MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Föreläsare: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Diskret matematik, Matematik I, 4 hp
den 7 mars 2024

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E.

1. Lös följande problem.

   (a) Avgör om $121206^2 + 1$ är lika med 14700007507. (2p)

   (b) Ett andragradspolynom x^2+ax+b med reella koefficienter har nollstället $x = 2 + 3i$. Bestäm talen a och b. (3p)

   Lösning. (a) Man kan antingen jämföra de båda uttrycken modulo 9, eller modulo 100. Räknar man modulo 9, kan man utnyttja egenskapen att ett tals rest modulo 9, är samma som dess siffersumma. Räknar man modulo 100, ser man att vänsterledet är $6^2 + 1 = 37$, men högerledet modulo 100 är 7.

   (b) Enligt satser från kursen, har vi att polynomet ges av

   $$(x - (2 + 3i))(x - (2 - 3i)) = x^2 - 4x + 13.$$

   Så $a = -4$ och $b = 13$.

2. Finn alla reella lösningar till ekvationen (5p)

   $$|x - 3| + |(x - 3) \cdot (x + 4)| = x^2 - 9.$$

   Lösning. Vi ser att uttrycken inom absolutbeloppen byter tecken vid $x = 3$ eller $x = -4$. Dessa brytpunkter delar upp reella talaxeln i tre intervall, och vi har tre fall att undersöka:

   Fall $x < -4$: Ekvationen blir

   $$-(x-3)+(x-3)(x+4) = x^2-9 \iff (x-3)(x+4)-(x-3)-(x^2-9) = 0.$$

   Vänsterledet förenklas till 0, så vi får något som är sant för alla $x < -4$.

   Fall $-4 \leq x < 3$: Ekvationen blir

   $$-(x-3)-(x-3)(x+4) = x^2-9 \iff -(x-3)(x+4)-(x-3)-(x^2-9) = 0.$$

   Efter förenkling får vi andragradsekvationen $x^2+x-12 = 0$ som har $x = -4$ samt $x = 3$ som lösningar. Bara $x = -4$ ligger i intervallet.

   Fall $x \geq 3$: Ekvationen blir

   $$(x-3)+(x-3)(x+4) = x^2-9 \iff (x-3)(x+4)+(x-3)-(x^2-9) = 0.$$

   Detta förenklas till $2x - 6 = 0$ som löses av $x = 3$, som ligger i intervallet.

   Sammanfattningsvis har ekvationen lösningarna $x \leq -4$ samt $x = 3$.

Var god vänd!

3. Lös ekvationen $z^4 + 2z^3 + 8z + 16 = 0$ för $z \in \mathbb{C}$. Komplexa tal får anges på antingen rektangulär eller polär form. (5p)

Lösning. Rationella rotsatsen ger att vi måste testa delarna till 16. Vi får att $z = -2$ är en rot, så är $z + 2$ en faktor. Polyomdivision med $z + 2$ ger sedan att

$$z^4 + 2z^3 + 8z + 16 = (z + 2)(z^3 + 8).$$

Rötterna till $z^3 = -8$. Talet -8 har absolutbelopp 2^3 samt argument π. Detta ger att rötterna som sökes blir

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}i}, \quad z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}i},$$

tillsammans med $z = -2$.

4. Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ och $C = \{6, 7, 8, 9\}$. Svara på följande frågor.

(a) Bestäm $(A \setminus B) \cup C$. (1p)

(b) På hur många sätt kan man välja a, b och c så att $a \in A$, $b \in B$ och $c \in C$? (1p)

(c) På hur många sätt kan man tillverka en lista, (a, b, c) så att $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, men med villkoret att inga av talen i listan är lika? (3p)

Lösning. (a) Detta är $\{1, 2\} \cup \{6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$.

(b) Valen sker oberoende. Vi kan välja a på 5 sätt, b på 5 sätt och c på 4 sätt. Totalt $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ sätt.

(c) Alla tre tal kan inte vara lika, då $A \cap C = \emptyset$. Vi måste alltså ta bort listor på formen (a, a, c) samt (a, b, b) från svaret i (b), och dessa fall överlappar inte. Listor där de två första talen är lika är 12 till antalet, då

$$|A \cap B| \cdot |C| = 3 \cdot 4 = 12.$$

På samma sätt, antalet listor där de två sista talen är lika ges av

$$|A| \cdot |B \cap C| = 5 \cdot 2 = 10.$$

Det finns alltså $100 - 12 - 10 = 78$ sådana listor där alla tre tal är olika.

5. Ina har fått en talföljd definierad rekursivt enligt följande: (5p)

$$a_1 = 1 \text{ och } a_n = 2a_{n-1} + n - 2 \text{ då } n > 1.$$

Med denna räknar hon ut att för $n = 1, 2, 3, 4, 5$ så blir $a_1, \ldots, a_5$ talen

$$1, 2, 5, 12, 27.$$

Ina gissar att det finns en sluten formel för talen, nämligen $a_n = 2^n - n$. Hon har skrivit ned ett induktionsbevis som bevisar detta nedan, men vissa delar i beviset har försvunnit. Du ska bestämma vad som fattas i luckorna; det som fattas kan vara tal, ord eller matematiska uttryck.

Inas bevis:

> Vi börjar med basfallen. Det behövs ett basfall, nämligen då $n = \underline{\quad(a)\quad}$. Det är lätt att verifiera att den slutna formeln stämmer överens med definitionen i detta fall.
>
> *Induktionsantagande:* Antag att $n \geq \underline{(b)}$ och att $\underline{\quad(c)\quad}$. Vi ska nu visa att $a_n = \underline{\quad(d)\quad}$. Från $\underline{\qquad(e)\qquad}$ är det givet att
>
> $$a_n = 2a_{n-1} + n - 2.$$
>
> Högerledet kan nu skrivas om enligt $\underline{\qquad(f)\qquad}$, så vi får att
>
> $$a_n = 2\left(\underline{\qquad\quad(g)\qquad\quad}\right) + n - 2.$$
>
> Efter förenkling av högerledet, får vi att $a_n = \underline{\quad(h)\quad}$, vilket är vad vi ville visa. Basfallen tillsammas med resonemanget ovan visar att den slutna formeln gäller för alla $n \geq \underline{(i)}$.

Max 5 poäng, och för varje lucka som ej är korrekt bestämd dras 1 poäng. Endast svar för luckorna krävs.

Lösning. För vissa luckor fanns det flera svar som var rätt:

(a) 1

(b) 2

(c) $a_{n-1} = 2^{n-1} - (n-1)$.

(d) $2^n - n$, (formeln gäller för $n - 1$)

(e) definitionen (uppgiften, problemformuleringen)

(f) induktionsantagandet (antagandet, ovan, $a_{n-1} = 2^{n-1} - (n-1)$)

(g) $2^{n-1} - (n-1)$, (alternativt $2^{n-1} - n + 1$)

(h) $2^n - n$.

(i) 1.

För (b), notera att $n \geq 2$ krävs för att a_{n-1} ska vara definierat.

Vid rättningen valde vi att istället ge följande poäng per antal rätt svar:

Luckor rätt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tentapoäng	0	0	0	1	2	3	4	4	5	5

6. (a) Definiera begreppet *största gemensamma delare.* (1p)

   (b) Visa att om $\mathrm{SGD}(a, b) = 1$ så kan $\mathrm{SGD}(6a, b)$ bara anta värdena $1, 2, 3$ eller 6. (4p)

   Satser från kursen får användas.

   Ledtråd: Börja med att förstå varför $\mathrm{SGD}(6a, b)$ inte kan vara 5.

   Lösning. (a) Den största gemensamma delaren av två tal a och b, är det största positiva heltal d för vilket det gäller att $d \mid a$ och $d \mid b$.

   (b) Låt $d = \mathrm{SGD}(6a, d)$ Antag att p^k är en primtalspotens som delar d, för något $k \geq 1$. Då måste $p^k \mid 6a$ och $p^k \mid b$. Om $p \mid a$, skulle p vara gemensam delare till a och b. Alltså måste $p^k \mid 6$. Då måste p^k antingen vara 2 eller 3. Detta innebär att d som mest kan delas av 2 och 3 och vi får värdena ovan.

   Alternativt, låt $a = p_1 p_2 \ldots p_k$ och $b = q_1 q_2 \ldots q_\ell$ vara primtalsfaktoriseringarna av a och b (samma primtal kan finnas med flera gånger i vardera lista). Eftersom $\mathrm{SGD}(a, b) = 1$ så har de två produkterna ingen gemensam primtalsfaktor.
   Nu tittar vi på

   $$\mathrm{SGD}(6a, b) = \mathrm{SGD}(2 \cdot 3 \cdot p_1 p_2 \ldots p_k, q_1 q_2 \ldots q_\ell).$$

   Den enda skillnaden nu är om något/några av primtalsfaktorerna i b är lika med 2 eller 3. I så fall blir största gemensamma delaren 2, 3 eller 6.