# FÖRELÄSNING 23

JOHAN ALM

## 1. Analysens fundamentalsats

**1.1. Repetition.** Minns att vi innan Påsk definierade en funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ som som *integrerbar* om det för varje $\epsilon > 0$ existerade trappfunktioner $\Phi \le f \le \Psi$ på $[a, b]$ så att

$$\int_a^b \Psi dx - \int_a^b \Phi dx < \epsilon.$$

Om $f$ var en integrerbar funktion definierade vi sedan dess *integral* över $[a, b]$ som det unikt bestämda reella talet $I$ med egenskapen att

$$\int_a^b \Phi dx \le I \le \int_a^b \Psi dx$$

för alla möjliga trappfunktioner med $\Phi \le f \le \Psi$.

Vi såg vidare den viktiga satsen som säger att *alla kontinuerliga funktioner är integrerbara*, samt att integralen av en kontinuerlig funktion kan beräknas genom gränsvärdet av en *Riemannsumma*:

$$\int_a^b f dx = \lim_{n\to\infty} R_n(f, \xi),$$

där

$$R_n(f, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_n, \quad \delta_n = \frac{b-a}{n}$$

och $\xi_k \in [a + (k-1)\delta_n, a + k\delta_n]$, $k = 1, \ldots, n$, är godtyckligt valda punkter. Vi använde denna metod med Riemannsumma för att beräkna att

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

Vi visade även *medelvärdessatsen för integraler*, som säger att för en kontinuerlig funktion $f$ på ett slutet intervall $[a, b]$ så existerar det något $\xi \in [a, b]$ med egenskapen att

$$\int_a^b f dx = f(\xi)(b-a).$$

**1.2. Ett fantastiskt teorem.** Att beräkna integraler genom gränsvärden av trappintegraler är svårt. Som tur är finns det ett fantastiskt teorem, som låter en räkna integraler av kontinuerliga funktioner på ett mycket lättare sätt.

**Teorem 1.** (*Analysens fundamentalsats*, version 1.) Antag att $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion. Definiera en ny funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ genom att sätta

$$F(s) = \int_a^s f dx.$$

Funktionen $F$ är då deriverbar, med derivata

$$F'(s) = f(s)$$

för alla $s \in [a, b]$.

**Bevis 1.** Enligt definition är

$$F'(s) = \lim_{h\to 0} \frac{F(s+h) - F(s)}{h}.$$

Vi vet att integration är linjärt, så

$$F(s+h) - F(s) = \int_a^{s+h} f dx - \int_a^s f dx = \int_s^{s+h} f dx.$$

Medelvärdessatsen för integraler ($f$ är antagen kontinuerlig, så den kan appliceras!) säger sedan att det finns ett $\xi_h \in [s, s+h]$ så att

$$\int_s^{s+h} f dx = f(\xi_h)((s+h)-s) = f(\xi_h)h.$$

Alltså får vi

$$F'(s) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi_h)h}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi_h).$$

När $h$ går mot 0 måste $\xi_h \in [s, s+h]$ gå mot $s$. Eftersom $f$ är kontinuerlig betyder det att

$$\lim_{h \to 0} f(\xi_h) = f(s),$$

så $F'(s) = f(s)$, vilket skulle visas.

Vi skulle kunna summera satsen med formeln

$$\frac{d}{ds} \int_a^s f dx = f(s).$$

Integrering är alltså i någon mening motsatt till derivering.

**Övning 1.** (*Ganska svår, men rolig!*) Antag att $f(x)$ är kontinuerlig för alla $x$ och antag givet två deriverbara funktioner $a(t) < b(t)$. Definiera en funktion $F$ med input $s$ genom

$$F(s) = \int_{a(s)}^{b(s)} f dx.$$

Hitta och bevisa en formel för derivatan $\frac{d}{ds}F(s)$. (Föregående sats är ett specialfall, då $a(s)$ konstant $= a$ och $b(s) = s$.)

**Teorem 2.** (*Analysens fundamentalsats*, version 2.) Låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Antag att $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ är någon deriverbar funktion vars derivata uppfyller $G' = f$. Då gäller att

$$\int_a^b f dx = G(b) - G(a).$$

**Bevis 2.** Låt som förut $F$ vara funktionen

$$F(s) = \int_a^s f dx.$$

Enligt föregående sats gäller då $F'(s) = f(s)$, så vi måste ha $F'(s) = G'(s)$, vilket vi kan skriva som

$$\frac{d}{ds}(F - G) = 0.$$

Det betyder att $F(s) - G(s)$ är en konstant funktion, dvs det måste finnas någon konstant $C$ så att $F(s) - G(s) = C$. Sätter vi in $s = a$ ser vi att

$$F(a) - G(a) = C \Leftrightarrow C = -G(a),$$

eftersom

$$F(a) = \int_a^a f dx = 0.$$

Det ger oss sedan

$$\int_a^b f dx = F(b) = G(b) + C = G(b) - G(a),$$

vilket skulle visas.

**Definition 1.2.1.** Låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. En deriverbar funktion $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ med egenskapen att $G'(x) = f(x)$ kallas en *primitiv funktion* till $f$. Om $G$ är en primitiv funktion till $f$ skriver man

$$G = \int f dx.$$

Beteckningen $\int f dx$ kallas ibland för en *indefinit integral*.

**Anmärkning 1.** Notera att skrivsättet $G = \int f dx$ är ganska dumt! Om $F = G + C$ gäller ju också $F'(x) = f(x)$, så det är lika rätt att skriva $F = \int f dx$ trots att $F \neq G$. Notationen $\int f dx$ kan alltså inte syfta på en entydigt bestämd funktion, utan på "en funktion som är bestämd upp till någon godtyckligt vald konstant". I praktiken ställer detta dock sällan till problem, och man kan tänka på $\int f dx$ som en vanlig hederlig funktion.

**Definition 1.2.2.** Om $G$ är en funktion på $[a, b]$ så introducerar vi skrivsättet

$$G|_a^b = G(b) - G(a).$$

Analysens fundamentalsats (version 2) kan alltså formuleras som att om $G$ är en primitiv funktion till $f$ gäller att

$$\int_a^b f dx = G|_a^b.$$

**Exempel 1.** Låt oss som ett exempel beräkna integralen

$$\int_0^1 e^x dx,$$

som vi förut beräknade till $e-1$ med hjälp av en Riemannsumma. Exponentialfunktionen är kontinuerlig, så enligt analysens fundamentalsats är

$$\int_0^1 e^x dx = G\Big|_0^1,$$

för valfri primitiv funktion $G$ till $e^x$. Eftersom $De^x = e^x$ kan vi ta $G(x) = e^x$, och får då

$$\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1.$$

Notera att vi lika gärna kunnat ta $G(x) = e^x + C$ för vilken konstant $C$ som helst.

**Exempel 2.** Vi beräknar

$$\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 2)dx.$$

Som primitiv funktion tar vi

$$P(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x.$$

Det ger

$$P(x)\Big|_{-1}^2 = \Big(\frac{1}{3}8 - \frac{2}{3}4 + 2 \cdot 2\Big) - \Big(\frac{1}{3}(-1) - \frac{2}{3}(-1) + 2 \cdot (-1)\Big) = \frac{9}{2}.$$

Igen, vi hade kunnat lägga till en godtycklig konstant till $P(x)$.

## 2. Generaliserade integraler

Vi kommer ägna de kommande föreläsningarna åt olika metoder för att beräkna primitiva funktioner (och därigenom integraler till kontinuerliga funktioner). Innan vi gör det skall vi först generalisera integralbegreppet något.

**Definition 2.0.3.** Antag att $f$ är integrerbar på $[a, b]$ för alla $b \geq a$. Då definierar vi den *generaliserade integralen*

$$\int_a^\infty f dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f dx,$$

förutsatt att gränsvärdet existerar. Om gränsvärdet är $\pm\infty$ säger vi att den generaliserade integralen divergerar.

Vi kan göra analoga varianter av denna definition. Om till exempel $f$ är integrerbar på $[a, b]$ för all $a \leq b$ så kan vi definiera den generaliserade integralen

$$\int_{-\infty}^b f dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f dx.$$

Om $f$ är integrerbar på alla slutna intervall kan vi definiera

$$\int_{-\infty}^\infty f dx = \lim_{a\to-infty,\, b\to\infty} \int_a^b f dx.$$

**Exempel 3.** Vi vill beräkna

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Efter lite fundering minns vi att

$$D \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

så vi kan ta arcustangens är en primitiv funktion och således är

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{-1}^{b} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \arctan(x) \Big|_{-1}^{b} = \lim_{b \to \infty} \arctan(b) - \arctan(-1) = \pi/2 - (-\pi/4) = 3\pi/4.$$

**Anmärkning 2.** Generaliserad integrering är inte linjärt! Minns att det inte alltid är sant att gränsvärdet av en summa är summan av gränsvärdena. Det medför att

$$\int_a^{\infty} (f+g) dx = \lim_{b \to \infty} \Big( \int_a^b f dx + \int_a^b g dx \Big)$$

inte alltid är lika med

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f dx + \lim_{b \to \infty} \int_a^b g dx = \int_a^{\infty} f dx + \int_a^{\infty} g dx.$$

Som ett enkelt (men lite dumt) exempel, betrakta $f(x) = 1/x$ och $g(x) = -2/(2x+1)$. Vi har då (de primitiva funktionerna hittas genom att vi minns $D \ln f(x) = f'(x)/f(x)$)

$$\int_1^{\infty} (1/x - 2/(2x+1)) dx = \lim_{b \to \infty} \Big( \ln x - \ln(2x+1)$$

$$\lim_{b \to \infty} \ln \frac{x}{2x+1} 1^b = \ln(1/2) - \ln(1/3) = \ln(3/2).$$

Däremot är

$$\int_1^{\infty} 1/x dx - \int_1^{\infty} 2/(2x+1) dx = \infty - \infty,$$

vilket ju är ett ogentligt uttryck.

Vi kan även generalisera integralbegreppet och tillåta ändpunkter där funktionen inte är definierad.

**Definition 2.0.4.** Antag att $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ är integrerbar på $[a, \eta]$ för alla $a \leq \eta < b$. Då definierar vi den generaliserade integralen

$$\int_a^b f dx = \lim_{\eta \to b^-} \int_a^{\eta} f dx,$$

förutsatt att gränsvärdet konvergerar. Analogt, om $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ är integrerar på alla slutna delintervall $[\xi, b] \subset (a, b]$ så definierar vi

$$\int_a^b f dx = \lim_{\xi \to a^+} \int_{\xi}^b f dx.$$

Vi kan även låta båda ändpunkterna saknas i definitionsområdet för $f$ och definiera

$$\int_a^b f dx = \lim_{\xi \to a^+, \eta \to b^-} \int_{\xi}^{\eta} f dx.$$

**Exempel 4.** Låt oss beräkna

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Funktionen vi vill integrera, $(1-x^2)^{-1/2}$, är bara definierad på det öppna intervallet $(-1, 1)$. Integralen måste alltså betraktas i generaliserad mening. Vi känner igen

$$D \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

så integralen ges av

$$\lim_{\xi \to (-1)^+, \eta \to 1^-} \arcsin(x) \Big|_{\xi}^{\eta} = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi.$$