MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Föreläsare: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Diskret matematik, Matematik I, 4 hp
den 17 april 2024

---

1. (a) Skriv ned tre olika tal som ingår i mängden $\{x \in \mathbb{N} : (\exists y \in \mathbb{N} : x = y^2)\}$. (1p)
   (b) Bestäm vilken rest som fås då 5^{31} delas med 26. (2p)
   (c) Formulera rationella rotsatsen och lista alla rationella tal som enligt satsen skulle kunna vara rötter till polynomet $15x^6 - 100x^4 + 2$. (3p)

2. För ett heltal a, betrakta den diofantiska ekvationen $170x + 289y = a$.
   (a) Bestäm det minsta positiva heltal a som gör att ekvationen har lösningar. (2p)
   (b) Bestäm två olika lösningar till ekvationen $170x + 289y = 17$. (2p)

3. Finn alla reella lösningar till olikheten $\frac{2}{x-2} + \frac{8}{(x-3)^2} \geq 0$. (5p)

4. (a) Kvadratkomplettera uttrycket $z^2 - (6+4i)z + (5+10i)$. (2p)
   (b) Lös ekvationen $z^2 - (6+4i)z + (5+10i) = 0$, för $z \in \mathbb{C}$. (3p)

5. (a) Bestäm ett uttryck för summan $k + 2k + 3k + \cdots + mk$, där m och k är positiva heltal. (2p)
   (b) Bestäm summan av alla tal i tabellen nedan: (3p)

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 20 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 40 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \dots & 60 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 20 & 40 & 60 & 80 & \dots & 400. \end{array}$$

   Varje rad och kolonn i tabellen utgör en aritmetisk talföljd.

6. *I denna fråga ska samtliga svar anges som heltal eller produkter av heltal. Inget svar är större än 1500. Alla svar ska motiveras.*

   Vi har sju personer. Tre av dessa ska få en rolig hatt. Fyra av dessa ska få en rolig halsduk. Samma person kan få både hatt och halsduk och det är ingen skillnad på hattarna, och ingen skillnad på halsdukarna.

   (a) På hur många sätt kan de tre personerna med rolig hatt utses? (1p)
   (b) På hur många sätt kan både hattar och halsdukar fördelas? (1p)
   (c) Om exakt två personer ska få både hatt och halsduk när accessoarerna fördelas, på hur många sätt kan då alla hattar och halsdukar fördelas? (3p)