MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Diskret matematik, Matematik I, 4 hp
20 oktober 2023

Lösningsförslag (obs: det kan finna många andra sätt att resonera på!)
Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs.

1. Vi börjar med att beräkna $\mathrm{sgd}(221, 391)$ via Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 391 &= 221 + 170 \\ 221 &= 170 + 51 \\ 170 &= 3 \cdot 51 + 17 \\ 51 &= 3 \cdot 17. \end{aligned}$$

Alltså är $\mathrm{sgd}(221, 391) = 17$. Vår ursprungliga diofantiska ekvation är alltså ekvivalent med

$$13x + 23y = 3. \qquad (*)$$

En sats från kursen säger att lösningarna till en diofantisk ekvation $ax+by = c$, där $a, b, c \in \mathbb{Z}$ och $\mathrm{sgd}(a, b) = 1$, ges av

$$\begin{cases} x = x_0 - bk \\ y = y_0 + ak \end{cases} \quad \text{för } k \in \mathbb{Z},$$

där (x_0, y_0) är en partikulärlösning till ekvationen. Eftersom koefficienterna av x och y i $(*)$ har sgd 1, så kan vi tillämpa satsen, givet att vi kan hitta en partikulärlösning. Vi kan direkt se att $(x, y) = (2, -1)$ är en lösning; alternativt kan vi använda outputen från Euklides algoritm ”läst baklänges”. Hursomhelst säger satsen att samtliga lösningar till denna ekvation, och därmed den ursprungliga, därför ges av:

Svar:

$$\begin{cases} x = 2 - 23k \\ y = -1 + 13k \end{cases} \quad \text{för } k \in \mathbb{Z}.$$

2. Vi använder en teckenorm eller teckenstudium. För att göra detta bearbetar vi olikheten först:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4x+5} < \frac{1}{(x+1)(x+3)} &\iff \frac{1}{4x+5} - \frac{1}{(x+1)(x+3)} < 0 \\
&\iff \frac{(x+1)(x+3)-(4x+5)}{(4x+5)(x+1)(x+3)} < 0 \\
&\iff \frac{x^2-2}{(4x+5)(x+1)(x+3)} < 0 \\
&\iff \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(4x+5)(x+1)(x+3)} < 0. \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Vi kan se VL:et i denna sista olikhet $(\star)$ som en produkt av fem faktorer, där precis en faktor byter tecken runt var och en av 'brytpunkterna'

$$-3 < -\sqrt{2} < -\tfrac{5}{4} < -1 < \sqrt{2}.$$

(Vi vet att $-\sqrt{2} < -\frac{5}{4}$ tack vare att $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} < 2$.)

För $x > \sqrt{2}$ är VL:et i $(\star)$ större än 0, och sedan alternerar VL:ets tecken när x avtar förbi ovan brytpunkter, tack vare ett precis en av de fem faktorerna ändrar tecken vid varje brytpunkt. Vi ser dessutom att ingen av brytpunkterna löser olikheten, vilket ger:

Svar: Olikheten är ekvivalent med att $-1 < x < \sqrt{2}$ eller $-\sqrt{2} < x < -\frac{5}{4}$ eller $x < -3$, dvs

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-\sqrt{2}, -\tfrac{5}{4}) \cup (-1, \sqrt{2}).$$

3. Vi skriver $u = z - (1+i)$ och löser först $u^4 = 16 = 2^4 e^{i\cdot 0}$. Enligt utlärd sats om binomiska ekvationer (eller direkt faktorisering) har denna ekvation precis fyra lösningar, nämligen

$$u = 2e^{i\frac{\pi}{2}k} \quad \text{för } k = 0,1,2,3 \qquad \iff \qquad u = 2,\ u = 2i,\ u = -2, \text{ eller } u = -2i.$$

I termer av $z = (1+i) + u$ motsvarar detta att

$$z \in \{3+i,\ 1+3i,\ -1+i,\ 1-i\}.$$

Endast $z = -1+i$ har $\mathrm{Re}(z) < 0$.

Svar: Ekvationen är ekvivalent med att $z \in \{3+i,\ 1+3i,\ -1+i,\ 1-i\}$ och endast en av dessa har $\mathrm{Re}(z) < 0$.

4. Eftersom $p(z)$ endast har reella koefficienter så medför $p(2i) = 0$ att $p(-2i) = 0$ också, enligt konjugerade rotsatsen. Enligt faktorsatsen (eller algebrans fundamentalsats) är $(z-2i)(z+2i)$ en faktor till $p(z)$, dvs $(z^2+4) \mid p(z)$. Polynomdivision ger att

$$z^4 - 2z^3 + 9z^2 - 8z + 20 = (z^2+4)(z^2-2z+5).$$

Faktorn $z^2 - 2z + 5$ har, enligt *pq*-formeln, rötterna $z = 1 \pm 2i$. Därmed ser vi att $p(z) = 0$ om och endast om $z = \pm 2i$ eller $z = 1 \pm 2i$.

Svar: Rötterna till $p(z)$ är $\pm 2i$ och $1 \pm 2i$.

5. (a) Detta är $\binom{52}{5}$, per definitionen av binomialkoefficienter. Enligt utlärd sats om formeln för binomialkoefficienter är detta lika med:

   Svar: $\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$.

   (b) Det finns 13 sätt att välja valören som ska förekomma två gånger, och det finns för varje av dessa sätt precis $\binom{4}{2}$ sätt att välja vilka färger valören ska förekomma i. För varje av dessa sätt finns det sedan 12 sätt att välja valören som ska förekomma tre gånger, och för varje av dessa val finns det precis $\binom{4}{3}$ sätt att välja färgerna för denna valör. Sammanligt finns det alltså, enligt multiplikationsprincipen,

$$13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} = 13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 4 = 3744$$

   sådana pokerhänder.

   Svar: 3744.

6. (a) För heltal d och n skriver vi $d \mid n$ om det finns ett heltal m sådant att $n = dm$.

   (b) Låt n vara ett heltal. Enligt divisionsalgoritmen kan vi skriva $n = 2k + r$ där $r \in \{0, 1\}$.

   Om $r = 0$ (dvs om n är jämnt) så ser vi att $n^2 = 4k^2$, och därmed gäller $4 \mid n^2$ (med $m = k^2$ i definitionen ovan).

   Om $r = 1$ (dvs om n är udda) så ser vi att

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4(k^2 + k),$$

   och därmed gäller $4 \mid (n^2 - 1)$ (med $m = k^2 + k$ i definitionen ovan).

   Oavsett vad r är gäller det alltså att $4 \mid n^2$ eller $4 \mid (n^2 - 1)$.