



Stockholms
universitet

Från enkel till dubbel: Chain ladder-baserade metoder för IBNYR och IBNER

Elin Magnusson

Masteruppsats 2026:14
Försäkringsmatematik
Juni 2026

www.math.su.se

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm



Från enkel till dubbel: Chain ladder-baserade metoder för IBNYR och IBNER

Elin Magnusson*

Juni 2026

Sammanfattning

Denna studie undersöker och jämför olika reservsättningsmetoder för fyra olika segment inom egendomsskador, med särskilt fokus på uppdelningen av IBNR (Incurred But Not Reported) i dels IBNYR (Incurred But Not Yet Reported), som avser skador som har inträffat men ännu inte rapporterats in till försäkringsbolaget, och dels IBNER (Incurred But Not Enough Reported), som utgör en justering av den kända reserven för redan anmälda skador som ännu inte är slutreglerade. Denna uppdelning möjliggör insikter i skillnader i skaderegleringsmetodik mellan olika skaderegleringsavdelningar. I studien utvärderas Stockholm Schnieper-metoden (SS), den klassiska chain ladder-metoden (CL) och dess vidareutvecklingar double chain ladder (DCL), Bornhuetter double chain ladder (BDCL) och the collective reserving model (CRM). Dessa metoder utvärderas både på både simulerad och empirisk data. Resultaten visar att de klassiska metoderna CL och DCL ger robusta resultat för stabila portföljer med förutsägbar och jämn skadeutveckling, medan de mer komplexa metoderna BDCL och SS presterar bättre i portföljer där en stor andel av skadebeloppen återstår att betala ut. Metoderna utvärderas med relativ RMSEP (Root Mean Square Error of Prediction), varav BDCL och CRM är de metoder som oftast uppvisar lägst relativ RMSEP. Slutligen visar studien att det finns systematiska skillnader i skaderegleringsmetodik mellan såväl olika bolag som segment, vilket understryker vikten av att anpassa valet av reservsättningsmetod utifrån portföljens egenskaper.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.
E-post: elin.karolina@outlook.com. Handledare: Mathias Millberg Lindholm.

Abstract

This study examines and compares various reserving methods for four different segments within property insurance, with a particular focus on the division of IBNR (Incurred But Not Reported) into IBNYR (Incurred But Not Yet Reported), referring to claims that have occurred but have not yet been reported to the insurance company, and IBNER (Incurred But Not Enough Reported), which constitutes an adjustment of the case reserve for claims that have been reported but are not yet fully settled. This division enables insights into differences in claims handling practices across different claims departments. The study evaluates the Stockholm Schnieper method (SS), the classical chain ladder method (CL) and its extensions double chain ladder (DCL), Bornhuetter double chain ladder (BDCL) and the collective reserving model (CRM). These methods are evaluated using both simulated and empirical data. The results show that the classical methods CL and DCL yield robust outcomes for stable portfolios with predictable and consistent claims development, while the more complex methods BDCL and SS perform better in portfolios where a large proportion of claim amounts remain to be paid. The methods are evaluated using relative RMSEP (Root Mean Square Error of Prediction), where BDCL and CRM most often demonstrate the lowest relative RMSEP. Finally, the study shows that there are systematic differences in claims handling methodology both between companies and among segments, highlighting the importance of adapting the choice of reserving method to the specific characteristics of each portfolio.

Förord

Denna studie är skriven vid matematiska institutionen på Stockholms universitet och utgör ett examensarbete om 30 högskolepoäng.

Jag vill rikta ett stort tack till min handledare Mathias Millberg Lindholm för hans engagemang, givande idéer och vägledning som kontinuerligt bidragit till att utveckla och förbättra denna uppsats under arbetets gång.

Användning av AI

I denna uppsats har verktyg för artificiell intelligens använts som stöd vid felsökning av kod.

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Bakgrund	1
1.2	Syfte	1
1.3	Förväntade resultat	1
2	Datamaterial	2
2.1	Empiriskt datamaterial	2
2.2	Simulerat datamaterial	3
3	Teori	4
3.1	Reservsättning	4
3.2	Chain ladder	6
3.3	Bornhuetter-Ferguson	8
3.4	Stockholm Schnieper	9
3.5	Double chain ladder	13
3.6	Bornhuetter double chain ladder	16
3.7	The collective reserving model	17
3.8	Mean Squared Error Of Prediction	23
3.9	Copula	23
4	Resultat	24
4.1	Simulerad data	25
4.1.1	Segment a	25
4.1.2	Segment b	29
4.1.3	Segment c	33
4.1.4	Segment d	37
4.2	Empirisk data	41
5	Diskussion	44
5.1	Simulerad data	44
5.1.1	Relativ RMSEP	44
5.1.2	IBNER och IBNYR	45
5.1.3	Total skadereserv	46
5.1.4	Täthetsplottar och osäkerhet i den totala reserven	47
5.1.5	Skadereserv per kvartal	47
5.1.6	Avslutande reflektioner	47
5.2	Empirisk data	48
5.3	Framtida forskning	49
6	Slutsats	49
	Appendix	50
	Referenser	60

1 Inledning

I detta avsnitt presenteras bakgrunden till det problem som ligger till grund för detta examensarbete. Därefter kommer syftet med detta examensarbete att presenteras, följt av en redogörelse för det förväntade resultatet.

1.1 Bakgrund

Ett försäkringsbolag erbjuder skydd till kunder i utbyte mot en inbetalning i form av premier. Detta skydd ger kunderna en kompensation, antingen en ekonomisk eller en annan sorts åtgärd, för eventuella skador som kan uppstå till följd av oförutsägbara händelser. Om en kunds kök brännskadas kan kunden till exempel antingen få ekonomisk kompensation för att själv åtgärda skadan, eller så kan försäkringsbolaget hyra in ett företag som åtgärdar skadan åt kunden.

Försäkringsbolaget behöver prediktera framtida kostnader för skador som är inträffade, men ännu ej slutreglerade. Dessa kostnader kallas för okänd reserv eller IBNR (Incurred But Not Reported). För att säkerställa både finansiell stabilitet och lönsamhet är korrekt reservsättning därför avgörande. Det finns olika metoder för att beräkna den okända reserven, och för ett försäkringsbolag finns det ett stort värde i att använda enkla och robusta metoder. Det finns även ett värde i att dela upp den okända reserven i helt okända skador (Incurred But Not Yet Reported, IBNYR) samt utveckling av skadekostnad på redan kända skador (Incurred But Not Enough Reported, IBNER). Många reservsättningsmodeller använder den så kallade chain ladder-metoden, vilken har en styrka i att den är enkel och robust, men en svaghet i att den inte klarar av att dela upp den okända reserven i IBNYR och IBNER. Den mer avancerade double chain ladder-metoden kan dock hantera denna uppdelning, men till priset av ökad komplexitet. Det finns även alternativa metoder för att separera IBNR i IBNYR och IBNER, exempelvis Stockholm Schnieper-metoden.

1.2 Syfte

Syftet med detta examensarbete är att jämföra double chain ladder-metoden med både den vanliga chain ladder-metoden och Stockholm Schnieper-metoden för fyra olika segment inom egendomsskador. De frågor som avses besvaras rör dels vilka för- och nackdelar som är förknippade med respektive metod, dels vilka insikter om skillnader i skaderegleringsmetodik mellan olika skaderegleringsavdelningar som kan erhållas med hjälp av de olika metoderna.

1.3 Förväntade resultat

Detta examensarbete har två förväntade resultat. Det förväntas att ge insikt till vilken typ av affär som double chain ladder är fördelaktig att använda jämfört med chain ladder. Det förväntas även ge insikter i skillnader i skaderegleringsmetodik mellan olika skaderegleringsavdelningar.

2 Datamaterial

I detta avsnitt presenteras den data som ligger till grund för analysen av de olika reservsättningsmodellerna.

2.1 Empiriskt datamaterial

Det analyserade datamaterialet består av två tabeller och innehåller information om olika segment inom egendomsskador. Egendomsskador avser fysiska skador på antingen lös eller fast egendom. Exempel på egendomsskador kan vara brandskador i en villa eller ett stenskott på en vindruta. Datamaterialet innehåller rapporterade skador från flera försäkringsbolag. Dessa skador presenteras kvartalsvis och innehåller uppgifter om vilket försäkringsbolag skadorna avser, segmentkategori, olyckskvartal, kalenderkvartal och ett tillhörande värde. Med segment avses en andel av en produkt. Till exempel kan en produkt delas in i katastrofala skador, där skadornas skadekostnad överstiger ett visst belopp, och i icke-katastrofala skador, där skadornas skadekostnad understiger detta belopp. I Tabell 1 och Tabell 2 presenteras de två olika tabellerna.

Tabell 1: Beskrivning av de olika variablerna i det första datamaterialet.

Variabel	Beskrivning	Exempel
Bolag	Vilket bolag skadorna är registrerad på.	1
Segment	Vilket segment skadorna avser.	Hem & Villa
Olyckskvartal	Vilket kvartal olyckorna inträffade.	2005-01-01
Kalenderkvartal	Vilket kvartal skadorna rapporterades in till försäkringsbolaget.	2005-07-01
Typ	Utbetalning, känd reserv eller känd skadekostnad.	Utbetalning
Värde	Värdet på typen.	800 000

Tabell 2: Beskrivning av de olika variablerna i det andra datamaterialet.

Variabel	Beskrivning	Exempel
Bolag	Vilket bolag skadorna är registrerad på.	1
Segment	Vilket segment skadorna avser.	Hem & Villa
Olyckskvartal	Vilket kvartal olyckorna inträffade.	2005-01-01
Kalenderkvartal	Vilket kvartal skadorna rapporterades in till försäkringsbolaget.	2005-07-01
Värde	Hur många skador som rapporterades in.	2

2.2 Simulerat datamaterial

Parametrisk bootstrapping är en statistisk metod som används för att simulera ny data. Metoden bygger på att skatta parametrarna för en vald sannolikhetsfördelning utifrån den empiriska datan. Med hjälp av dessa skattade parametrar genereras nya observationer genom att slumpmässigt dra värden från den antagna fördelningen.

I denna studie tillämpas parametrisk bootstrapping för att simulera antalet skador, utbetalningar och känd reserv för fyra stycken utvalda segment från tre bolag över 20 kvartal. Samtliga utvalda segment avser kortsvarsade affärer, vilket innebär att tiden från det att en skada inträffar till dess att den slutreglerad och fullt utbetald är relativt kort, ofta inom ett par år. För att fånga beroendet mellan antal skador, utbetalningar och känd reserv har gaussisk copula använts vid simulering av data.

Poissonmodeller lämpar sig väl för räknedata. Ett vanligt problem med empirisk data är dock att antagandet om lika väntevärde och varians sällan är uppfyllt. Istället är det vanligt förekommande att variansen överstiger väntevärdet, vilket indikerar överspridning. Antalet skador modelleras därför med en Quasi-Poissonfördelning med väntevärde λ och varians $\phi\lambda$, där överspridningsparametern $\phi > 1$ introduceras för att fånga den extra variation som inte kan förklaras av en vanlig Poissonfördelning.

Utbetalningar och känd reserv modelleras med en normalfördelning med väntevärde μ och varians σ^2 . I den empiriska datan förekommer både positiva och negativa belopp. Negativa belopp kan till exempel uppstå till följd av återbetalningar eller nedskrivningar av tidigare reserver. Vanliga skadefördelningar som gamma- eller lognormalfördelningar är endast definierade för strikt positiva skadebelopp vilket gör dem olämpliga i detta fall. De simulerade utbetalningarna och kända reserverna adderas därefter för att erhålla den kända skadekostnaden.

Parametrarna λ, ϕ, μ och σ^2 skattas separat för varje bolag och segment per utvecklingskvartal, varav μ och σ^2 skattas för såväl positiva som negativa skadebelopp. Detta är för att bättre fånga den empiriska datans mönster. Simuleringen tar även hänsyn till hur ofta positiva och negativa belopp förekommer i empirisk data.

Under arbetets gång har flera olika simuleringsmetoder testats för att möjliggöra en utvärdering av Stockholm Schnieper-metoden även på simulerad data. Metoden kräver att beroendet mellan de fem olika skadetrianglarna återges på ett trovärdigt sätt. Detta har visat sig vara komplext och utmanande. Genom arbetet har både empiriska och gaussiska copulor tillämpats för att försöka modellera beroendet mellan de olika trianglarna. Vidare har även Pearson-residualer undersökts, men ingen av dessa tillvägagångssätt har visat sig representera komplexiteten i Stockholm Schnieper-metoden och har således inte gett tillräckligt tillförlitliga resultat. På grund av detta har denna metod uteslutits från analysen

av simulerad data.

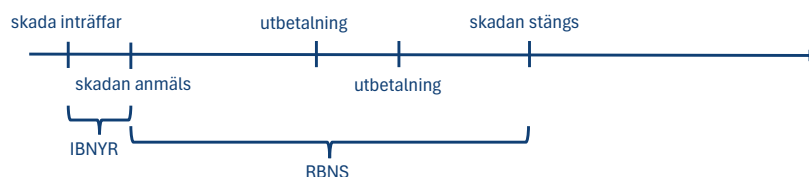
3 Teori

I detta avsnitt kommer relevant teori för arbetet att presenteras. Inledningsvis definieras reservsättning, och därefter kommer de fem reservsättningsmodellerna chain ladder, Bornhuetter-Ferguson, Stockholm Schnieper, double chain ladder samt Bornhuetter double chain ladder att introduceras. Avslutningsvis kommer valideringsmetoden Mean Squared Error Prediction, MSEP, att presenteras.

3.1 Reservsättning

För många försäkringsprodukter förekommer långa tidsfördröjningar mellan det att en skada inträffar och det att skadan slutregleras. Detta kan dels bero på att skadan rapporteras långt efter händelsen (exempelvis kan en sommarstuga drabbas av en vattenskada under vintern utan att ägaren upptäcker det förrän vid ett besök under sommaren), dels på att ersättningen betalas ut vid flera tillfällen över en längre tidsperiod (till exempel när ett medicinskt tillstånd förändras, vilket kan leda till omprövningar av den ekonomiska ersättningen).

Ett försäkringsbolag behöver prediktera storleken på framtida utbetalningar för skadehändelser som redan har inträffat och för vilka försäkringsgivaren är skyldig att betala ekonomisk ersättning. Detta kallas för reservsättning. De ekonomiska förpliktelser som försäkringsbolaget därmed åtar sig kallas för skadereserver och avser att täcka dels skador som har inträffat, men som ännu inte har rapporterats (Incurred But Not Yet Reported, IBNYR), dels skador som har inträffat men som ännu inte har slutreglerats (Reported But Not Settled, RBNS). I Figur 1 demonstreras en grafisk presentation av IBNYR och RBNS.

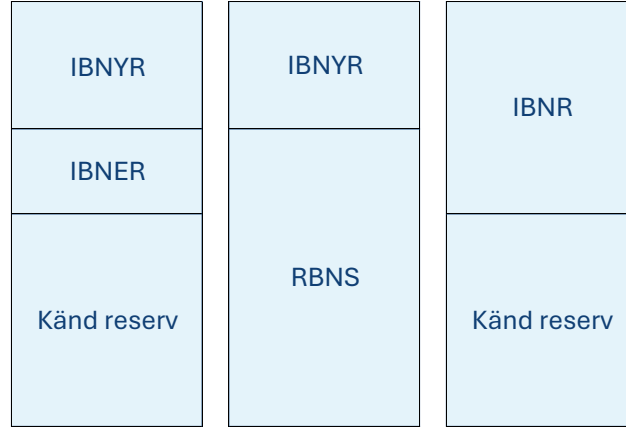


Figur 1: Grafisk presentation av IBNYR och RBNS.

RBNS kan i sin tur delas upp i kända reserver, det vill säga medel avsatta för rapporterade skador som ännu inte är slutreglerade, och en justeringsreserv, IBNER (Incurred But Not Enough Reported), som utgör aktuariens justering av de kända reserverna. Summan av IBNER och IBNYR kallas för IBNR (Incurred But Not Reported) sådan att

$$\text{IBNR} = \text{IBNYR} + \text{IBNER}.$$

För att förtydliga avser IBNR inte hela skadereserven, vilket begreppet ibland gör i annan litteratur. Här utgörs den totala skadereserven i stället av summan av IBNR och känd reserv. Känd reserv avser det belopp som skadereglerare har avsatt för anmälda skador som ännu inte är slutreglerade och där framtida utbetalningar fortfarande kvarstår. I Figur 2 illustreras uppdelningen mellan de olika reserverna.



Figur 2: Grafisk presentation av de olika reserverna.

Utvecklingstriangeln, även kallad skadetriangel, är en viktig del inom reservsättning som består av skadekostnader. Låt X_{ij} beteckna den inkrementella utbetalda skadekostnaden för skador som inträffade under skadeperiod i och utvecklingsperiod j . Låt vidare I vara det maximala antalet skadeperioder och J det maximala antalet utvecklingsperioder. Således är alla utbetalningar slutreglerade vid utvecklingsperiod J . Denna utvecklingstriangel presenteras nedan i Tabell 3.

Tabell 3: Inkrementell skadetriangel med skadeutbetalningar X_{ij} där i motsvarar skadeperiod och j utvecklingsperiod.

$i \backslash j$	1	2	3	...	$J-1$	J
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	...	$X_{1,J-1}$	$X_{1,J}$
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	...	$X_{2,J-1}$	
3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	...		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$X_{i,J+1-i}$		
$I-1$	$X_{I-1,1}$	$X_{I-1,2}$				
I	$X_{I,1}$					

Skadetriangeln går även att uttrycka med de kumulativa utbetalda skadekost-

naderna C_{ij} som består av summan av de inkrementella utbetalda skadekostnaderna sådan att

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^j X_{ik}.$$

Således motsvarar $C_{i,J}$ den slutgiltiga skadekostnaden för samtliga skador som inträffade under skadeperiod i och kallas även för ultimo skadebelopp. Notera att den nedre högra delen av triangeln är tom eftersom den avser skadekostnader som ännu inte är kända till följd av att utvecklingsperioderna ännu inte har inträffat. Vi antar att de kända skadekostnaderna motsvarar observationerna för vilka $i+j-1 \leq I$ medan de okända skadekostnaderna motsvarar observationerna för vilka $i+j-1 > I$. Vid reservsättning används de kända observationerna i den övre vänstra triangeln för att prediktera de ännu okända skadekostnaderna i den undre högra triangeln. Detta tillvägagångssätt utgår från antagandet att skador följer ett stabilt utvecklingsmönster över tid, vilket möjliggör användning av historisk utbetalningsdata för att prediktera framtida kostnader.

Det finns ett flertal olika metoder för att prediktera dessa framtida kostnader, varav chain ladder är en av de vanligaste metoderna.

3.2 Chain ladder

Följande delkapitel bygger huvudsakligen på Mack (1993).

Chain ladder är en av de mest välkända och använda metoderna för att skatta IBNR-reserver, främst på grund av dess enkelhet. Metoden är dels fri från antaganden om skadekostnadernas fördelning, dels relativt enkel att implementera i praktiken. Chain ladder förutsätter att data är strukturerad i triangelform såsom i Tabell 3, men där de kumulativa skadekostnaderna C_{ij} används istället för de inkrementella beloppen X_{ij} .

Chain ladder-metoden bygger på tre viktiga antaganden, nämligen

1. För $i \neq j$ gäller att $\{C_{i1}, \dots, C_{iI}\}$ och $\{C_{j1}, \dots, C_{JI}\}$ är oberoende, vilket innebär att skadeutvecklingen för olika skadeperioder är oberoende av varandra.
2. För alla $j = 1, 2, \dots, J-1$ existerar det utvecklingsfaktorer $f_1, \dots, f_{J-1} > 0$ sådan att

$$E(C_{i,j+1} | C_{i1}, \dots, C_{ij}) = C_{ij} f_j.$$

3. För alla $j = 1, 2, \dots, J-1$ existerar σ_j sådan att

$$\text{Var}(C_{i,j+1} | C_{i1}, \dots, C_{ij}) = C_{ij} \sigma_j^2.$$

Metoden bygger på antagandet att alla skadeperioder uppvisar ett likartat utvecklingsmönster. Utifrån historiska observationer skattas så kallade utvecklingsfaktorer f_j för varje utvecklingsperiod j . Dessa används därefter för att

skatta framtida skadekostnader. Utvecklingsfaktorerna beskriver den förväntade förändringen i den kumulativa skadekostnaden från en period till nästkommande period och skattas enligt

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{ij}}.$$

För att skatta den totala skadekostnaden för skadeperiod i multipliceras det senast observerade kumulativa skadebeloppet $C_{i,J+1-i}$ med produkten av de återstående utvecklingsfaktorerna enligt

$$\hat{C}_{iJ} = C_{i,J+1-i} \cdot \hat{f}_{J+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{J-1}$$

medan reserven för skadeperiod i fås genom att subtrahera det redan kända skadebeloppet från den skattade slutkostnaden enligt

$$\begin{aligned} \hat{R}_i &= \hat{C}_{iJ} - C_{i,J+1-i} \\ &= C_{i,J+1-i} \left(\hat{f}_{J+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{J-1} - 1 \right). \end{aligned}$$

För att kunna uppskatta osäkerheten i skattningarna, det vill säga variansen av $\hat{C}_{i,j+1}$, behövs även en skattning av variansparametrarna σ_j^2 vilka beräknas enligt

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=1}^{I-j} C_{ij} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - \hat{f}_j \right)^2$$

för $1 \leq j \leq J-2$. För den sista utvecklingsperioden $j = J-1$ används i stället två alternativa metoder. Den ena metoden innebär att man sätter $\hat{\sigma}_{J-1} = 0$ under antagandet att $\hat{f}_{J-1} = 1$ och att skadeutvecklingen anses vara färdig efter $J-1$ perioder. Om inte detta antagande är uppfyllt används istället

$$\hat{\sigma}_{J-1}^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{J-2}^4}{\hat{\sigma}_{J-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{J-3}^2, \hat{\sigma}_{J-2}^2) \right).$$

Trots sina fördelar har metoden även vissa begränsningar. För att kunna prediktera framtida skadekostnader förutsätter metoden att det finns en tillräckligt stor mängd historisk data, samt att den följer samma utvecklingsmönster över tid. Om dessa antaganden inte uppfylls riskerar utvecklingsfaktorerna att bli missvisande, vilket i sin tur kan ge upphov till felaktiga reserver. Metoden kan heller inte dela upp IBNR i IBNER och IBNYR, till skillnad från exempelvis Stockholm Schnieper, som presenteras senare.

3.3 Bornhuetter-Ferguson

Teorin som presenteras i detta delkapitel bygger på Alai et al. (2009).

Bornhuetter-Ferguson-metoden är, tillsammans med chain ladder-metoden, en av de mest välkända metoderna för reservsättning inom skadeförsäkring. Till skillnad från chain ladder-metoden, som enbart baseras på historiska utbetalningsmönster, kombinerar Bornhuetter-Ferguson-metoden information från historisk skadedata med en a priori-bedömning av den förväntade skadeprocenten. Detta gör metoden mer stabil, särskilt i situationer där den historiska skadetan är begränsad eller opålitlig, exempelvis för nya försäkringsprodukter eller portföljer med få skador.

Metoden är särskilt användbar i situationer där enbart en liten andel av den totala skadekostnaden är utbetald tidigt i utvecklingsförloppet, vilket ofta leder till underskattning av IBNR med chain ladder-metoden. Om det observerade skadebeloppet $C_{i,J+1-i}$ för en visst skadeperiod är noll kommer chain ladder-metoden att skatta reserven för den skadeperioden till noll, trots att framtida utbetalningar kan förväntas. Bornhuetter-Ferguson-metoden undviker denna svaghet genom att tilldela en reserv även i avsaknad av observerade utbetalningar.

Låt P_i beteckna premieintäkten för olycksperiod i och låt L_i vara den skadeprocent som uppskattades innan skadeperioden började, där skadeprocenten definieras som

$$L_i = \frac{\text{försäkringsersättningar}}{\text{premieintäkt}}.$$

Den förväntade totala skadekostnaden för skadeperiod i kan därmed uttryckas som

$$P_i L_i.$$

Den skattade andelen utbetalt efter $J+1-i$ utvecklingsperioder beräknas med hjälp av utvecklingsfaktorerna f_j , vilka beräknas enligt samma metod som i chain ladder. Låt C_{iJ} beteckna den slutliga kumulativa skadekostnaden för skadeperiod i som beräknas enligt

$$C_{iJ} = C_{i,J+1-i} \cdot f_{J+1-i} \cdot \dots \cdot f_{J-1}.$$

Andelen utbetalt efter $J+1-i$ perioder erhålls genom

$$\frac{C_{i,J+1-i}}{C_{iJ}} = \frac{1}{f_{J+1-i} \cdot \dots \cdot f_{J-1}}.$$

Därmed följer att andelen ännu ej utbetalda skadekostnader ges av

$$1 - \frac{1}{f_{J+1-i} \cdot \dots \cdot f_{J-1}}.$$

Produkten av utvecklingsfaktorerna beskriver hur mycket det hittills utbetalda skadebeloppet förväntas utvecklas innan skadeperiod i är färdigutvecklad. Inversen av produkten av utvecklingsfaktorerna anger därmed hur stor andel av den totala slutkostnaden som redan har betalats ut.

Den okända reserven IBNR för skadeperiod i skattas därför som

$$\text{IBNR}_i = \left(1 - \frac{1}{f_{J+1-i} \cdot \dots \cdot f_{J-1}}\right) P_i L_i.$$

Således kan reserven tolkas som

$$\text{andel ej utbetalda skadekostnader} \cdot \text{totala skadekostnaden}.$$

3.4 Stockholm Schnieper

Följande teori bygger på Ohlsson och Wällberg-Beutelrock (2022) vilka kombinerar metoderna från Schnieper (1991) och Dahms (2008).

Denna metod utgår från de kumulativa skadetrianglarna C^{paid} och C^{incurred} som innehåller de utbetalda skadekostnaderna C_{ij}^{paid} respektive de kända skadekostnaderna C_{ij}^{incurred} för skador som inträffade skadeperiod i och som rapporterades in till försäkringsbolaget under utvecklingsperiod j . För förtydligande avser *paid* faktiskt utbetalda ersättningar medan *incurred* avser känd skadekostnad som är summan av utbetalda ersättningar och kvarvarande känd reserv. Dessa trianglar delas i sin tur upp i två nya trianglar där C^{paid} delas in i D^{paid} och N^{paid} medan C^{incurred} delas in i D^{incurred} och N^{incurred} . Trianglarna D avser utveckling på redan rapporterade skador medan trianglarna N avser nya eller återöppnade skador.

Skadetriangeln D^{paid} innehåller de inkrementella förändringarna per utvecklingsperiod av de utbetalda skadekostnaderna för inträffade skador som hade en nollskild känd reserv vid början av den aktuella utvecklingsperioden. Dessa förändringsbelopp betecknas D_{ij}^{paid} . På motsvarande sätt innehåller D^{incurred} de inkrementella förändringarna per utvecklingsperiod av de kända skadekostnaderna för skador med en nollskild känd reserv vid periodens början, och dessa belopp betecknas D_{ij}^{incurred} . Vidare definieras skadetrianglarna N^{paid} och N^{incurred} där N_{ij}^{paid} och N_{ij}^{incurred} representerar de inkrementella utbetalda respektive kända skadekostnaderna för samtliga skador som inte ingår i D_{ij}^{paid} respektive D_{ij}^{incurred} . Därmed gäller sambandet

$$C_{ij}^{\text{paid}} = C_{i,j-1}^{\text{paid}} + D_{ij}^{\text{paid}} + N_{ij}^{\text{paid}}$$

och

$$C_{ij}^{\text{incurred}} = C_{i,j-1}^{\text{incurred}} + D_{ij}^{\text{incurred}} + N_{ij}^{\text{incurred}}$$

för $i = 1, \dots, I$ och $j = 1, \dots, J$.

Låt O_{ij} vara de kända reserverna för skadeperiod i och utvecklingsperiod j . Då gäller

$$O_{ij} = C_{ij}^{\text{incurred}} - C_{ij}^{\text{paid}}.$$

Förändringen i kända reserver fås enligt

$$O_{ij} - O_{i,j-1} = \left(D_{ij}^{\text{incurred}} - D_{ij}^{\text{paid}}\right) + \left(N_{ij}^{\text{incurred}} - N_{ij}^{\text{paid}}\right).$$

De kumulativa värdena fås genom att summera de inkrementella förändringarna enligt

$$C_{ij}^{\text{paid}} = \sum_{k=1}^j D_{ik}^{\text{paid}} + N_{ik}^{\text{paid}}$$

respektive

$$C_{ij}^{\text{incurred}} = \sum_{k=1}^j D_{ik}^{\text{incurred}} + N_{ik}^{\text{incurred}}.$$

Eftersom målet med reservsättning är att bestämma framtida kassaflöden får vi de totala framtida skadekostnaderna för skadeperiod i enligt

$$\sum_{j=I-i+1}^J \left(D_{ij}^{\text{paid}} + N_{ij}^{\text{paid}} \right).$$

Alternativt kan man även basera reserven på kända skadekostnader genom att addera känd reserv med den framtida ändringen till känd skadekostnad enligt

$$O_{i,I-i+1} + \sum_{j=I-i+1}^J \left(D_{ij}^{\text{incurred}} + N_{ij}^{\text{incurred}} \right).$$

Detta kan ses genom

$$\begin{aligned} \sum_{j=I-i+1}^J \left(D_{ij}^{\text{paid}} + N_{ij}^{\text{paid}} \right) &= - \sum_{j=I-i+1}^J (O_{ij} - O_{i,j-1}) + \sum_{j=I-i+1}^J (D_{ij}^{\text{incurred}} + N_{ij}^{\text{incurred}}) \\ &= -(O_{iJ} - O_{i,I-i+1}) + \sum_{j=I-i+1}^J (D_{ij}^{\text{incurred}} + N_{ij}^{\text{incurred}}) \\ &= O_{i,I-i+1} + \sum_{j=I-i+1}^J (D_{ij}^{\text{incurred}} + N_{ij}^{\text{incurred}}). \end{aligned}$$

Varje diagonal i skadetrianglarna representerar kalenderperioden

$$k = i + j - 1.$$

Låt $\mathcal{H}_{ij}$ beteckna samlingen av alla observerade variabler upp till och med kalenderperiod k sådan att

$$\mathcal{H}_{ij} = \left\{ N_{ij}^{\text{paid}}, N_{ij}^{\text{incurred}}, D_{ij}^{\text{paid}}, D_{ij}^{\text{incurred}}; i + j - 1 \leq k \right\}.$$

Vidare antas det att det finns ett exponeringsmått e_i för varje skadeperiod i . Detta exponeringsmått kan vara antingen den intjänade premien, antal försäkringar eller något annat volymmått. I denna rapport kommer den intjänade premien att användas som exponeringsmått.

Stockholm Schnieper-metoden bygger på fem stycken antaganden. Antagandena för utvecklingen av redan anmälda skador i D-trianglarna formuleras med hjälp av den kända reserven $O_{i,j-1}$ som är känd vid $\mathcal{H}_{i,j-1}$. Observera att O_{ij} är känd vid $\mathcal{H}_{ij}$ genom

$$\begin{aligned} O_{ij} &= (N_{ij}^{\text{incurred}} + D_{ij}^{\text{incurred}}) - (N_{ij}^{\text{paid}} + D_{ij}^{\text{paid}}) \\ &= C_{ij}^{\text{incurred}} - C_{ij}^{\text{paid}}. \end{aligned}$$

1. Det existerar parametrar $\lambda_j^{\text{paid}} \geq 0$ sådan att

$$\mathbb{E} \left(N_{ij}^{\text{paid}} | \mathcal{H}_{i,j-1} \right) = e_i \lambda_j^{\text{paid}}$$

för $i = 1, \dots, I$ och $j = 1, \dots, J$, där e_i motsvarar ett exponeringsmått så som intjänad premie.

2. Det existerar parametrar $\lambda_j^{\text{incurred}} \geq 0$ sådan att

$$\mathbb{E} \left(N_{ij}^{\text{incurred}} | \mathcal{H}_{i,j-1} \right) = e_i \lambda_j^{\text{incurred}}$$

för $i = 1, \dots, I$ och $j = 1, \dots, J$.

3. Det existerar parametrar $\delta_j^{\text{paid}} \geq 0$ sådan att

$$\mathbb{E} \left(D_{ij}^{\text{paid}} | \mathcal{H}_{i,j-1} \right) = O_{i,j-1} \delta_j^{\text{paid}}$$

för $i = 1, \dots, I$ och $j = 1, \dots, J$.

4. Det existerar parametrar $\delta_j^{\text{incurred}} \geq 0$ sådan att

$$\mathbb{E} \left(D_{ij}^{\text{incurred}} | \mathcal{H}_{i,j-1} \right) = O_{i,j-1} \delta_j^{\text{incurred}}$$

för $i = 1, \dots, I$ och $j = 1, \dots, J$.

5. Slumpvariablerna $N_{ij}^{\text{paid}}, N_{ij}^{\text{incurred}}, D_{ij}^{\text{paid}}$ och D_{ij}^{incurred} är oberoende för de olika skadeperioderna.

Genom att ersätta $\bullet$ med antingen *paid* eller *incurred* fås momentskattningarna

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_j^\bullet &= \frac{\sum_{i=1}^I N_{ij}^\bullet}{\sum_{i=1}^I e_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^I e_i \hat{\lambda}_{ij}^\bullet}{\sum_{i=1}^I e_i} \end{aligned}$$

där

$$\hat{\lambda}_{ij}^{\bullet} = \frac{N_{ij}^{\bullet}}{e_i}$$

för $j = 1, \dots, J$ och

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_j^{\bullet} &= \frac{\sum_{i=1}^I D_{ij}^{\bullet}}{\sum_{i=1}^I O_{i,j-1}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^I O_{i,j-1} \hat{\delta}_{ij}^{\bullet}}{\sum_{i=1}^I O_{i,j-1}} \end{aligned}$$

där

$$\hat{\delta}_{ij}^{\bullet} = \frac{D_{ij}^{\bullet}}{O_{i,j-1}}$$

för $j = 2, \dots, J$. Parametrarna $\hat{\delta}_{ij}^{\bullet}$ kan tolkas liknande de utvecklingsfaktorer som estimeras med chain ladder-metoden.

För $j = I - i + 1, I - i + 2, \dots, J$ kan de nu ännu ej observerade värdena i de undre skadetrianglarna $N^{\bullet}$ och $D^{\bullet}$ skattas. För $N^{\bullet}$ skattas de enligt

$$\hat{N}_{ij}^{\bullet} = e_i \hat{\lambda}_j^{\bullet}.$$

De okända $D_{ij}^{\bullet}$ är beroende av framtida kända reserver, vilka således behövs skattas. För $j = I - i + 1, I - i + 2, \dots, J$ kan dessa skattas rekursivt via

$$\hat{O}_{ij} = \hat{O}_{i,j-1} \left(1 + \hat{\delta}_j^{\text{incurred}} - \hat{\delta}_j^{\text{paid}} \right) + e_i \left(\hat{\lambda}_j^{\text{incurred}} - \hat{\lambda}_j^{\text{paid}} \right).$$

Detta ger således

$$\hat{D}_{ij}^{\bullet} = \hat{O}_{i,j-1} \hat{\delta}_j^{\bullet}.$$

Dessa kan nu användas för att skatta de framtida skadekostnaderna enligt

$$\sum_{j=I-i+1}^J \left(\hat{D}_{ij}^{\text{paid}} + \hat{N}_{ij}^{\text{paid}} \right) = O_{i,I-i} + \sum_{j=I-i+1}^J \left(\hat{D}_{ij}^{\text{incurred}} + \hat{N}_{ij}^{\text{incurred}} \right).$$

Låt

$$\hat{\delta}_i^{\text{outstanding}} = \hat{\delta}_i^{\text{incurred}} - \hat{\delta}_i^{\text{paid}}$$

och

$$\hat{\lambda}_i^{\text{outstanding}} = \hat{\lambda}_i^{\text{incurred}} - \hat{\lambda}_i^{\text{paid}}$$

där outstanding innebär känd reserv. Då ges IBNER av

$$R_i^{\text{IBNER}} = O_{i,I-i} \cdot \sum_{j=I-i+1}^J \hat{\delta}_j^{\text{incurred}} \cdot \prod_{k=I-i+1}^j \left(1 + \hat{\delta}_k^{\text{outstanding}}\right)$$

medan IBNYR ges av

$$R_i^{\text{IBNYR}} = e_i \sum_{j=I-i}^J \left(\hat{\delta}_i^{\text{incurred}} \cdot \Omega_{ij} + \hat{\lambda}_j^{\text{incurred}} \right)$$

där

$$\Omega_{ij} = \sum_{k=I-i+1}^j \hat{\lambda}_k^{\text{outstanding}} \prod_{l=k+1}^j \left(1 + \hat{\delta}_l^{\text{outstanding}}\right)$$

varav det sista uttrycket kan skrivas rekursivt

$$\Omega_{ij} = \Omega_{ij-1} \cdot \left(1 + \hat{\delta}_l^{\text{outstanding}}\right) + \hat{\lambda}_j^{\text{outstanding}}.$$

3.5 Double chain ladder

Teorin som följer i detta delkapitel följer det som presenteras i Miranda et al. (2012).

Double chain ladder-metoden är en vidareutveckling av den klassiska chain ladder-metoden genom att den använder sig av två skadetrianglar istället för en. Istället för att enbart basera beräkningarna på utbetald skadekostnad används även en skadetriangel för antalet inrapporterade skador. Således möjliggör double chain ladder-metoden en mer detaljerad modellering genom att även beakta rapporteringsfördröjningar och utbetalningsmönster.

Denna metod bygger på antagandet att varje skada ger upphov till endast en utbetalning. Detta antagande är i praktiken inte rimligt eftersom ett försäkringsärende kan ge upphov till flera utbetalningar.

Låt N vara den observerade skadetriangeln innehållandes de inkrementella N_{ij} som betecknar antalet inrapporterade skador som inträffade under skadeperiod i och som rapporterades in till försäkringsbolaget under utvecklingsperiod j . Låt vidare X vara den observerade skadetriangeln som innehåller de inkrementella skadebeloppen X_{ij} .

För att kunna beräkna RBNS behövs en stokastisk komponent som motsvarar fördröjningen av slutregleringen. Denna komponent modelleras med hjälp av N_{ijl}^{paid} som representerar antalet framtida utbetalningar som härstammar från de ursprungliga inrapporterade N_{ij} . Dessa skador är slutreglerade inom l perioder, där $l = 1, \dots, J$, från det att de rapporterades in till försäkringsbolaget. Således fås sambandet

$$N_{ij}^{\text{paid}} = \sum_{l=1}^j N_{i,j-l+1,l}^{\text{paid}}.$$

De individuella utbetalningarna för dessa skador betecknas $Y_{ijl}^{(k)}$, där $k = 1, \dots, N_{ijl}^{\text{paid}}$ anger vilken skada som avses. De totala inkrementella skadebeloppen för skadeperiod i och utvecklingsperiod j kan därmed fås genom att summera de individuella utbetalningarna enligt

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{ij}^{\text{paid}}} Y_{ij}^{(k)}.$$

Med dessa definitioner kan vi nu formulera de tre första momentmetoderna för double chain ladder-metoden.

1. Det förväntade antalet rapporterade skador för skadeperiod i och utvecklingsperiod j ges av

$$E(N_{ij}) = \alpha_i \beta_j$$

där α_i representerar skadeperiodseffekter och β_j representerar utvecklingsperiodseffekter, med normaliseringsvillkoret

$$\sum_{j=1}^J \beta_j = 1.$$

Detta villkor medför att α_i är det väntade antalet rapporterade skador för skadeperiod i medan β_j representerar andelen av det slutgiltiga antalet inträffade skador som rapporterades under den j :te utvecklingsperioden.

2. Det förväntade antalet slutreglerade skador med fördröjning l perioder, givet antalet inträffade skador N_{ij} , ges av

$$E(N_{ijl}^{\text{paid}} | N) = N_{ij} \tilde{\pi}_l$$

där $\tilde{\pi}_l$ anger sannolikheten för att en rapporterad skada slutregleras med fördröjning l .

3. Betingat på de framtida antalet N_{ijl}^{paid} utbetalningar, ges det förväntade värdet av de individuella utbetalningarna av

$$E(Y_{ijl}^{(k)} | N_{ijl}^{\text{paid}}) = \tilde{\mu}_l \gamma_i$$

där $\tilde{\mu}_l$ är det genomsnittliga utbetalda beloppet med fördröjning l och γ_i kan betraktas som en inflationsparameter för skadeperiod i .

För att skatta parametrarna i modellen tillämpas chain ladder-metoden separat på trianglarna N och X . De skattade parametrarna för antalet skador erhålls genom

$$\hat{\alpha}_i = N_{i, J+1-i} \cdot \hat{f}_{J+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{J-1}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\hat{f}_1 \cdot \dots \cdot \hat{f}_{J-1}}$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{\hat{f}_j - 1}{\hat{f}_j \cdot \dots \cdot \hat{f}_{J-1}}$$

medan motsvarande skattningar för skadebeloppen ges av

$$\hat{\alpha}_i = C_{i,J+1-i} \cdot \hat{f}_{J+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{J-1}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\hat{f}_1 \cdot \dots \cdot \hat{f}_{J-1}}$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{\hat{f}_j - 1}{\hat{f}_j \cdot \dots \cdot \hat{f}_{J-1}}.$$

Fördröjningsparametrarna $\hat{\pi}_l$ för $l = 1, \dots, J$ ges som lösning till följande linjära ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{\beta}_2 & \hat{\beta}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \hat{\beta}_J & \hat{\beta}_{J-1} & \dots & \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\pi}_1 \\ \hat{\pi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\pi}_J \end{pmatrix}.$$

Genom att ansätta $\gamma_1 = 1$ kan det förväntade värdet av utbetalningen skattas enligt

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_1}$$

medan inflationsparametrarna fås genom

$$\hat{\gamma}_i = \frac{\hat{\alpha}_i}{\hat{\alpha}_i \hat{\mu}}$$

för $i = 1, \dots, I$.

Skattningen av utbetalt skadebelopp för skadeperiod i och utvecklingsperiod j ges av

$$\hat{X}_{ij} = \sum_{l=1}^J N_{i,j-l+1} \hat{\pi}_l \hat{\mu} \hat{\gamma}_i.$$

Då skattas överspridningsparametern enligt

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{\frac{I(I+1)}{2} - I} \sum_{i=1, j=1} \frac{(X_{ij} - \hat{X}_{ij})^2}{\hat{X}_{ij} \hat{\gamma}_i}$$

vilken kan användas för att skatta varianserna

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_i &= \hat{\sigma}^2 \hat{\gamma}_i^2 \\ &= \hat{\mu} \hat{\varphi} - \hat{\mu}^2 \end{aligned}$$

för $i = 1, \dots, I$.

Skattningen av RBNS kan genomföras på två olika sätt. Det första sättet är genom att använda sig av de faktiska antalet rapporterade skador medan det andra sättet är genom att använda sig av de predikterade antalen. I det första fallet ges skattningen av

$$\hat{X}_{ij}^{\text{RBNS}(1)} = \sum_{l=i-I+j}^j N_{i,j-l+1} \hat{\pi}_l \hat{\mu} \hat{\gamma}_i$$

medan i det andra fallet skattas RBNS genom

$$\hat{X}_{ij}^{\text{RBNS}(2)} = \sum_{l=i-I+j}^j \hat{N}_{i,j-l+1} \hat{\pi}_l \hat{\mu} \hat{\gamma}_i$$

där

$$\hat{N}_{i,j-l} = \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_{j-l}.$$

Vid skattning av IBNYR används däremot alltid de predikterade antalet skador

$$\hat{X}_{ij}^{\text{IBNYR}} = \sum_{l=1}^{i-I+j} \hat{N}_{i,j-l+1} \hat{\pi}_l \hat{\mu} \hat{\gamma}_i.$$

Den totala okända reserven erhålls som summan av RBNS och IBNYR

$$\hat{X}_{ij}^{\text{RBNS}(1)} + \hat{X}_{ij}^{\text{IBNYR}} = \hat{X}_{ij}^{\text{RBNS}(2)} + \hat{X}_{ij}^{\text{IBNYR}}.$$

Sammanfattningsvis möjliggör double chain ladder-metoden en mer detaljerad reservsättning genom att modellera både de rapporterade skadorna och utbetalningarna. Detta ger en uppdelning av IBNR i RBNS och IBNYR vilket inte är möjligt med den klassiska chain ladder-metoden.

3.6 Bornhuetter double chain ladder

Följande teori bygger på Miranda et al. (2013).

Denna metod utgör en vidareutveckling av double chain ladder-metoden och introducerades efter att författarna uppmärksammat att skattningen av inflationsparametrarna $\hat{\gamma}_i$ per skadeperiod var för osäker.

Bornhuetter double chain ladder-metoden följer i huvudsak samma struktur som double chain ladder-metoden. Skillnaden är att inflationsparametrarna γ_i inte skattas med hjälp av skadetriangeln X , utan istället med en skadetriangel X^{incurred} innehållandes kända skadekostnader där

$$\text{känd skadekostnad} = \text{utbetalt} + \text{känd reserv}.$$

Metoden baseras således på tre stycken olika skadetrianglar, och metoden kan delas in i fyra olika steg.

I det första steget skattas modellparametrarna $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\pi}_l$ och $\hat{\gamma}_{i,0}$ med hjälp av double chain ladder-metoden på skadetrianglarna N och X .

I det andra steget tillämpas double chain ladder-metoden än en gång för att skatta modellparametrarna, men med skadetriangeln X^{incurred} istället för X . I detta steg behålls enbart skattningarna av inflationsparametrarna $\hat{\gamma}_{i,1}$. Skattningen av $\gamma_{i,1}$ sker på samma sätt som γ_i i double chain ladder, men utifrån känd skadekostnad sådan att

$$\hat{\gamma}_{i,1} = \frac{\hat{\alpha}_i^{\text{incurred}}}{\hat{\alpha}_i \hat{\mu}}$$

I det tredje steget ersätts $\hat{\gamma}_{i,0}$ med $\hat{\gamma}_{i,1}$. För enkelhetens skull kommer $\hat{\gamma}_{i,1}$ fortsättningsvis att betecknas $\hat{\gamma}_i$.

Slutligen används parametrarna $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\pi}_l$ och $\hat{\gamma}_i$ enligt samma metodik som i double chain ladder-metoden för att skatta $\hat{X}_{ij}^{\text{IBNYR}}$ respektive $\hat{X}_{ij}^{\text{RBNS}}$.

3.7 The collective reserving model

Denna teori följer av Wahl et al. (2019) och bygger vidare på samma idé som i double chain ladder-metoden. Till skillnad från double chain ladder-metoden som bygger på antagandet att endast en utbetalning sker per skada så bygger denna metod på att en skada kan ha flera utbetalningar.

Denna metod har tre modellantaganden enligt

1. Antalet skador N_{ij} som inträffar skadeperiod i och rapporteras in till försäkringsföretaget under utvecklingsperiod j antas vara oberoende och följa en överspridd Poissonfördelning enligt

$$N_{ij} \sim \text{ODP}(\nu_{ij}, \phi).$$

Det vill säga att väntevärdet och variansen av antalet skador ges av

$$\text{E}(N_{ij}) = \nu_{ij}$$

respektive

$$\text{Var}(N_{ij}) = \phi \nu_{ij}.$$

2. Låt den maximala handläggningstiden från det att ett skadeärende rapporterades in till försäkringsbolaget betecknas med d . Då innebär det att ett ärende som inkommer till försäkringsföretaget skadeperiod i och utvecklingsperiod j är avslutat efter $j + d$ perioder. Under denna handläggningstid kan ett skadeärende få flera utbetalningar, och dessa utbetalningar sker enligt en tidsdiskret Poissonprocess definierad enligt

$$N_{ijk}^{\text{paid}} | N_{ij} \sim \text{Pois}(\lambda_k N_{ij})$$

där $k = 1, \dots, d$, $\lambda_k \geq 0$ och där N_{ijk}^{paid} motsvarar antalet utbetalningar för de skadeärenden som inkom skadeperiod i under utvecklingsperiod j och som utbetalades under perioden $k = 1, \dots, d$ från det att skadeärendet inrapporterades. Det vill säga att $k = 1$ innebär att utbetalningen skedde samma utvecklingsperiod som rapporteringen av skadan.

3. Utbetalningarna Y_{ijkl} , där $l = 1, \dots, N_{ijk}^{\text{paid}}$ är den l :te utbetalningen, antas vara oberoende med väntevärde

$$E(Y_{ijkl}) = \mu$$

och varians

$$\text{Var}(Y_{ijkl}) = \sigma^2.$$

Detta ger upphov till den aggregerade skadekostnaden

$$X_{ijk} = \sum_{l=1}^{N_{ijk}^{\text{paid}}} Y_{ijk}^{(l)}$$

och antalet utbetalningar

$$N_{ij}^{\text{paid}} = \sum_{k=1}^{\min(d,j)} N_{i,j-k+1,k}^{\text{paid}}$$

för vilket det gäller att

$$N_{ij}^{\text{paid}} | \{N_{il}\}_{l \leq j} \sim \text{Pois} \left(\sum_{k=1}^{\min(d,j)} \lambda_k N_{i,j-k+1,j} \right).$$

Den totala skadekostnaden som har betalats ut under skadeperiod i och utvecklingsperiod j ges enligt

$$\begin{aligned} X_{ij} &= \sum_{k=1}^{\min(d,j)} X_{i,j-k+1,k} \\ &= \sum_{k=1}^{\min(d,j)} \sum_{l=1}^{N_{i,j-k+1,k}^{\text{paid}}} Y_{i,j-k+1,k,l} \\ &= \sum_{l=1}^{N_{ij}^{\text{paid}}} Y_{ijl} \end{aligned}$$

där $l = 1, \dots, N_{ij}^{\text{paid}}$.

Vidare håller det att väntevärdet och variansen av skadekostnaderna X_{ij} ges av

$$E(X_{ij} | N) = \mu \sum_{k=1}^{\min(d,j)} \lambda_k E(N_{i,j-k+1} | N)$$

respektive

$$\text{Var}(X_{ij}|N) = \phi \text{E}(X_{ij}|N)$$

där

$$\text{E}(N_{ij}|N) = \begin{cases} N_{ij} & \text{om skadan är observerad} \\ \nu_{ij} & \text{annars.} \end{cases}$$

och där ϕ är överspridningsparametern och ges enligt

$$\phi = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu} > 0.$$

Låt vidare

$$\Lambda = \sum_{k=1}^d \lambda_k$$

ange hur många utbetalningar som i genomsnitt görs per skadeärende,

$$\tilde{\mu} = \mu \Lambda$$

vara den genomsnittliga skadekostnaden per skadeärende,

$$\pi_k$$

andelen, med avseende på fördröjningen k , för antalet utbetalningar, eftersom

$$\sum_{k=1}^d \pi_k = 1$$

och

$$\psi_k = \tilde{\mu} \pi_k$$

representera hur den totala skadekostnaden fördelas över de olika fördröjningarna k . Då kan den förväntade skadekostnaden X_{ij} skrivas

$$\text{E}(X_{ij}|N) = \sum_{k=1}^{\min(d,j)} \psi_k N_{i,j-k+1}.$$

Låt

$$N_{ij}^{\text{RBNS}} = \sum_{k=j-(I-i)}^{\min(d,j)} N_{i,j-k+1,k}^{\text{paid}}$$

vara antalet anmälda RBNS skador och låt vidare

$$N_{ij}^{\text{IBNYR}} = \sum_{k=1}^{j+i-J} N_{i,j-k+1,k}^{\text{paid}}$$

vara antalet anmälda IBNYR skador för skadeperiod i och utvecklingsperiod j . Skadekostnaderna X_{ij}^{RBNS} och X_{ij}^{IBNYR} kan därefter definieras enligt

$$X_{ij}^{\text{RBNS}} = \sum_{l=1}^{N_{ij}^{\text{RBNS}}} Y_{ij}^{\text{RBNS}(l)}$$

respektive

$$X_{ij}^{\text{IBNYR}} = \sum_{l=1}^{N_{ij}^{\text{IBNYR}}} Y_{ij}^{\text{IBNYR}(l)}$$

där $Y_{ij}^{\text{RBNS}(l)}$ och $Y_{ij}^{\text{IBNYR}(l)}$ motsvarar den l :te utbetalningen. Genom att summerna dessa skadekostnader erhålls reserverna för skadeperiod i

$$R_i^{\text{RBNS}} = \sum_{j=I-i+1}^{J+d} = X_{ij}^{\text{RBNS}}$$

respektive

$$R_i^{\text{IBNYR}} = \sum_{j=I-i+1}^{J+d} = X_{ij}^{\text{IBNYR}}.$$

Därmed fås en utökad skadetriangel vilken kan ses i Tabell 4.

Tabell 4: Utökad skadetriangel med skadeutbetalningar X_{ij} där i motsvarar skadeperiod, j utvecklingsperiod och d är den maximala handläggningstiden.

$i \backslash j$	1	2	...	$J-1$	J	$J+1$	...	$J+d$
1	X_{11}	X_{12}	...	$X_{1,J-1}$	$X_{1,J}$			
2	X_{21}	X_{22}	...	$X_{2,J-1}$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$X_{i,J+1-i}$					
$I-1$	$X_{I-1,1}$	$X_{I-1,2}$						
I	$X_{I,1}$							

Genom att summera RBNS- och IBNYR-reserverna fås den totala reserven för skadeperiod i enligt

$$R_i = R_i^{\text{RBNS}} + R_i^{\text{IBNYR}}$$

varav den totala reserven för alla skadeperioder ges av

$$R = \sum_{i=1}^I R_i.$$

Väntevärdena för R_i^{RBNS} och R_i^{IBNYR} ges av

$$\begin{aligned} h_i^{\text{RBNS}}(\psi; N) &= \text{E} (R_i^{\text{RBNS}} | N) \\ &= \sum_{j=I-i+1}^{J+d} \sum_{k=j-I+1}^{\min(d,j)} \psi_k N_{i,j-k+1} \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} h_i^{\text{IBNYR}}(\psi; \nu) &= \text{E} (R_i^{\text{IBNYR}} | N) \\ &= \sum_{j=I-i+1}^{J+d} \sum_{k=\max(0,j-I+1)}^{\min(j-I+i-1,d)} \psi_k \nu_{i,j-k+1}. \end{aligned}$$

Således fås de totala RBNS- och IBNYR-reserverna enligt

$$R^{\text{RBNS}} = \sum_{i=1}^I h_i^{\text{RBNS}}(\psi; N)$$

och

$$R^{\text{IBNYR}} = \sum_{i=1}^I h_i^{\text{IBNYR}}(\psi; \nu).$$

Variansen av den totala reserven ges av

$$\begin{aligned} \text{Var}(R|N) &= \text{Var} \left(\sum_{i=1}^I R_i^{\text{RBNS}} + R_i^{\text{IBNYR}} | N \right) \\ &= \sum_{i=1}^I \text{Var} (R_i^{\text{RBNS}} | N) + \sum_{i=2}^I \text{Var} (R_i^{\text{IBNYR}}) \end{aligned}$$

där

$$\text{Var} (R_i^{\text{RBNS}} | N) = \varphi h_i^{\text{RBNS}}(\psi; N)$$

och

$$\text{Var} (R_i^{\text{IBNYR}}) = (\varphi + \phi \psi_{\bullet}) h_i^{\text{IBNYR}}(\psi; \nu)$$

där

$$\begin{aligned} \psi_{\bullet} &= \sum_{k=1}^d \psi_k \\ &= \tilde{\mu} \sum_{k=1}^d \pi_k \\ &= \tilde{\mu} \\ &= \mu \Lambda. \end{aligned}$$

Låt $\mathcal{F}_0$ beteckna informationsmängden från de observerade värdena för antal skador N_{ij} och utbetalningar X_{ij} och låt vidare $\mathcal{A}_0$ vara indexmängden för dessa observationer. Låt även

$$|\mathcal{A}_0| = I(I+1)/2$$

beteckna antalet celler i de observerade trianglarna.

Parametrarna ψ_k skattas genom att maximera kvasilikelihoodfunktionen

$$l^q(\psi; \mathcal{F}_0) = \sum_{i,j \in \mathcal{A}_0} \left(X_{ij} \log \left(\sum_{k=1}^{\min(d,j)} \psi_k N_{i,j-k+1} \right) - \sum_{k=1}^{\min(d,j)} \psi_k N_{i,j-k+1} \right)$$

genom att derivera den med avseende på ψ_k , sätta derivatan lika med 0 och därefter lösa det resulterande ekvationssystemet. Den genomsnittliga skadekostnaden per utbetalning estimeras genom

$$\hat{\mu} = \frac{1}{|\mathcal{A}_0|} \sum_{i,j \in \mathcal{A}_0} \frac{X_{ij}}{N_{ij}^{\text{paid}}}.$$

Därefter kan resterande parametrar skattas enligt

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_k &= \frac{\hat{\psi}_k}{\sum_{j=1}^d \hat{\psi}_j} \\ \hat{\Lambda} &= \frac{\sum_{j=1}^d \hat{\psi}_j}{\hat{\mu}} \\ \hat{\lambda}_k &= \frac{\hat{\psi}_k}{\hat{\mu}} \\ \hat{\sigma}^2 &= \hat{\varphi} \hat{\mu} - (\hat{\mu})^2 \end{aligned}$$

varav överspridningsparametern φ för utbetalda skadekostnader skattas enligt

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{|\mathcal{A}_0| - (d+1)} \sum_{i,j \in \mathcal{A}_0} \frac{\left(X_{ij} - \sum_{k=1}^{\min(d,j)} \hat{\psi}_k N_{i,j-k+1} \right)^2}{\sum_{k=1}^{\min(d,j)} \hat{\psi}_k N_{i,j-k+1}}$$

och överspridningsparametern ϕ för antal skador skattas enligt

$$\hat{\phi} = \frac{1}{|\mathcal{A}_0| - (I + (I-1))} \sum_{i,j \in \mathcal{A}_0} \frac{(N_{ij} - \hat{\nu}_{ij})^2}{\hat{\nu}_{ij}}$$

3.8 Mean Squared Error Of Prediction

För att utvärdera osäkerheten hos de olika reservsättningsmetoderna används mean squared error of prediction, MSEP. För en slumpvariabel X , en prediktor $\hat{X}$ och en filtrering $\mathcal{F}$ definieras MSEP som

$$\begin{aligned}\text{MSEP}(X, \hat{X}|\mathcal{F}) &= \text{E} \left((X - \hat{X})^2 | \mathcal{F} \right) \\ &= \text{Var}(X|\mathcal{F}) + \left(\text{E}(X|\mathcal{F}) - \hat{X} \right)^2.\end{aligned}$$

Processrisken

$$\text{Var}(X|\mathcal{F})$$

beskriver variationen i X givet informationen i $\mathcal{F}$ och representerar det fel som uppstår på grund av slumpmässiga variationer i processen. Parameterfelet

$$\left(\text{E}(X|\mathcal{F}) - \hat{X} \right)^2$$

beskriver det fel som uppstår när prediktorn $\hat{X}$ avviker från det betingade väntevärdet, vilket beror på osäkerhet i skattningen av modellparametrarna.

I denna studie beräknas MSEP för den totala skadereserven R där MSEP betingas på redan observerad skadehistorik $\mathcal{C}$ enligt

$$\text{MSEP}_{\mathcal{C}}(R, \hat{R}) = \text{E} \left((R - \hat{R})^2 | \mathcal{C} \right).$$

3.9 Copula

Följande teori bygger på Joe (2014).

En copula är en funktion som kopplar samman marginalfördelningar till en gemensam multivariat fördelning, vilket möjliggör att beroendet mellan variabler kan modelleras separat från deras individuella fördelningar. En multivariat fördelning visar hur sannolikt det är att en specifik kombination av värden inträffar samtidigt medan en marginalfördelning visar fördelningen för en av variablerna.

Den gaussiska copulan bygger på den multivariata normalfördelningen. Låt U_1 och U_2 vara uniformt fördelade stokastiska variabler på intervallet $[0, 1]$, där u_1 och u_2 betecknar observationer av dessa variabler. Låt vidare Φ^{-1} vara inversen av standardnormalfördelningens fördelningsfunktion och Φ_{ρ} vara den bivariata normalfördelade fördelningsfunktionen med korrelationsparameter ρ . Då definieras den gaussiska copulan som

$$C_{\rho}(u_1, u_2) = \Phi_{\rho}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)).$$

Korrelationsparametern $\rho \in [-1, 1]$ anger riktningen och styrkan på beroendet mellan variablerna. När $\rho > 0$ innebär det att två variabler rör sig i samma riktning, medan när $\rho < 0$ innebär det att variablerna rör sig i motsatt riktning. När $\rho = 0$ råder det oberoende mellan variablerna.

Vid simulering genereras först en korrelationsmatris som beskriver beroendestrukturen mellan variablerna. Därefter används denna korrelationsmatris för att generera slumpmässiga observationer från en multivariat normalfördelning. Sedan omvandlas observationerna till värden mellan 0 och 1 med hjälp av standardnormalfördelningens fördelningsfunktion. Dessa värden transformeras därefter med hjälp av respektive marginalfördelnings inversa fördelningsfunktion för att generera observationer som följer de valda marginalfördelningarna. På så sätt erhålls simulerad data där varje variabel följer sin egen fördelning samtidigt som beroendestrukturen mellan variablerna bevaras.

4 Resultat

I detta avsnitt redovisas resultaten från de olika reservsättningsmetoderna. Resultatet diskuteras i diskussionsdelen i nästa avsnitt för att besvara denna studiens syften. De olika reservsättningsmetoderna chain ladder, dubbel chain ladder, Bornhuetter dubbel chain ladder, the collective reserving model och Stockholm Schnieper förkortas till CL, DCL, BDCL, CRM och SS, respektive. Resultaten presenteras i miljoner SEK. För CRM har fördröjningsparametern k skattats från empirisk data. För varje segment och bolag beräknas RMSEP som ett mått på osäkerheten i reservskattningen. Måttet definieras som kvadratroten ur den genomsnittliga kvadratiska avvikelsen mellan skattad reserv och sann simulerad reserv över samtliga simuleringar och ges enligt

$$\text{RMSEP}_c = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{s=1}^{1000} \left(R^{(s)} - \hat{R}^{(s)} \right)^2}$$

där $\hat{R}^{(s)}$ betecknar den skattade totala reserven i simulering s och $R^{(s)}$ den sanna totala simulerade reserven. För att möjliggöra jämförelser mellan olika segment och bolag med olika reservstorlekar standardiseras RMSEP med den genomsnittliga sanna reserven

$$\bar{R} = \frac{1}{1000} \sum_{s=1}^{1000} R^{(s)}$$

sådan att

$$\text{relativ RMSEP} = \frac{\text{RMSEP}_c}{\bar{R}}.$$

Vidare redovisas de genomsnittliga värdena för total IBNER, IBNYR och skadereserv. För att få fram IBNER från DCL, BDCL och CRM har känd reserv subtraherats från RBNS. Därefter presenteras täthetsplottar för den totala skadereserven för respektive reservsättningsmetod samt plottar som möjliggör en

jämförelse mellan sann och predikterad reserv för varje skadekvartal. Vidare redovisas inflationsparametrarna γ_i per kvartal för DCL och BDCL. Avslutningsvis presenteras genomsnittlig skadekostnad μ för ett skadeärende för DCL, BDCL och CRM.

4.1 Simulerad data

I detta avsnitt redovisas resultaten för simulerad data. Som tidigare beskrivits under avsnittet om simulerat datamaterial kommer inte resultaten för Stockholm Schnieper-metoden att presenteras på grund av att komplexiteten i simuleringarna inte möjliggjorde en tillräckligt tillförlitlig utvärdering av metoden. Resultatdelen för simulerad data fokuserar därför på de övriga reservsättningsmetoderna.

4.1.1 Segment a

I Tabell 5 presenteras relativ RMSEP som anger osäkerheten i reservskattningen i relation till reservens storlek. Ett högre värde innebär att metoden i genomsnitt ligger längre från den sanna reserven medan ett lägre värde innebär att reserven i genomsnitt ligger närmare den sanna simulerade reserven och därmed har högre träffsäkerhet. RMSEP anger inte om metoden systematiskt över- eller underskattar reserven, utan bara hur stor den typiska avvikelsen är. För varje bolag har den metod som ger lägst relativ RMSEP fetmarkerats.

Tabell 5: Relativ RMSEP.

Bolag	CL	DCL	BDCL	CRM
1	0.124	0.124	0.090	0.093
2	0.120	0.120	0.090	0.101
3	0.083	0.083	0.074	0.078

I Tabell 6 redovisas de reserver som motsvarar de belopp som återstår att betalas ut för skador som har rapporterats in men som ännu inte är slutreglerade. En positiv reserv innebär att ytterligare utbetalningar förväntas medan en negativ reserv tyder på att den ursprungliga reserven varit för hög och därmed behöver reduceras.

Tabell 6: Total IBNER.

Bolag	DCL	BDCL	CRM
1	15.7	18.1	14.5
2	6.8	5.2	6.1
3	9.1	11.2	8.9

Tabell 7 visar de reserver som avser skador som har inträffat men som ännu inte har rapporterats in till försäkringsbolaget medan Tabell 8 visar den totala skadereserven. I Tabell 8 är den metod som ger en total skadereserv närmast det sanna värdet markerad i fetstil.

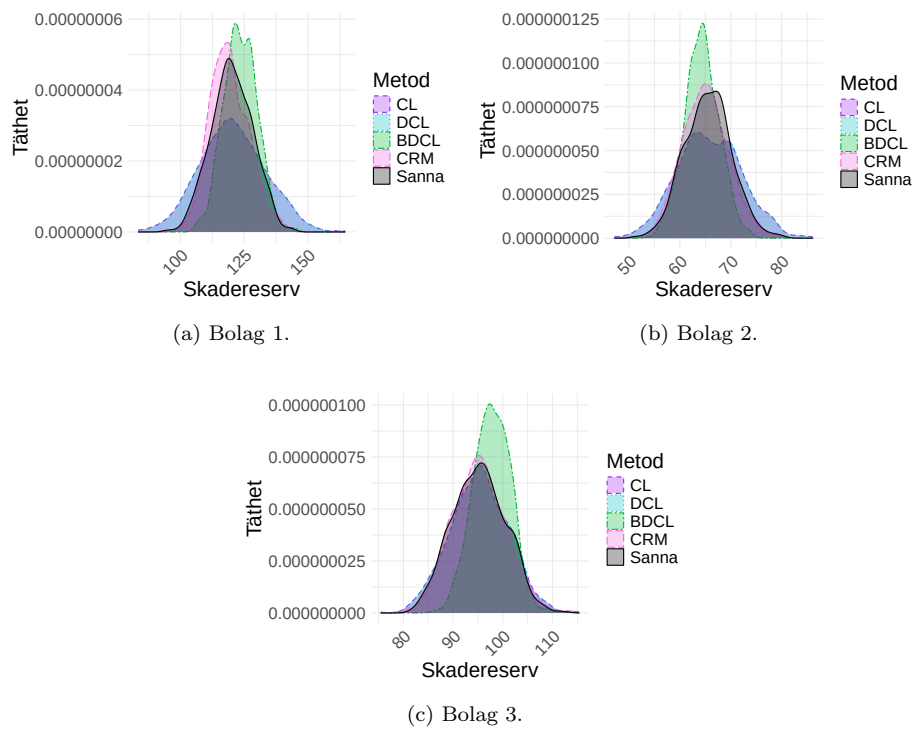
Tabell 7: Total IBNYR.

Bolag	DCL	BDCL	CRM
1	20.6	21.3	20.4
2	7.4	7.4	7.3
3	13.4	13.8	13.4

Tabell 8: Total skadereserv.

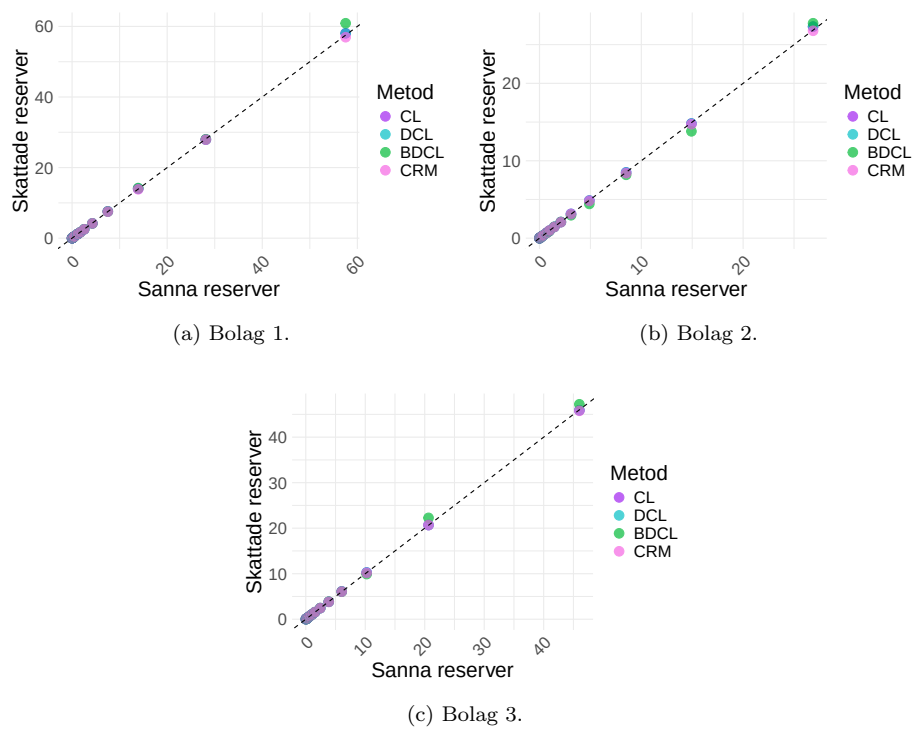
Bolag	CL	DCL	BDCL	CRM	Sann
1	120.5	120.5	123.5	119.1	120.2
2	65.8	65.8	64.3	65.1	65.5
3	95.3	95.3	97.8	95.2	95.2

I Figur 3 illustreras täthetsplottar som visar fördelningen av de predikterade totala reserverna för respektive reservsättningsmetod i relation till fördelningen av den sanna simulerade reserven. Om en metods täthetskurva är förskjuten åt höger i förhållande till den sanna fördelningen innebär det att metoden tenderar att överskatta reserven, medan en förskjutning åt vänster tyder på en underskattning. En bredare fördelning än den sanna indikerar på högre variation i skattningarna och därmed högre osäkerhet i skattningarna, medan en smalare fördelning tyder på att variationen i reserven underskattas.



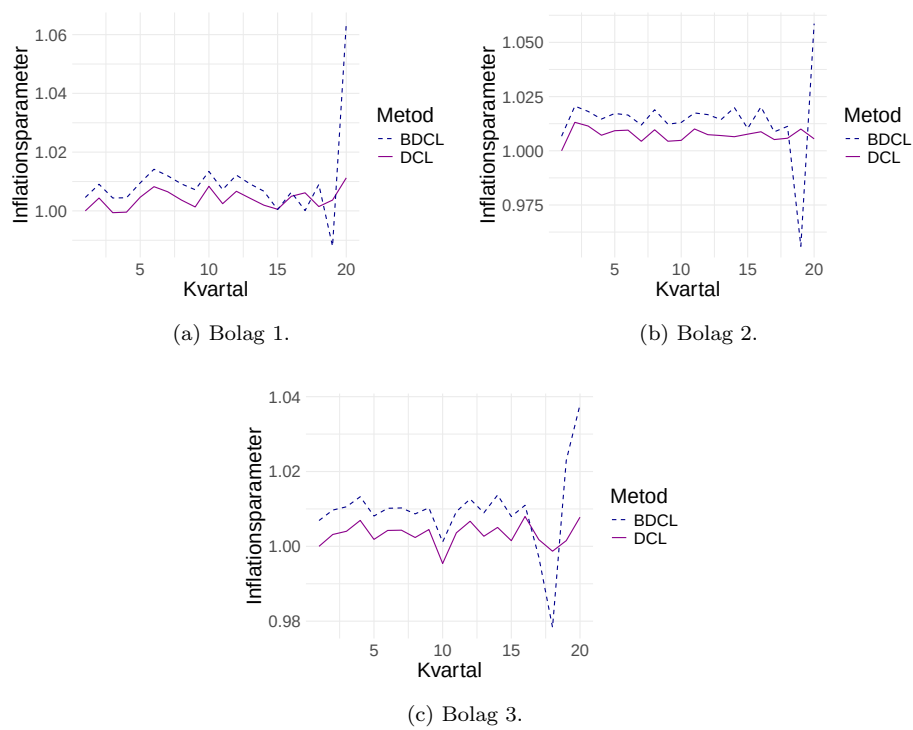
Figur 3: Täthetsplot som visar fördelningen av den totala skadereserven för respektive reservsättningsmetod baserat på 1000 simuleringar.

I Figur 4 jämförs den sanna simulerade reserven på x-axeln och den skattade reserven på y-axeln för respektive reservsättningsmetod. Varje punkt anger den skattade reserven för ett visst skadekvartal. Punkter som ligger på diagonalen motsvarar en exakt överensstämmelse mellan skattad och sann reserv. Punkter ovanför diagonalen innebär att metoden överskattar reserven, medan punkter nedanför diagonalen innebär att metoden underskattar reserven.



Figur 4: Sann simulerad reserv mot skattad reserv för respektive reservsättningsmetod för 1000 simuleringar.

I Figur 5 presenteras inflationsparametern γ_i per kvartal för DCL och BDCL.



Figur 5: Inflationsparameter per kvartal för DCL och BDCL.

Tabell 9: Genomsnittlig skadekostnad μ för ett ärende. Eftersom DCL och BDCL har identiska μ redovisas endast värdena för DCL.

Bolag	DCL	CRM
1	11 479	11 269
2	8002	7827
3	7901	7771

4.1.2 Segment b

Upplägget för redovisningen av resultatet för segment b följer samma struktur som för segment a, och redovisas i Tabell 10-14 samt Figur 6-8.

Tabell 10: Relativ RMSEP.

Bolag	CL	DCL	BDCL	CRM
1	0.187	0.187	0.120	0.120
2	0.203	0.203	0.120	0.135
3	0.225	0.225	0.194	0.148

Tabell 11: Total IBNER.

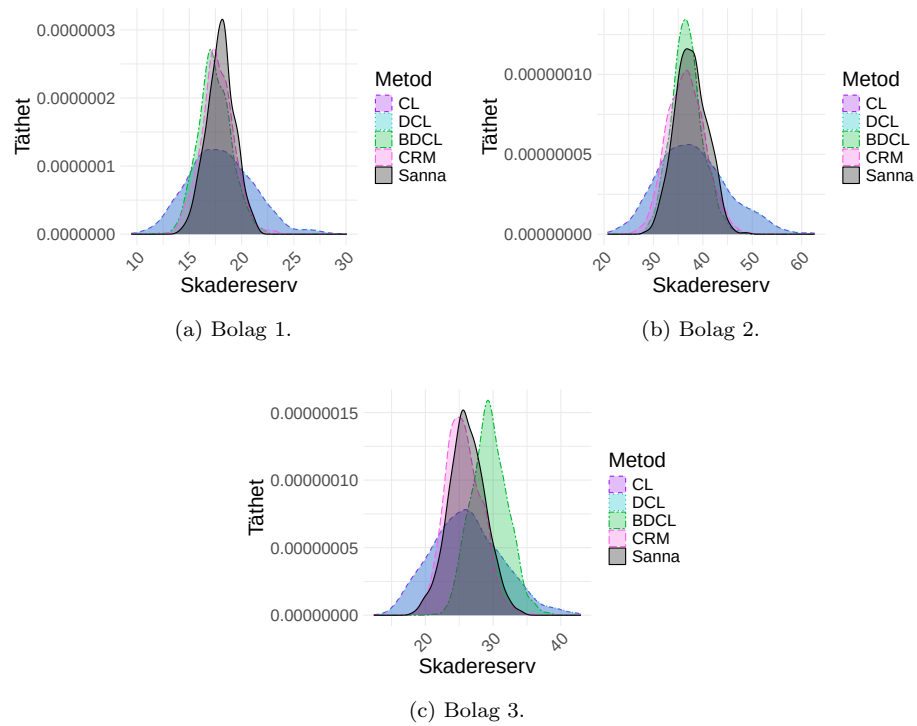
Bolag	DCL	BDCL	CRM
1	14.9	14.2	14.6
2	12.8	11.5	11.5
3	6.2	8.9	5.6

Tabell 12: Total IBNYR.

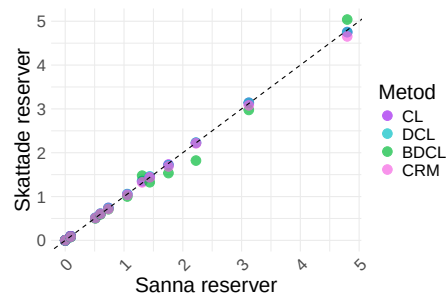
Bolag	DCL	BDCL	CRM
1	1.5	1.6	1.5
2	2.6	2.5	2.4
3	2.5	3.0	2.5

Tabell 13: Total skadereserv.

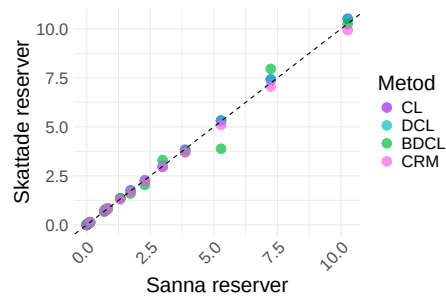
Bolag	CL	DCL	BDCL	CRM	Sann
1	18.0	18.0	17.4	17.7	18.0
2	38.0	38.1	36.7	36.6	37.6
3	26.1	26.2	29.4	25.6	26.1



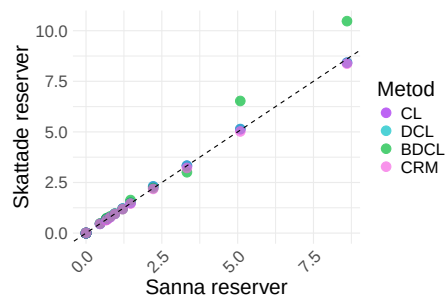
Figur 6: Täthetsplot som visar fördelningen av den totala skadereserven för respektive reservsättningsmetod baserat på 1000 simuleringar.



(a) Bolag 1.

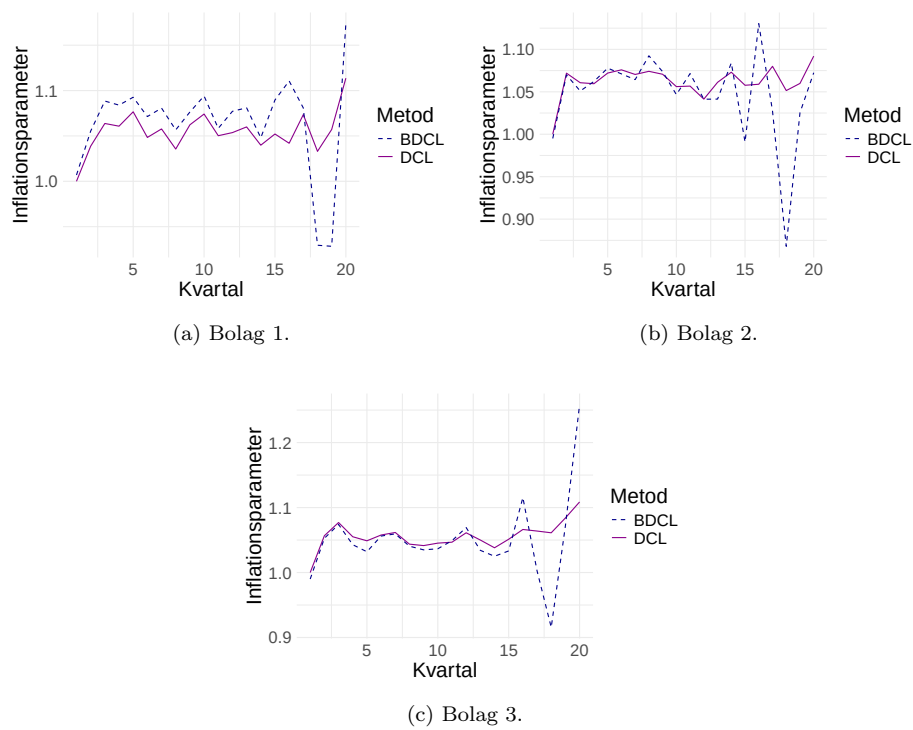


(b) Bolag 2.



(c) Bolag 3.

Figur 7: Sann simulerad reserv mot skattad reserv för respektive reservsättningsmetod för 1000 simuleringar.



Figur 8: Inflationsparameter per kvartal för DCL och BDCL.

Tabell 14: Genomsnittlig skadekostnad μ för ett ärende. Eftersom DCL och BDCL har identiska μ redovisas endast värdena för DCL.

Bolag	DCL	CRM
1	65 297	59 044
2	41 567	38 565
3	40 185	37 094

4.1.3 Segment c

Resultaten för segment c presenteras på samma sätt som för segment a och b och sammanställs i Tabell 15-19 och Figur 9-11.

Tabell 15: Relativ RMSEP.

Bolag	CL	DCL	BDCL	CRM
1	0.144	0.145	0.097	0.148
2	0.188	0.188	0.135	0.120
3	0.181	0.181	0.108	0.112

Tabell 16: Total IBNER.

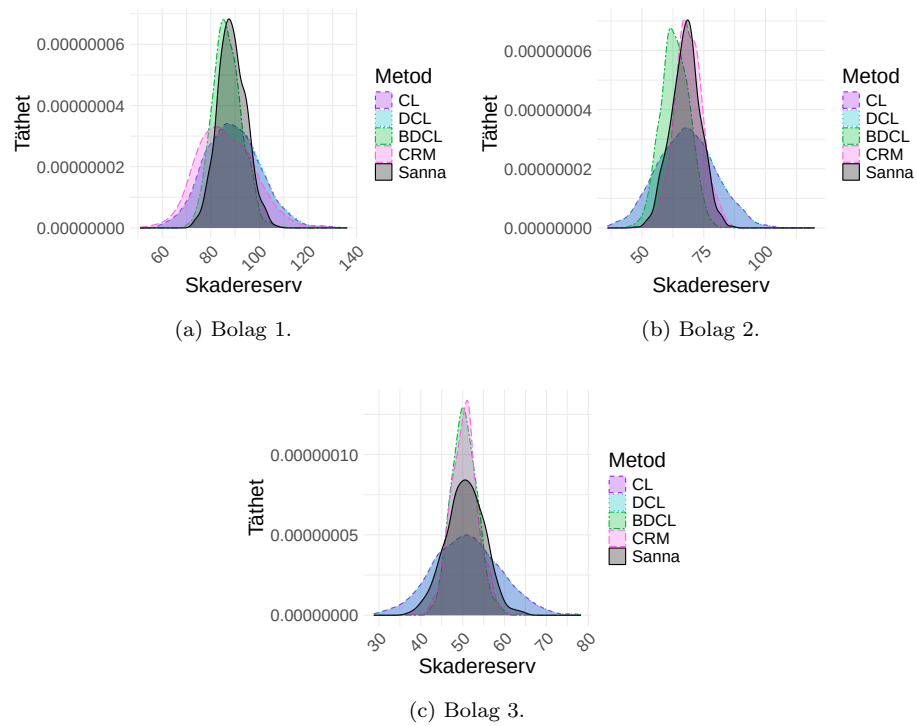
Bolag	DCL	BDCL	CRM
1	10.0	7.9	7.3
2	-12.1	-15.8	-11.3
3	-5.5	-6.2	-6.0

Tabell 17: Total IBNYR.

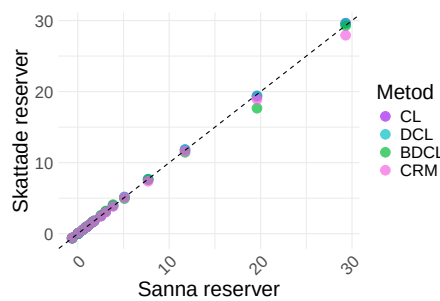
Bolag	DCL	BDCL	CRM
1	14.2	13.9	14.0
2	5.7	4.7	5.6
3	5.2	5.2	5.1

Tabell 18: Total skadereserv.

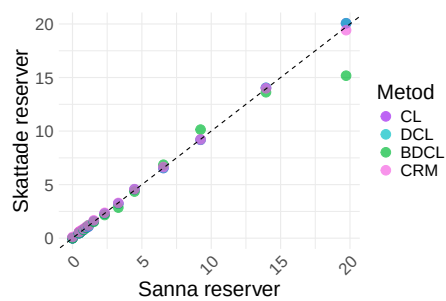
Bolag	CL	DCL	BDCL	CRM	Sann
1	88.8	89.2	86.7	86.2	88.7
2	68.0	68.0	63.4	68.7	67.6
3	51.0	51.0	50.4	50.4	50.6



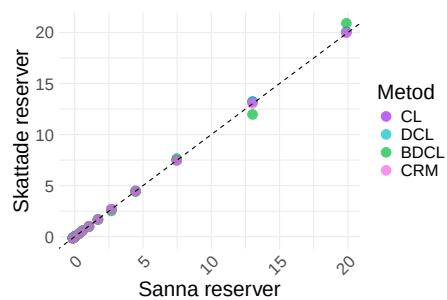
Figur 9: Täthetsplot som visar fördelningen av den totala skadereserven för respektive reservsättningsmetod baserat på 1000 simuleringar.



(a) Bolag 1.

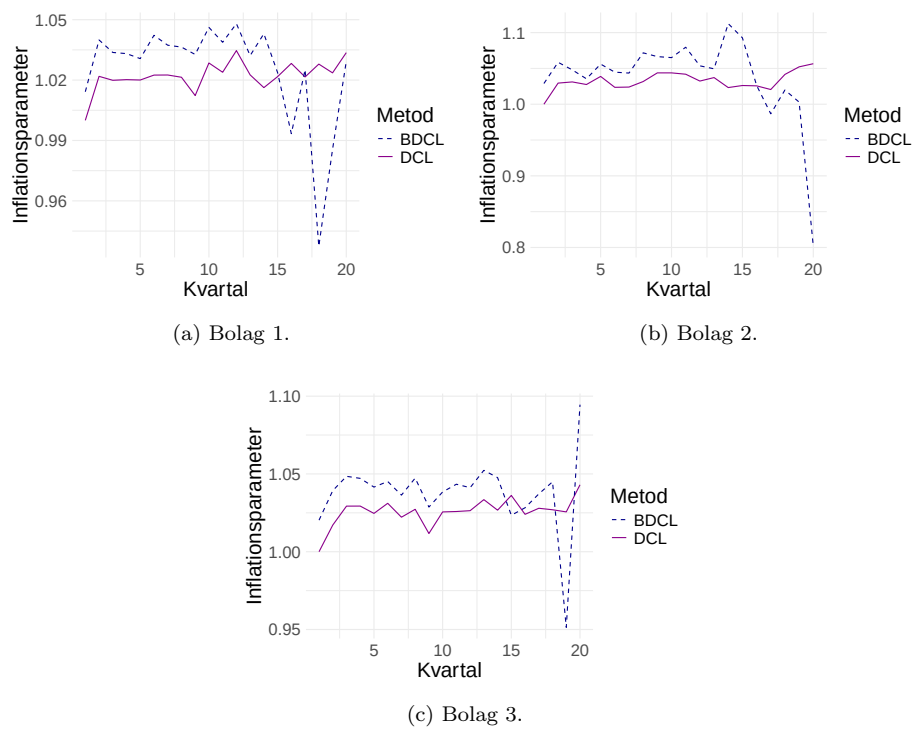


(b) Bolag 2.



(c) Bolag 3.

Figur 10: Sann simulerad reserv mot skattad reserv för respektive reservsättningsmetod för 1000 simuleringar.



Figur 11: Inflationsparameter per kvartal för DCL och BDCL.

Tabell 19: Genomsnittlig skadekostnad μ för ett ärende. Eftersom DCL och BDCL har identiska μ redovisas endast värdena för DCL.

Bolag	DCL	CRM
1	51 397	47 691
2	54 174	52 921
3	32 113	31 718

4.1.4 Segment d

Presentationen av resultaten för segment d följer samma upplägg och struktur som för de föregående segmenten och redovisas i Tabell 20-24 och Figur 12-14.

Tabell 20: Relativ RMSEP.

Bolag	CL	DCL	BDCL	CRM
1	0.182	0.182	0.153	0.129
2	0.189	0.189	0.116	0.129
3	0.228	0.228	0.452	0.160

Tabell 21: Total IBNER.

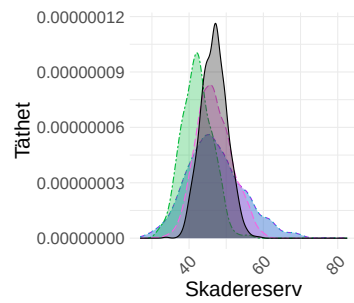
Bolag	DCL	BDCL	CRM
1	14.0	9.5	13.6
2	-0.9	-5.3	0.1
3	-15.1	-5.2	-15.2

Tabell 22: Total IBNYR.

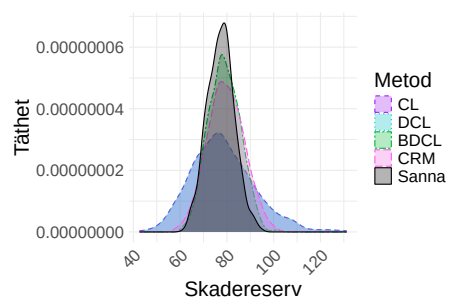
Bolag	DCL	BDCL	CRM
1	9.0	8.7	9.2
2	9.8	14.7	10.0
3	4.3	4.4	4.3

Tabell 23: Total skadereserv.

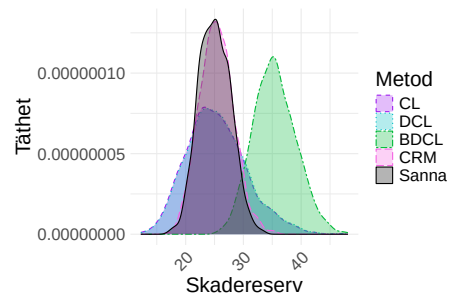
Bolag	CL	DCL	BDCL	CRM	Sann
1	47.0	47.0	42.1	46.7	46.7
2	78.4	78.4	78.9	79.6	77.3
3	25.4	25.5	35.4	25.3	25.0



(a) Bolag 1.

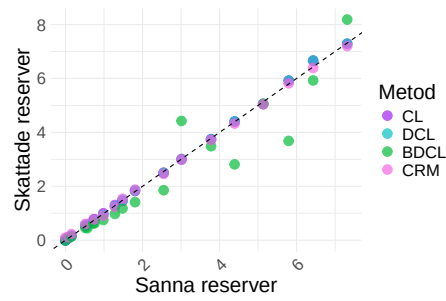


(b) Bolag 2.

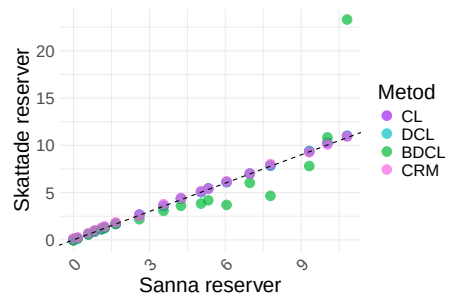


(c) Bolag 3.

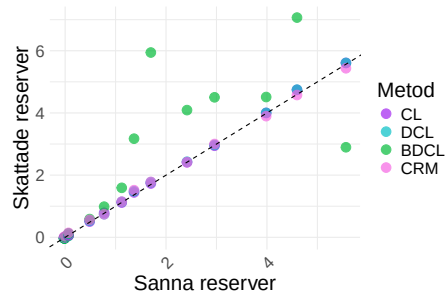
Figur 12: Täthetsplot som visar fördelningen av den totala skadereserven för respektive reservsättningsmetod baserat på 1000 simuleringar.



(a) Bolag 1.

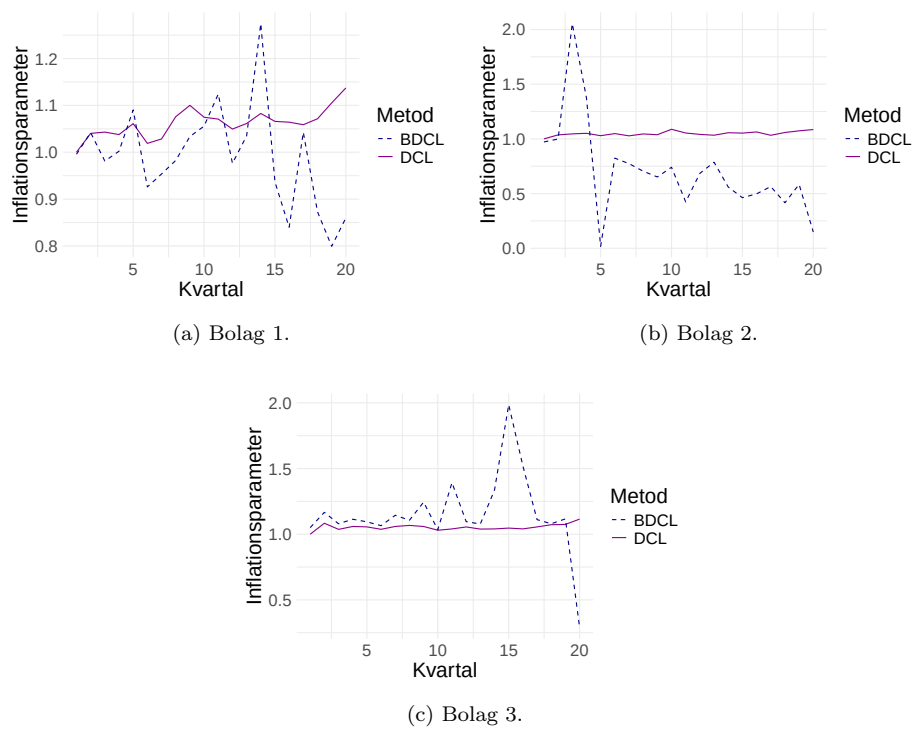


(b) Bolag 2.



(c) Bolag 3.

Figur 13: Sann simulerad reserv mot skattad reserv för respektive reservsättningsmetod för 1000 simuleringar.



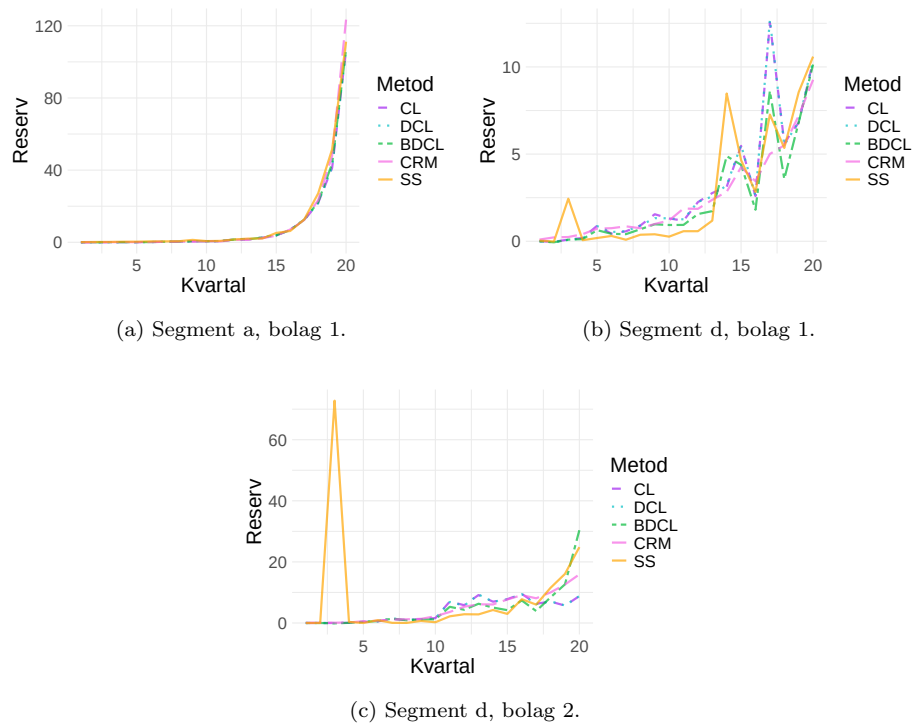
Figur 14: Inflationsparameter per kvartal för DCL och BDCL.

Tabell 24: Genomsnittlig skadekostnad μ för ett ärende. Eftersom DCL och BDCL har identiska μ redovisas endast värdena för DCL.

Bolag	DCL	CRM
1	47 933	45 580
2	98 047	94 181
3	67 358	61 497

4.2 Empirisk data

I detta avsnitt presenteras resultat för empirisk data för att demonstrera hur de olika metoderna kan bete sig för riktig data. På grund av sekretesskäl har resultatet skalats om genom att multiplicera resultatet med en faktor. Resultaten följer samma upplägg och struktur som för simulerad data och redovisas i Tabell 25-28 och Figur 15-16. Notera att den sanna reserven inte kan redovisas för empirisk data eftersom det faktiska utfallet ännu inte är känt.



Figur 15: Skattad reserv för respektive reservsättningsmetod.

Tabell 25: Total IBNER.

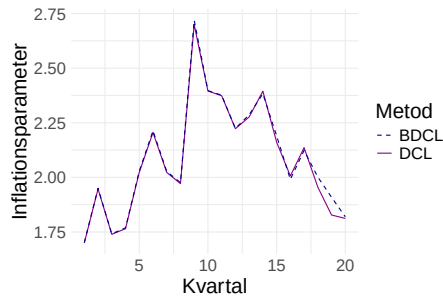
Bolag	Segment	DCL	BDCL	CRM	SS
1	a	17.1	19.5	35.6	-2.7
1	d	4.9	-3.4	-3.5	-8.5
2	d	-43.7	-40.7	-37.1	0.7

Tabell 26: Total IBNYR.

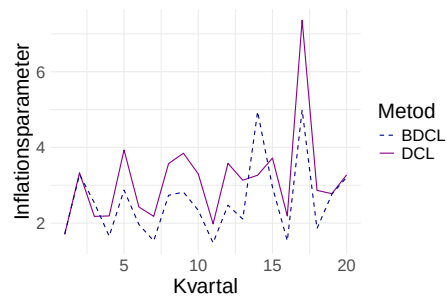
Bolag	Segment	DCL	BDCL	CRM	SS
1	a	37.5	37.8	41.9	80.2
1	d	13.4	11.8	13.1	22.4
2	d	9.2	19.7	14.7	41.1

Tabell 27: Total skadereserv.

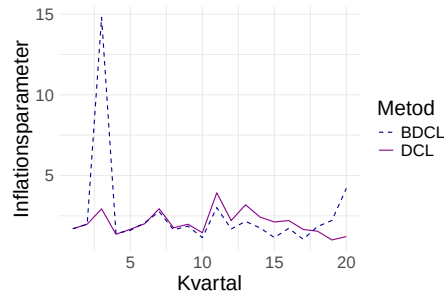
Bolag	Segment	CL	DCL	BDCL	CRM	SS
1	a	201.5	202.3	205.0	225.1	225.2
1	d	58.6	58.5	48.7	49.9	54.2
2	d	80.3	80.1	93.5	92.2	156.4



(a) Segment a, bolag 1.



(b) Segment d, bolag 1.



(c) Segment d, bolag 2.

Figur 16: Inflationsparameter per kvartal för DCL och BDCL.

Tabell 28: Genomsnittlig skadekostnad μ för ett ärende. Eftersom DCL och BDCL har identiska μ redovisas endast värdena för DCL.

Bolag	Segment	DCL	CRM
1	a	15 711	19 279
1	d	32 387	56 300
2	d	89 070	115 228

5 Diskussion

I detta avsnitt diskuteras resultaten för att besvara denna studiens två huvudsakliga syften, nämligen vilken metod som är fördelaktig att använda jämfört med chain ladder, samt skillnader i skaderegleringsmetodik mellan olika skaderegleringsavdelningar.

5.1 Simulerad data

I följande avsnitt diskuteras resultatet för simulerad data. Inledningsvis diskuteras relativ RMSEP följt av IBNER, IBNYR och total skadereserv. Avslutningsvis diskuteras täthetsplottarna samt utbetalningsmönster per kvartal.

5.1.1 Relativ RMSEP

Den relativa RMSEP, som presenteras i Tabell 5, 10, 15 och 20, varierar tydligt mellan de olika segmenten. För segment a ligger den mellan 7.4-12.4 % och för segment c ligger den mellan 9.7-18.8 %. Segmenten b och d uppvisar däremot högre nivåer, där segment b ligger mellan 12.0-22.5 % medan segment d ligger mellan 11.6-45.2 %. För segment d är det BDCL som står för den högre relativa RMSEP för bolag 3, medan resterande metoder ger värden på mellan 11.6-22.8 %. För segment d kan även detta ses i Figur 12 (a) och (c) där den totala skadereserven för BDCL understiger den sanna reserven, respektive. Detta driver i sin tur upp den relativa RMSEP för just denna kombination av metod, segment och bolag.

Vidare är de relativa RMSEP-värdena mellan metoderna relativt stabila inom varje segment och bolag. Speciellt ger CL och DCL mycket likartade resultat, med endast marginella skillnader. Detta tyder på att den ytterligare information som DCL introducerar, jämfört med chain ladder, inte ger någon tydlig förbättring gällande den totala skadereserven under de simuleringsförutsättningar som används i studien. Således är CL en robust basmetod eftersom den presterar likt den mer avancerade DCL-modellen.

BDCL uppvisar för det mesta goda resultat, och är tillsammans med CRM den metod som ofta ger lägst relativ RMSEP, ofta med en påtaglig förbättring jämfört med CL och DCL. För segment a ger BDCL konsekvent lägst relativ RMSEP för samtliga bolag, och även för segment b och c utgör BDCL konkurrens och ger lägst relativ RMSEP för både bolag 1 och 2 för segment b, och bolag 1 och 3 för segment c. Samtidigt visar resultaten att BDCL presterar betydligt sämre för bolag 3 i segment d där den relativa RMSEP uppgår till 45.2 %.

CRM uppvisar också goda resultat och ger lägst relativ RMSEP för bolag 2 i segment c samt bolag 1 och 3 i segment d.

Skillnaderna i relativ RMSEP är inte alltid stora, men i vissa fall är de procentuella skillnaderna betydande. Exempelvis minskar CRM den relativa RM-

SEP från 18.8 % till 12.0 % för segment c, bolag 2. Detta utgör en avsevärd förbättring i förhållande till reservens storlek. Detta indikerar att CRM har en särskild styrka för segment med mer komplex skadeutveckling, medan vinsten är mindre för mer stabila segment.

5.1.2 IBNER och IBNYR

Resultaten för IBNER och IBNYR ger ytterligare information om hur de olika metoderna fördelar den totala reserven mellan redan rapporterade skador och ännu ej rapporterade skador. IBNER ger därmed information på om skaderegleringsavdelningen i genomsnitt har under- eller överskattat de avsatta reserverna för rapporterade skadeärenden medan IBNYR ger information om hur mycket som förväntas betalas ut för skador som har inträffat, men ännu ej rapporterats in.

IBNYR presenteras i Tabell 7, 12, 17 och 22 och är relativt lik mellan de olika reservsättningsmetoderna inom samma bolag och segment. IBNER, som presenteras i Tabell 6, 11, 16 och 21, uppvisar däremot större variation, vilket tyder på att valet av reservsättningsmetod har större påverkan på IBNER än IBNYR.

Samtliga värden för både IBNER och IBNYR är positiva och av liknande storleksordning för segment a. Skillnaderna mellan metoderna är små, vilket innebär att samtliga metoder fångar skadeutvecklingen på ett likartat sätt för detta segment.

För segment b är IBNER betydligt större än IBNYR. Detta indikerar att osäkerheten i redan rapporterade skador utgör den större delen av den totala osäkerheten kring reserven. Storleken på IBNER skiljer sig åt mellan metoderna, men skillnaderna är inte särskilt stora.

Segment c uppvisar negativ IBNER för bolag 2 och 3 för samtliga tre metoder. Värdena skiljer sig åt något, men sammantaget innebär detta att reserven i genomsnitt har överskattats av skadereglerarna och att reserven således behöver skrivas ned.

För segment d är IBNER genomgående negativ för bolag 3 för samtliga tre metoder, där DCL och CRM ger mycket liknande resultat. Detta indikerar att de ursprungliga reserverna för redan inrapporterade skador i genomsnitt har överskattats för detta bolag. För bolag 2 är det däremot blandat resultat där DCL och BDCL ger en negativ IBNER medan CRM och SS ger en positiv.

Skillnaden mellan metoderna för de olika segmenten och bolagen där IBNER är negativ består främst i hur stora nedskrivningarna blir, medan riktningen är densamma. Detta tyder på en systematisk överskattning av den kända reserven, snarare än skillnader som drivs av enskilda metoder.

Resultaten tyder på att skaderegleringsavdelningarnas metodik skiljer sig åt

mellan de olika bolagen, särskilt för segmenten c och d. För segment c tycks bolag 2 och 3 systematiskt överskatta den kända reserven, medan bolag 3 och eventuellt bolag 2 gör detsamma för segment d.

5.1.3 Total skadereserv

Följande diskussion utgår från Tabell 8, 13, 18 och 23. När det gäller skattning av den totala skadereserven är det i de flesta fall metoderna CL, DCL och CRM som predikterar närmast den sanna reserven. För segment a är det för bolag 1, 2 och 3 metoderna CL, DCL och CRM som predikterar närmast, respektive. För bolag 3 predikterar CRM dessutom exakt den sanna reserven, medan CL och DCL ligger väldigt nära med en överskattning på 0.1 miljoner.

För segment b är det genomgående CL som ger de mest träffsäkra reserverna för samtliga tre bolag, även om CRM också ligger nära den sanna reserven.

För segment c är det återigen CL, DCL och CRM som ger de mest träffsäkra reserverna för bolag 1, 2 och 3, respektive.

För segment d är det CRM, CL och CRM som predikterar närmast den sanna reserven för bolag 1, 2 och 3, respektive.

Trots att BDCL uppvisar lägst relativ RMSEP för exempelvis segment a i Tabell 5 är det CL, DCL och CRM som i genomsnitt ligger närmast den sanna totala reserven, se Tabell 8. Detta indikerar att BDCL ger mer precisa skattningar i termer av kvadratisk fel, men inte nödvändigtvis lägst systematisk avvikelse. En möjlig förklaring är att BDCL kan avvika något systematiskt från det sanna värdet, men med låg variation, medan exempelvis CL i vissa fall träffar mycket nära och i andra fall avviker mer. Detta resulterar i en lägre RMSEP för BDCL och en högre RMSEP för CL, trots att CL i genomsnitt kan ligga närmare det sanna värdet. Detta indikerar även att inflationsjusteringen som tillämpas i BDCL, vilka kan ses i Figur 6, 9, 12 och 15, bidrar till en mer stabil men något systematiskt förskjuten skattning av den totala reserven. Generellt sett verkar det som att när inflationsparametern justeras nedåt tenderar BDCL att underskatta den sanna reserven, medan en uppjustering i stället leder till en överskattning.

CRM antar ofta en lägre total skadekostnad än DCL, vilka presenteras i Tabell 9, 14, 19 och 24. Detta kan förklaras av att DCL genomgående har en högre genomsnittlig skadekostnad μ för ett försäkringsärende samt att modellen inkluderar en inflationsparameter, vilket CRM saknar. Vidare uppvisar CRM och DCL mycket liknande fördröjningsfaktorer π_i , vilka kan ses i Appendix i Figur 21-24.

Generellt ger CL och DCL asymptotiskt likvärdiga resultat, och CRM tenderar också att anta värden nära dessa två metoder samt den sanna reserven. BDCL uppvisar viss variation. Den avviker sällan kraftigt från den sanna reserven, men når inte heller samma precision som CL, DCL och CRM.

5.1.4 Täthetsplottar och osäkerhet i den totala reserven

Täthetsplottarna i Figur 3, 6, 9 och 12 för den totala skadereserven uppvisar i stort sett samma mönster om de relativa RMSEP-värdena. För segmenten med låg relativ RMSEP är fördelningarna för respektive metod relativt koncentrerade kring den sanna reserven, vilket framför allt är tydligt för segment a i Figur 3. För segment d är tätheterna betydligt mer utspridda, vilka kan ses i Figur 12. I (c) avviker den totala skadereserven för BDCL avsevärt från den sanna reserven, vilket även överensstämmer med det högre relativa RMSEP-värdet.

Inom respektive segment tenderar de metoder som har lägre relativ RMSEP att uppvisa mer koncentrerade tätheter kring den sanna reserven. Detta kan till exempel ses för CRM för segment c för bolag 2 i Figur 9 (b). Täthetsplottarna bekräftar således att skillnaderna i RMSEP inte enbart beror på enstaka extrema utfall, utan också speglar en genomgående skillnad i spridning i reserverna.

5.1.5 Skadereserv per kvartal

Följande diskussion utgår från Figur 4, 7, 10 och 13. För den intresserade finns även alternativa varianter av dessa figurer att tillgå i appendix, Figur 17-20.

För segment a följer samtliga fyra metoder de sanna reserverna relativt väl. För bolag 1 överskattar BDCL det sista kvartalet, medan övriga kvartal och metoder i huvudsak ligger i linje med de sanna reserverna.

För segment b följer CL, DCL och CRM de sanna reserverna väl över samtliga kvartal. BDCL uppvisar något större avvikelser, framför allt för de mittersta kvartalen samt det sista kvartalet för bolag 3.

För segment c följer CL, DCL, BDCL och CRM de sanna reserverna per skadekvartal väl.

För segment d uppvisar CL, DCL och CRM en stabil utveckling som överensstämmer väl med de sanna reserverna per kvartal. BDCL presterar relativt väl de inledande kvartalen, men uppvisar däremot betydande avvikelser i form av både under- och överskattningar för resten av skadekvartalen.

5.1.6 Avslutande reflektioner

En förklaring till att CL, DCL och CRM presterar väl i förhållande till den sanna simulerade reserven är att den enbart baseras på hittills utbetalda skadebelopp. De framtida simuleringarna utgår därmed från det historiska utbetalningsmönstret, vilket både CL och DCL förutsätter för att kunna prediktera den framtida reserven på ett tillförlitligt sätt. Om det återstår en stor andel känd reserv fångas inte denna information upp av den sanna reserven, vilket förklarar varför BDCL i vissa fall avviker kraftigt från den sanna reserven. Detta implicerar att CL, DCL och CRM presterar väl när framtida utbetalningar följer det

historiska utbetalningsmönstret och den kända reserven är liten, medan BDCL tenderar att ge bättre resultat när det finns en större andel kvarvarande känd reserv.

En ytterligare förklaring till varför CRM presterar väl är att modellen tillåter flera utbetalningar per skadeärende, till skillnad från DCL och BDCL som endast tillåter en. Eftersom den empirisk datan kan innehålla flera utbetalningar per skadeärende kan detta bidra till att CRM presterar bättre.

Vidare hade det varit intressant att beräkna MSEP för IBNER och IBNYR. Exempelvis går det för CRM att beräkna MSEP för IBNYR, men en sådan jämförelse skulle kunna bli missvisande eftersom BDCL tar in mer information i sin modell i form av känd reserv.

Som det tidigare har nämnts är en nackdel med SS att den är svår att simulera på grund av dess komplexitet. Vid modellering av risk blir det särskilt svårt eftersom metodens ingående skadetrianglar och beroendemönster är utmanande att återskapa i en simulerad miljö.

En annan svårighet är att modellera den kända reserven då denna kan betraktas som en exogen variabel. I praktiken är det en skadereglerare som gör en subjektiv bedömning av den kända reserven, snarare än en direkt observerad storhet. En sådan subjektiv bedömning kan bli svår att fånga och återge genom vanliga simuleringsmetoder.

5.2 Empirisk data

Likt simulerad data ses en del skillnader även i empirisk data. Här har jag valt att presentera resultat för tre olika portföljer. En där metoderna överensstämmer relativt väl gällande skattad skadereserv, och två där främst BDCL och SS skiljer sig åt.

För samtliga segment och bolag finns viss variation gällande storleken på både IBNER och IBNYR, vilka presenteras i Tabell 25 respektive 26. För bolag 1 segment a ger SS en negativ IBNER medan resterande metoder ger en positiv IBNER. För segment d är det tre av fyra metoder som ger negativ IBNER. Vidare ger SS en IBNYR som är ungefär dubbelt så stor jämfört med resterande metoder för samtliga bolag och segment.

Den totala skadereserven redovisas i Tabell 26, och för bolag 1 segment a ger CRM och SS väldigt liknande värden, medan CL, DCL och BDCL ger något lägre. En del av detta resultat kan förklaras av att CRM har en högre genomsnittlig skadekostnad μ för ett skadeärende än DCL och BDCL, vilket kan ses i Tabell 27. För bolag 1 segment d är den totala skadereserven något varierande mellan de olika metoderna, men inte allt för extremt. För bolag 2 segment d varierar den totala skadereserven desto mer. BDCL och CRM ger en något högre reserv än CL och DCL, medan SS ger en reserv som är nästan dubbelt så stor jämfört med CL och DCL. Dessa avvikelser kan förklaras av att SS och

BDCL tar in mer information i sina modeller genom att ta med känd skadekostnad. CL, DCL och CRM går således miste om denna information, vilket gör att de antingen kan under- eller överskatta reserven. I Figur 15 (c) är detta extra tydligt. Den visar att för skadekvartal 3 finns en reserv på över 70 miljoner för segment d bolag 2. Detta är en känd reserv som ännu inte har betalats ut, vilket är varför de andra metoderna går miste om denna reserv eftersom de endast får information i form av utbetalt skadebelopp och antal skador. Detta går även att observera i Figur 16 (c) där inflationsparametern för BDCL kraftigt går upp för just skadekvartal 3 eftersom BDCL tar hänsyn till känd skadekostnad där känd reserv ingår. På motsvarande sätt kan man i Figur 15 (b) för segment d bolag 1 observera att beteendet för SS och BDCL avviker från CL, DCL och CRM. För skadekvartal 3 och 14 ses en topp, följt av en mindre dipp vid skadekvartal 16 och 18. För den intresserade kan den kända reserven för empirisk data observeras i appendix i Figur 26.

En svaghet med SS är att återöppnade skador räknas som en ny skada i metoden. Detta påverkar både IBNER och IBNYR genom att belopp från IBNER förflyttas till IBNYR. Detta kan vara en förklaring till varför uppdelningen blir annorlunda med SS jämfört med resterande tre metoder, men att totalen ändå kan överensstämma relativt väl. En annan svaghet är att om det inte finns någon känd reserv kvar så skattas ingen IBNER.

5.3 Framtida forskning

För framtida forskning hade det varit intressant att använda känd skadekostnad istället för utbetald skadekostnad som indata i de olika reservsättningsmetoderna. Detta skulle möjliggöra en undersökning hurvida metoderna bättre skulle fånga variation i data och ge bättre skattningar av reserven eftersom de får tillgång till mer information.

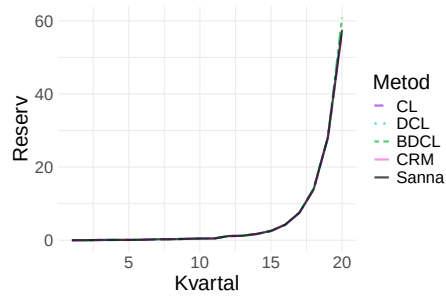
6 Slutsats

Sammanfattningsvis visar denna studie att ingen enskild metod är överlägsen i samtliga situationer. De fem analyserade metoderna ger likvärdiga resultat för stabila portföljer där utbetalt skadebelopp följer ett konsistent utvecklingsmönster över tid och där andelen kvarvarande utbetalningar är låg, vilket medför en låg känd reserv.

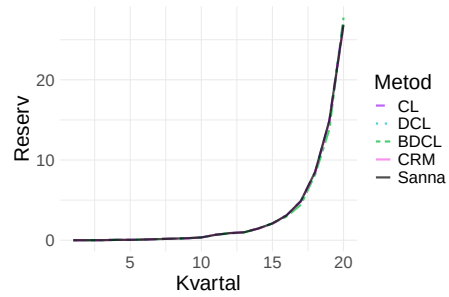
För portföljer där en betydande andel utbetalningar kvarstår, och därmed en hög känd reserv, framstår BDCL och SS som bättre lämpade eftersom de i större utsträckning fångar denna information och därmed ger mer träffsäkra reservskattningar.

Vidare indikerar resultaten att skaderegleringsavdelningarnas metodik skiljer sig åt mellan olika bolag och segment. Studien visar också att inom vissa bolag och segment förekommer en systematisk överskattning av reserver.

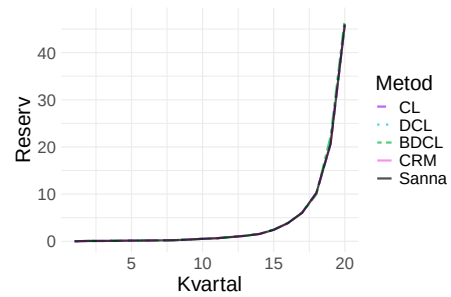
Appendix



(a) Bolag 1.

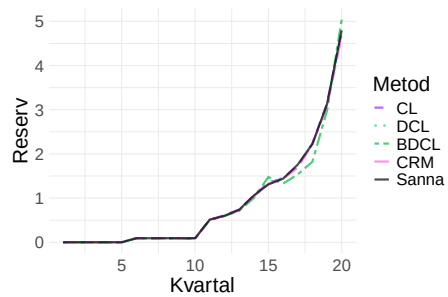


(b) Bolag 2.

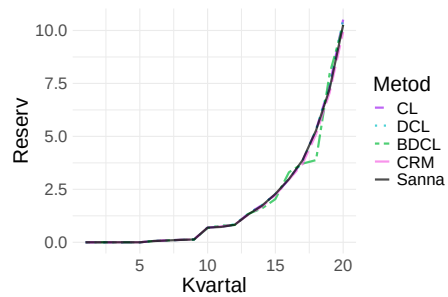


(c) Bolag 3.

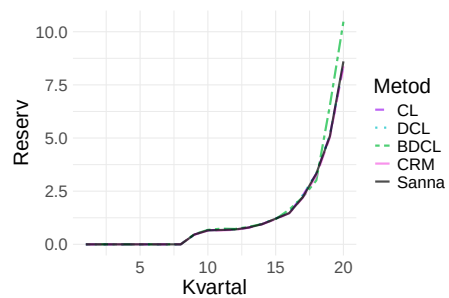
Figur 17: Sann simulerad reserv mot skattad reserv för respektive reservsättningsmetod.



(a) Bolag 1.

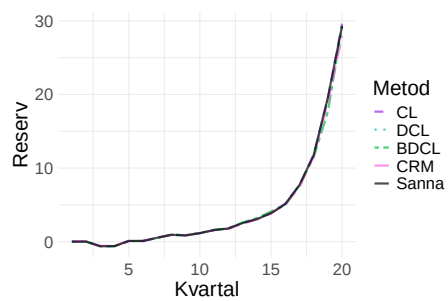


(b) Bolag 2.

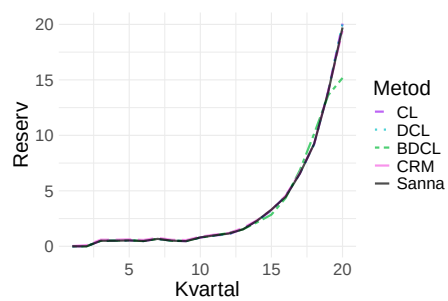


(c) Bolag 3.

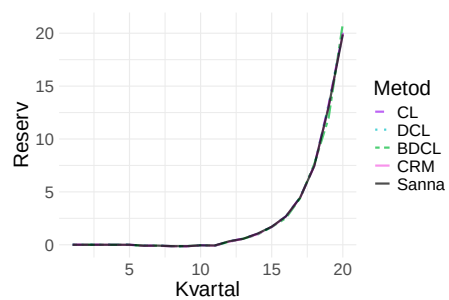
Figur 18: Sann simulerad reserv mot skattad reserv för respektive reservsättningsmetod.



(a) Bolag 1.

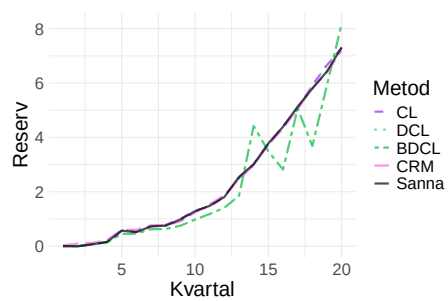


(b) Bolag 2.

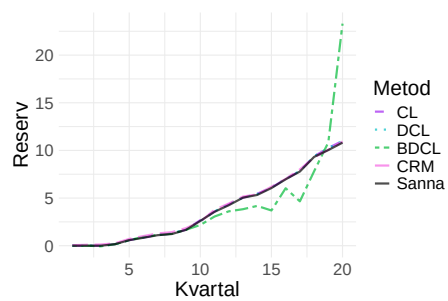


(c) Bolag 3.

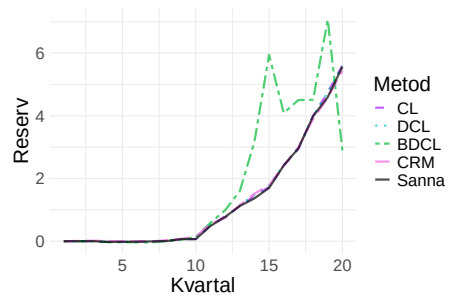
Figur 19: Sann simulerad reserv mot skattad reserv för respektive reservsättningsmetod.



(a) Bolag 1.

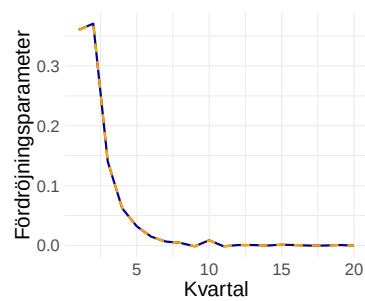


(b) Bolag 2.

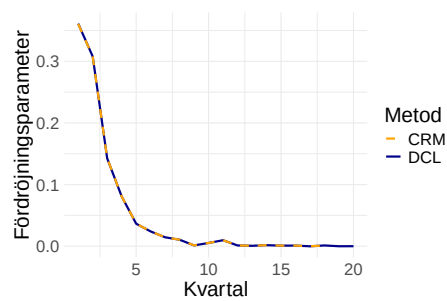


(c) Bolag 3.

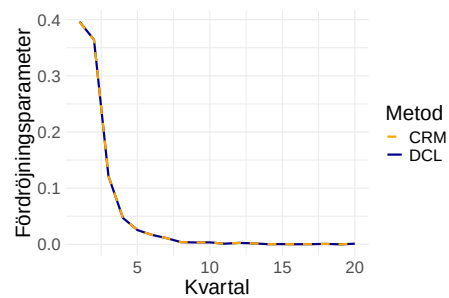
Figur 20: Sann simulerad reserv mot skattad reserv för respektive reservsättningsmetod.



(a) Bolag 1.

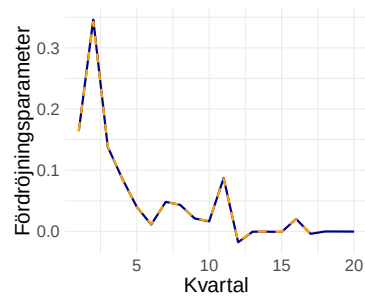


(b) Bolag 2.

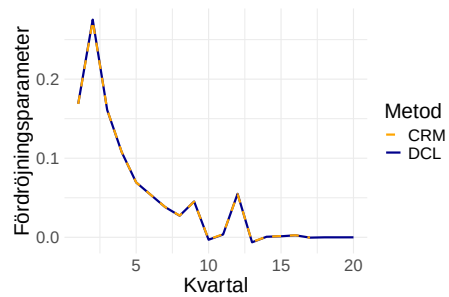


(c) Bolag 3.

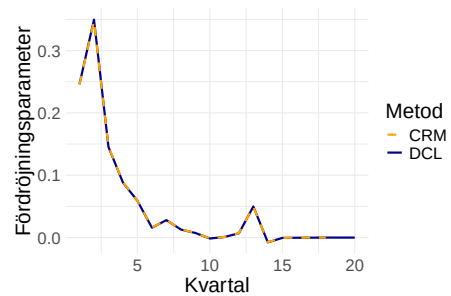
Figur 21: Fördröjningsfaktor per kvartal för DCL, BDCL och CRM för segment a. Eftersom DCL och BDCL har identiska fördröjningsfaktorer redovisas endast värdena för DCL och CRM.



(a) Bolag 1.

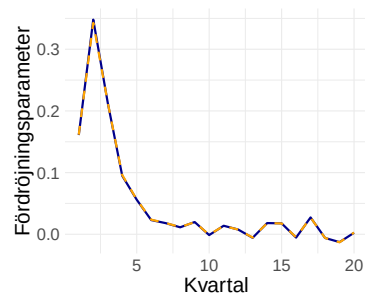


(b) Bolag 2.

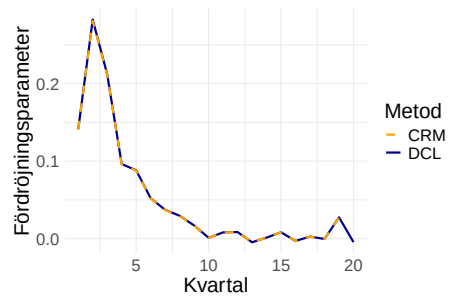


(c) Bolag 3.

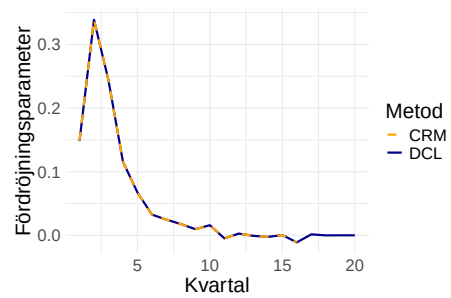
Figur 22: Fördröjningsfaktor per kvartal för DCL, BDCL och CRM för segment b. Eftersom DCL och BDCL har identiska fördröjningsfaktorer redovisas endast värdena för DCL och CRM.



(a) Bolag 1.

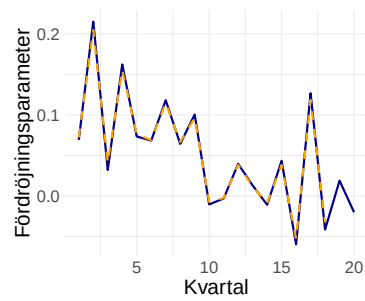


(b) Bolag 2.

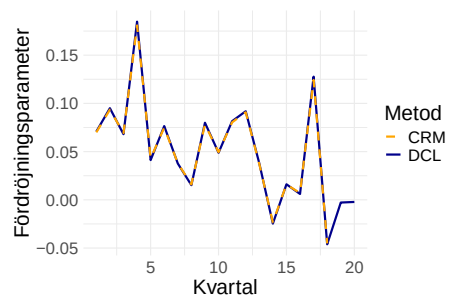


(c) Bolag 3.

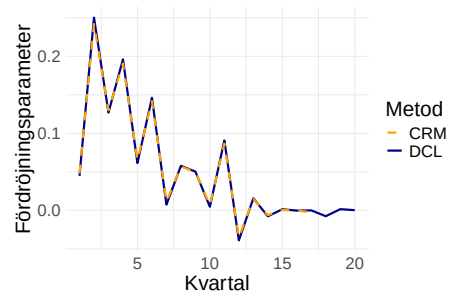
Figur 23: Fördröjningsfaktor per kvartal för DCL, BDCL och CRM för segment c. Eftersom DCL och BDCL har identiska fördröjningsfaktorer redovisas endast värdena för DCL och CRM.



(a) Bolag 1.

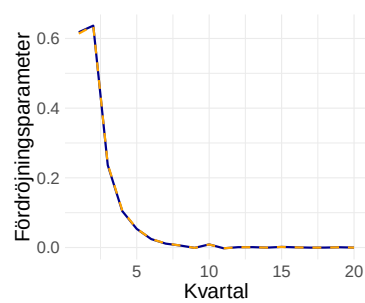


(b) Bolag 2.

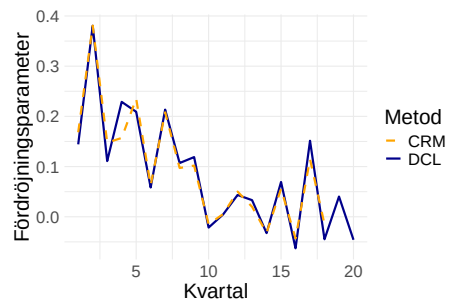


(c) Bolag 3.

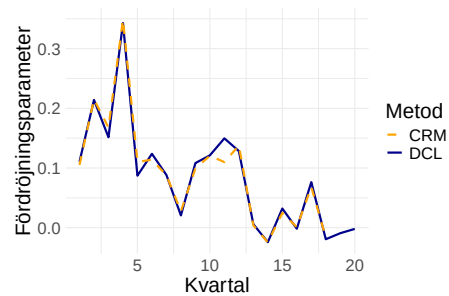
Figur 24: Fördröjningsfaktor per kvartal för DCL, BDCL och CRM för segment d. Eftersom DCL och BDCL har identiska fördröjningsfaktorer redovisas endast värdena för DCL och CRM.



(a) Segment a, bolag 1.

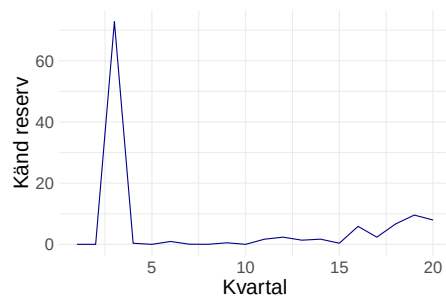
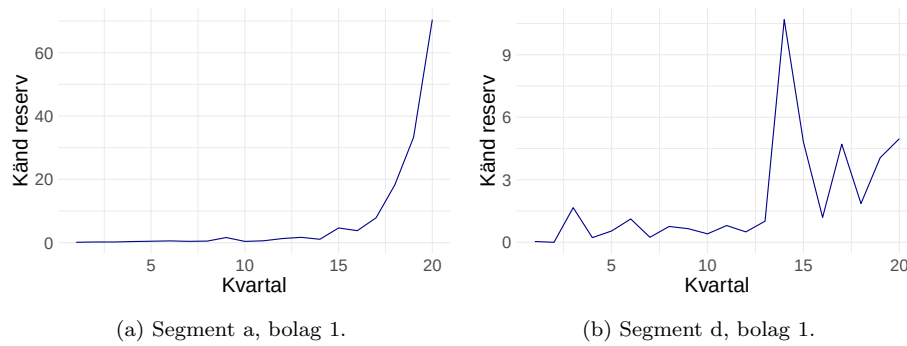


(b) Segment d, bolag 1.



(c) Segment d, bolag 2.

Figur 25: Fördröjningsfaktor per kvartal för DCL, BDCL och CRM för empirisk data. Eftersom DCL och BDCL har identiska fördröjningsfaktorer redovisas endast värdena för DCL och CRM.



Figur 26: Känd reserv per kvartal för empirisk data.

Referenser

- Alai, D. H., Merz, M. & Wüthrich, M. V. (2009). Mean square error of prediction in the bornhuetter-ferguson claims reserving method. *Annals of Actuarial Science*, 4(1), 7–31. doi: 10.1017/S1748499500000580
- Dahms, R. (2008). A loss reserving method for incomplete claim data. *Bulletin Swiss Association of Actuaries*, 127–148.
- Joe, H. (2014). *Dependence modeling with copulas*. Chapman and Hall/CRC.
- Mack, T. (1993, november). Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. *ASTIN Bulletin*, 23(2), 213–225.
- Miranda, M. D. M., Nielsen, J. P. & Verrall, R. (2012, maj). Double chain ladder. *ASTIN Bulletin*, 42(1), 59–76.
- Miranda, M. D. M., Nielsen, J. P. & Verrall, R. (2013, april). Double chain ladder and bornhuetter-ferguson. *North American Actuarial Journal*, 17(2), 101–113.
- Ohlsson, E. & Wällberg-Beutelrock, B. (2022). *Claims reserving using separate exposure for claims with and without a case reserve* (forskningsrapport nr. 1). Stockholms universitet. Hämtad från https://kurser.math.su.se/pluginfile.php/19448/mod_folder/content/0/2022/2022_1_report.pdf
- Schnieper, R. (1991). Separating true ibnr and ibner claims. *ASTIN Bulletin*, 21(1), 111–127.
- Wahl, F., Lindholm, M. & Verrall, R. (2019, juli). The collective reserving model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 87, 34–50.