MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Omtentamensskrivning i
Diskret matematik, Matematik I, 4 hp
22 november 2023

Lösningsförslag (obs: det kan finna många andra sätt att resonera på!)
Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs.

1. Enligt definition gäller kongruensen om och endast om det finns något $y \in \mathbb{Z}$ så att $10x = 2 + 2023y$. Denna ekvation är i sin tur ekvivalent med den diofantiska ekvationen
$$10x - 2023y = 2. \tag{$\star$}$$
För att bestämma lösningarna till denna ekvation använder vi strategin ”läs förloppet av Euklides algoritm baklänges”. Euklides algoritm ger:
$$\begin{aligned} 2023 &= 202 \cdot 10 + 3 \\ 10 &= 3 \cdot 3 + 1. \end{aligned}$$
Detta visar att $\text{sgd}(2023, 10) = 1$, samt att
$$1 = 10 - 3 \cdot 3 = 10 - 3(2023 - 202 \cdot 10) = 607 \cdot 10 - 3 \cdot 2023.$$
Alltså är $(x, y) = (2 \cdot 607,\ 2 \cdot 3) = (1214,\ 6)$ en lösning till $(\star)$.

En sats från kursen säger att lösningarna till en diofantisk ekvation $ax+by = c$, där $a, b, c \in \mathbb{Z}$ och $\text{sgd}(a, b) = 1$, ges av
$$\begin{cases} x = x_0 + bk \\ y = y_0 - ak \end{cases} \quad \text{för } k \in \mathbb{Z},$$
där (x_0, y_0) är en partikulärlösning till ekvationen. Eftersom $\text{sgd}(2023, 10) = 1$ så kan vi tillämpa denna sats, och den ger att samtliga x-värden av lösningarna till $(\star)$ ges av $x = 1214 + 2023k$ för $k \in \mathbb{Z}$. Dessa är alltså lösningarna till vår ursprungliga kongruens.

Vi har att ett sådant tal x ligger i det givna intervallet om och endast om
$$\begin{aligned} & 3237 \le 1214 + 2023k \le 5260 \\ \iff \quad & 2023 \le 2023k \le 4046 \\ \iff \quad & 1 \le k \le 2. \end{aligned}$$
Det finns alltså två sådana lösningar x.

Svar: Kongruensen uppfylls av precis de x på formen $x = 1214 + 2023k$, där $k \in \mathbb{Z}$, och precis två av dessa tal ligger i det givna intervallet.

2. Summan har 20 termer. Vi kan dela upp summan via

$$\sum_{k=2}^{21}\left(3\cdot 4^k+3k\right)=\sum_{k=2}^{21}3\cdot 4^k+\sum_{k=2}^{21}3k$$

som en summa av en geometrisk summa och en aritmetisk summa. Via de utlärda formlerna för dessa gäller

$$\sum_{k=2}^{21}3\cdot 4^k=3\cdot 4^2\left(\frac{4^{20}-1}{4-1}\right)=4^2(4^{20}-1),$$

och

$$\sum_{k=2}^{21}3k=\left(\frac{3\cdot 2+3\cdot 21}{2}\right)\cdot 20=3\cdot 23\cdot 10=690.$$

Alltså är den ursprungliga summan lika med $4^2(4^{20}-1)+690=4^{22}+674$.

Svar: $4^{22}+674$.

3. Enligt restsatsen är $p(2)=7$ och $p(i)=i$. Om resten i den eftersökta divisionen är $az+b$ där $a,b\in\mathbb{C}$, dvs om $p(z)=(z-2)(z-i)q(z)+(az+b)$, då är

$$\begin{aligned}7&=p(2)=2a+b\\ i&=p(i)=ai+b.\end{aligned}$$

Detta ger att $a(2-i)=7-i$, dvs

$$a=\frac{7-i}{2-i}=3+i.$$

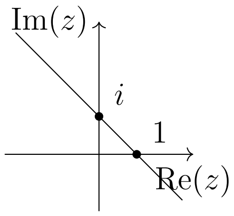
Alltså är $b=7-2a=1-2i$.

Svar: Resten är $(3+i)z+(1-2i)$.

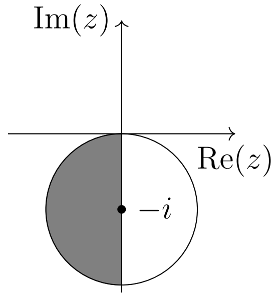
4. För (b): i ord motsvarar kraven att avståndet mellan z och $-i$ är som mest 1 och att den reella delen är icke-positiv.

För (c): i ord motsvarar kravet att avståndet mellan z och 2 ska vara samma som avståndet mellan z och $2i$, så vi får bisektrisen till sträckan mellan dessa två punkter.

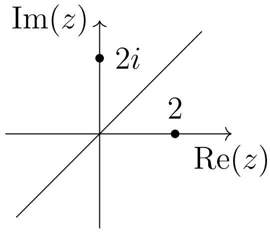
För (d): w är en punkt på enhetscirkeln, med vinkel $2\pi/5$ till den reella axeln, och $2w$ har samma argument fast på en cirkel av radie 2. Varje gång vi multiplicerar med w lägger vi till $2\pi/5$ till argumentet, så mängden motsvarar punkterna på en regelbunden 5-hörning, med ett hörn vid $z=2=2w^5$.



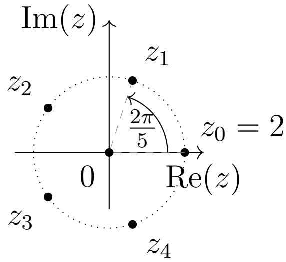
(a)



(b)



(c)



(d)

5. Obs: det finns många sätt att resonera på här!

   (a) Enligt standardsats om permutationer av objekt (eller multiplikationsprincipen) ges detta av $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

   (b) Nu finns det endast 5 val för den som står sist, och för varje av dessa finns det 5 val för den som står näst sist, och för varje av dessa finns det 4 val för den som står i position tre, osv, vilket ger $5 \cdot 5! = 600$ möjligheter totalt, enligt multiplikationsprincipen.

   (c) Nu tar vi alla 720 kö-ordningar och räknar bort alla där `AB` eller `BA` förekommer. Det finns $5! = 120$ ordningar av vardera sort, nämligen alla permutationer av `AB`, `C`, `D`, `E`, `F` resp. samma sak med `BA`. Detta ger

$$720 - 120 - 120 = 480$$

   kö-ordningar totalt.

Svar: (a) 720 (b) 600 (c) 480.

6. (a) För $(a, b) \neq (0, 0)$ definierar vi $\text{sgd}(a, b)$ som det största heltalet d som delar både a och b. (Vi definierar också $\text{sgd}(0, 0) = 0$.)

   (b) Låt $c = \text{sgd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$. Per definition gäller det då att $c \mid \frac{a}{d}$ och att $c \mid \frac{b}{d}$. Alltså finns det heltal m och n sådana att

$$mc = \tfrac{a}{d} \text{ och } nc = \tfrac{b}{d}.$$

   Detta är ekvivalent med att

$$mcd = a \text{ och } ncd = b.$$

   Alltså är cd en delare till båda a och b. Men d är den största sådana delaren, och därmed är $c \leq 1$, vilket betyder att $c = 1$. Detta är det vi vill visa.

   (Det finns många andra sätt att argumentera på.)