr 4, ss. 1335–1350, 1987, omtryckt i [36, I, ss. xi–xx] (se s. 2).
- [6] BLOM, G. och MATÉRN, B., "Bibliography: Publications by Harald Cramér", *Scandinavian Actuarial Journal*, **1984**, nr 1, ss. 1–10, 1984 (se s. 2).
- [7] CRAMÉR, H., *Sur une classe de séries de Dirichlet*. Uppsala: Almqvist & Wiksell, 1917 (se s. 1).
- [8] —, "Bidrag till utjämningsförsäkringens teori", i *Försäkringsbolags fondbildning och riskutjämning*. Stockholm: Försäkringsinspektionen, 1919, **III** (se ss. 3, 19, 24).
- [9] —, "Matematik och försäkring", *Nordisk Försäkringstidskrift*, **4**, ss. 169–176, 1924 (se s. 5).
- [10] —, "Litteraturanmälning: F. Lundberg, Försäkringsteknisk riskutjämning, I, Teori", *Skandinaivisk Aktuarietidskrift*, **1926**, nr 3–4, ss. 223–245, 1926 (se ss. 3, 4, 35).
- [11] —, "Some Notes on Recent Mortality Investigations", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **1926**, nr 2, ss. 73–99, 1926, omtryckt i [36, I, ss. 468–494] (se s. 3).
- [12] —, "On the Mathematical Theory of Risk", *Skandia-festskrift*, ss. 7–84, 1930, omtryckt i [36, I, ss. 601–678] (se ss. 3, 17, 18, 20, 25, 30–33, 36, 39).

- [13] —, "The Risk Problem. Exordial Review", *Proceedings and Transactions of the 9th International Congress of Actuaries*, **IV**, ss. 163–172, 1931, omtryckt i [36, **I**, ss. 679–684] (se ss. 3, 23, 30).
- [14] —, "Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion", *Mathematische Zeitschrift*, **41**, ss. 405–414, 1936, omtryckt i [36, **II**, ss. 856–865] (se s. 6).
- [15] —, "Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités", *Actualités scientifiques et industrielles*, **736**, ss. 2–23, 1938, omtryckt i [36, **II**, ss. 895–913] (se s. 6).
- [16] —, *Utredning och förslag rörande grunder för liv- och pensionsförsäkring*. Stockholm, 1938 (se ss. 5, 42–46).
- [17] —, "Den Lundbergska riskteorin och teorin för stokastiska processer", i *Försäkringsmatematiska studier tillägnade Filip Lundberg*. Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1946, ss. 25–31 (se ss. 3, 25, 26, 29).
- [18] —, *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton: Princeton University Press, 1946 (se ss. 2, 6, 7).
- [19] —, *Sannolikhetskalkylen och några av dess användningar*. Stockholm: Almqvist & Wiksell/Geber, 1949 (se ss. 2, 5).
- [20] —, "Tentamensproblem och övningsuppgifter i försäkringsmatematik vid Stockholms högskola för betyget AB", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **1953**, nr 1 (bilaga), ss. 222–234, 1953 (se s. 5).
- [21] —, "On Some Questions Connected with Mathematical Risk", *University of California Publications in Statistics*, **2**, nr 4, ss. 99–123, 1954, omtryckt i [36, **II**, ss. 1003–1027] (se ss. 3, 20).
- [22] —, "Collective Risk Theory", *The Jubilee Volume of Skandia Insurance Company*, ss. 5–92, 1955, omtryckt i [36, **II**, ss. 1028–1115] (se s. 3).
- [23] —, "Filip Lundberg som vetenskaplig författare", i *Filip Lundberg: Förgrundsmän i svensk livförsäkring*, GRENHOLM, Å., red. Stockholm: Svenska Livförsäkringsbolags Förening, 1969, ss. 89–96 (se ss. 2, 4).
- [24] —, "On Streams of Random Events", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **1969**, nr 3 (bilaga), ss. 13–23, 1969, omtryckt i [36, **II**, ss. 1295–1305] (se ss. 3, 20).
- [25] —, "Half a Century with Probability Theory: Some Personal Recollections", *The Annals of Probability*, **4**, nr 4, ss. 509–546, 1976, omtryckt i [36, **II**, ss. 1352–1389] (se s. 2).
- [26] CRAMÉR, H., PALMQVIST, R. och SJÖGREN, I., "Undersökning av dödligheten bland livränteförsäkrade personer", *7de Nordiske Livsförsäkringskongress*, **II**, ss. 1–26, 1926 (se s. 3).
- [27] CRAMÉR, H. och WOLD, H., "On the Development of the Mortality of the Adult Swedish Population Since 1800", *Nordic Statistical Journal*, **5**, ss. 3–22, 1934, omtryckt i [36, **I**, ss. 709–728] (se s. 3).

- [28] —, "Mortality Variations in Sweden", *Skandinaivisk Aktuarietidskrift*, **1935**, nr 3–4, ss. 161–241, 1935, omtryckt i [36, **II**, ss. 746–826] (se ss. 3, 9–14).
- [29] —, "Some Theorems on Distribution Functions", *Journal of the London Mathematical Society*, **11**, nr 4, ss. 290–294, 1936, omtryckt i [36, **II**, ss. 866–870] (se s. 7).
- [30] GUT, A., *An Intermediate Course in Probability*, 2. uppl. Dordrecht: Springer, 2009 (se s. 7).
- [31] HULTMAN, K., *Om livförsäkringsteknik*. Stockholm: Institutet för Försäkringsutbildning, 1940 (se s. 5).
- [32] —, *Livförsäkringsteknik enligt svenska förhållanden*. Stockholm: Institutet för Försäkringsutbildning, 1958 (se ss. 5, 41, 42).
- [33] LEADBETTER, M. R., "Harald Cramér, 1893–1985", *International Statistical Review*, **56**, nr 1, ss. 89–97, 1988 (se ss. iv, 2, 5).
- [34] LUNDBERG, F., *I. Approximerad framställning af sannolikhetsfunktionen II. Återförsäkring af kollektivrisker*. Uppsala: Almqvist & Wiksell, 1903 (se ss. 4, 17).
- [35] LUNDBERG, O., "Obituary on Harald Cramér", *ASTIN Bulletin*, **16**, nr 1, ss. 9–10, 1986 (se s. 3).
- [36] MARTIN-LÖF, A., red., *Harald Cramér: Collected Works*. Berlin: Springer, 1994, **I–II** (se ss. 3, 47–49).
- [37] MARTIN-LÖF, A., "Harald Cramér and Insurance Mathematics", *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, **11**, nr 3, ss. 271–276, 1995 (se ss. 5, 43).
- [38] MIKOSCH, T., *Non-Life Insurance Mathematics*. Berlin: Springer, 2009 (se ss. 3, 17, 18, 25, 34–37).
- [39] MÜNTER, R., red., *Svensk försäkringsmatrikel 1940*. Stockholm: Svenska Försäkringsföreningen, 1940 (se s. 4).
- [40] NAIR, J., WIERMAN, A. och ZWART, B., *The Fundamentals of Heavy Tails*. Cambridge: Cambridge University Press, 2022 (se s. 6).
- [41] RAO, B. V., *Harald Cramér*. Calcutta: Statistics and Mathematics Unit, Indian Statistical Institute, u. å. (Se s. 5).
- [42] TOUCHETTE, H., *On a New Limit Theorem in Probability Theory*. Stellenbosch: National Institute for Theoretical Physics, 2018 (se s. 6).
- [43] YANG, H., "Cramér–Lundberg Condition and Estimate", i *Encyclopedia of Actuarial Science*, TEUGELS, J. L. och SUNDT, B., red. Chichester: John Wiley & Sons, 2004, **I**, ss. 394–398 (se s. 20).
- [44] ZHAN, J., *Neural Networking Beyond Lee–Carter: A Song of Mortality Forecasting and Deep Learning*. Stockholm: Matematiska institutionen, 2025 (se s. 14).
- [45] ÅKESSON, O. A., red., *Dödlighetsantaganden för livränteförsäkring (SOU 1932:4)*. Stockholm: Statens offentliga utredningar, 1932 (se s. 3).

Assuransmatematisk bibliografi

Nedan följer en kronologiskt ordnad bibliografi över samtliga 50 verk som professor H. CRAMÉR har författat med en tydlig koppling till assuransmatematik.

- CRAMÉR, H., "Bidrag till utjämningsförsäkringens teori", i *Försäkringsbolags fondbildning och riskutjämning*. Stockholm: Försäkringsinspektionen, 1919, III.
- CRAMÉR, H., "Das Gesetz von Gauss und die Theorie des Risikos", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **1923**, nr 4, ss. 209–237, 1923, omtryckt i [36, I, ss. 260–288].
- CRAMÉR, H., "Matematik och försäkring", *Nordisk Försäkringstidskrift*, **4**, ss. 169–176, 1924.
- CRAMÉR, H., *Besparingskommittén och pensionsförsäkringen*. Stockholm: Skattebetalarnas förening, 1925.
- CRAMÉR, H., "Ekonomisk statistik", *Nordisk Försäkringstidskrift*, **5**, ss. 16–24, 1925.
- CRAMÉR, H., "Hur mycket får jag låna på min livförsäkring?" *Assurans*, **26**, ss. 393–399, 1925.
- CRAMÉR, H., "Försäkringsmatematik och försäkringsmatematiker", *Nordisk Försäkringstidskrift*, **6**, ss. 584–593, 1926.
- CRAMÉR, H., "Litteraturanmälning: F. Lundberg, Försäkringsteknisk riskutjämning, I, Teori", *Skandinaivisk Aktuarietidskrift*, **1926**, nr 3–4, ss. 223–245, 1926.
- CRAMÉR, H., "Some Notes on Recent Mortality Investigations", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **1926**, nr 2, ss. 73–99, 1926, omtryckt i [36, I, ss. 468–494].
- CRAMÉR, H., PALMQVIST, R. och SJÖGREN, I., "Undersökning av dödligheten bland livränteförsäkrade personer", *7de Nordiske Livsforsikringskongress*, **II**, ss. 1–26, 1926.
- CRAMÉR, H., "Återförsäkring och maximum på egen risk", *7de Nordiske Livsforsikringskongress*, **II**, ss. 64–83, 1926.

- CRAMÉR, H., "Fondbildning inom den allmänna pensionsförsäkringen", *Nordisk Försäkringstidskrift*, **7**, ss. 572–579, 1927.
- CRAMÉR, H., "Livförsäkringsteknik", *Svenska Försäkringsföreningens publikationsserie nr 4*, ss. 80–155, 1928.
- CRAMÉR, H., "Livförsäkring som form för sparande", *Gjallarhornet*, **39**, nr 20, ss. 471–474, 1929.
- CRAMÉR, H., "Svenska Aktuarietföreningen 1904–1929", *Assurans*, **30**, nr 5, ss. 65–66, 1929.
- CRAMÉR, H., "Insurance Mathematics at the University of Stockholm", *Assurans*, **31**, ss. 214–215, 1930.
- CRAMÉR, H., "Några utvecklingslinjer i nyare svensk livförsäkringsteknik", *Nordisk Statistisk Tidskrift*, **9**, ss. 227–234, 1930.
- CRAMÉR, H., "On the Mathematical Theory of Risk", *Skandia-festskrift*, ss. 7–84, 1930, omtryckt i [36, I, ss. 601–678].
- CRAMÉR, H., "Remarks on the Foundations of Actuarial Science", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **1931**, nr 3, ss. 207–214, 1931.
- CRAMÉR, H., "The Risk Problem. Exordial Review", *Proceedings and Transactions of the 9th International Congress of Actuaries*, **IV**, ss. 163–172, 1931, omtryckt i [36, I, ss. 679–684].
- CRAMÉR, H., "The Theory of Risk in its Application to Life Insurance Problems", *Proceedings and Transactions of the 9th International Congress of Actuaries*, **II**, ss. 380–394, 1931, omtryckt i [36, I, ss. 685–695].
- CRAMÉR, H., "Till frågan om aktuarievetenskapens grunder", *Nordisk Försäkringstidskrift*, **11**, ss. 295–305, 1931.
- CRAMÉR, H., "Några arbetsuppgifter för en fördjupad försäkringsteknik inom sakförsäkringen", *Svenska Försäkringsföreningens publikationsserie nr 7*, ss. 8–22, 1932.
- CRAMÉR, H., *Staré a nové metody v teorii rizika*. Prag: Rozpravy Jednoty pro Vědy Pojistné, 1933.
- CRAMÉR, H., "Tables for Disability Insurance, Based on R 32 Mortality", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **1933**, nr 1, ss. 201–221, 1933.
- CRAMÉR, H. och WOLD, H., "On the Development of the Mortality of the Adult Swedish Population Since 1800", *Nordic Statistical Journal*, **5**, ss. 3–22, 1934, omtryckt i [36, I, ss. 709–728].
- CRAMÉR, H., "Pensionsförsäkringskommitténs reformförslag", *Nordisk Försäkringstidskrift*, **14**, ss. 487–508, 1934.

- CRAMÉR, H. och LUNDBERG, E., "Konjunkturförändringarnas inverkan på livförsäkringsbolagens ränteplan", *9de nordiska livförsäkringskongressen, Kongresshandlingarna*, **I**, ss. 329–351, 1935, inledande recension, **II**, ss. 161–173.
- CRAMÉR, H. och WOLD, H., "Mortality Variations in Sweden", *Skandinaivisk Aktuarietidskrift*, **1935**, nr 3–4, ss. 161–241, 1935, omtryckt i [36, **II**, ss. 746–826].
- CRAMÉR, H., "Über die säkulare Sterblichkeitsabnahme", i *Festschrift zu Ehren von Georg Höckner*. Berlin: Mittler & Sohn, 1935, ss. 61–67.
- CRAMÉR, H., "Über die Vorausberechnung der Bevölkerungsentwicklung in Schweden", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **1935**, nr 1–2, ss. 35–54, 1935, omtryckt i [36, **II**, ss. 836–855].
- CRAMÉR, H., "Om innebörden av prognoser för befolkningsutvecklingen", *Nordisk Försäkringstidskrift*, **16**, ss. 213–229, 1936.
- CRAMÉR, H., *Kring några aktuella problem inom livförsäkringstekniken*. Stockholm: Allmänna Livförsäkringsbolaget Oden, 1938.
- CRAMÉR, H., *Utredning och förslag rörande grunder för liv- och pensionsförsäkring*. Stockholm, 1938.
- CRAMÉR, H., "Matematik och statistik i försäkringsväsendets tjänst", *Gjallarhornet*, **50**, ss. 405–406, 1940.
- CRAMÉR, H., "Livförsäkringens matematiska grunder", *Svenska Försäkringsföreningens publikationsserie nr 10*, ss. 17–48, 1942.
- CRAMÉR, H., *Vad är försäkring?* Stockholm: Svenska Försäkringsföreningens Upplysningsbyrå, 1944.
- CRAMÉR, H., "Den Lundbergska riskteorin och teorin för stokastiska processer", i *Försäkringsmatematiska studier tillägnade Filip Lundberg*. Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1946, ss. 25–31.
- CRAMÉR, H., "Actuarial Instruction in Sweden", *Transactions of the 14th International Congress of Actuaries*, **2**, ss. 641–643, 1954.
- CRAMÉR, H., "On Some Questions Connected with Mathematical Risk", *University of California Publications in Statistics*, **2**, nr 4, ss. 99–123, 1954, omtryckt i [36, **II**, ss. 1003–1027].
- CRAMÉR, H., "Collective Risk Theory", *The Jubilee Volume of Skandia Insurance Company*, ss. 5–92, 1955, omtryckt i [36, **II**, ss. 1028–1115].
- CRAMÉR, H., "ASTIN Colloquium 1961. Introductory Lecture", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **1961**, nr 3–4, ss. 137–144, 1961.
- CRAMÉR, H., "Actuaries and Actuarial Science", *Journal of the Institute of Actuaries*, **89**, nr 2, ss. 95–104, 1963.

- CRAMÉR, H., "Försäkringsteknisk forskning i Sverige", *Försäkringstidningen*, **19**, nr 3, ss. 33–41, 1964.
- CRAMÉR, H., "An Introduction to Collective Risk Theory", i *Sverige Reinsurance Company 1914–64*. Stockholm, 1965, ss. 47–61.
- CRAMÉR, H., "Filip Lundberg", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **65**, nr 1–2, ss. 81–84, 1965.
- CRAMÉR, H., "On the Mathematical Theory of Insurance Risk", i *Forsikring og Videnskab*. Köpenhamn: Assurandør-Societetet, 1968, ss. 7–31.
- CRAMÉR, H., "Filip Lundberg som vetenskaplig författare", i *Filip Lundberg: Förgrundsman i svensk livförsäkring*, GRENHOLM, Å., red. Stockholm: Svenska Livförsäkringsbolags Förening, 1969, ss. 89–96.
- CRAMÉR, H., "Historical Review of Filip Lundberg's Works on Risk Theory", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **1969**, nr 3 (bilaga), ss. 6–12, 1969, omtryckt i [36, **II**, ss. 1288–1294].
- CRAMÉR, H., "On Streams of Random Events", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **1969**, nr 3 (bilaga), ss. 13–23, 1969, omtryckt i [36, **II**, ss. 1295–1305].



CRAMÉRS släktvapen, illustrerat med hjälp av ChatGPT utifrån dess blasonering.