

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E.

1. Lös följande problem.

(a) Ge exempel på två sammansatta tal a och b så att $\text{SGD}(a, b) = 1$. (1p)

(b) Formulera Fermat's lilla sats. (2p)

(c) Beräkna resten då 4^{63} delas med 31. (2p)

2. Polynomet $2x^3 - 3x^2 - 6x + a$ har $x = \frac{3}{2}$ som nollställe. Finn talet a samt polynomets övriga nollställen. (5p)

3. Lös ekvationen $|x^2 - 1| + |x - 1| = x + 1$ för $x \in \mathbb{R}$. (5p)

4. Bestäm för vilka $z \in \mathbb{C}$ vi har att $\frac{1}{z} + \bar{z}$ är ett reellt tal. (5p)

5. Bokstäverna P, E, N, N, A, N kan man sätta samman och bilda kombinationer med 6 bokstäver (ord). Hur många ord

(a) kan skapas totalt? (1p)

(b) uppfyller att P står direkt till vänster om E? (2p)

(c) uppfyller att P står först eller N står sist (eller båda)? (2p)

Svaren ska anges med heltal. Inget svar överstiger 300.

6. Visa med hjälp av induktion att (5p)

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1 \quad (*)$$

gäller för alla heltal $n \geq 1$. Ange tydligt basfall samt induktionsantagande.

Lycka till!