MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Diskret matematik, Matematik I, 4 hp
den 13 augusti 2024

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E.

1. Lös följande problem.

   (a) Ge exempel på två sammansatta tal a och b så att $\mathrm{SGD}(a, b) = 1$. (1p)

   (b) Formulera Fermat's lilla sats. (2p)

   (c) Beräkna resten då 4^{63} delas med 31. (2p)

   Lösning. (a) Man kan ta t.ex $a = 4$ och $b = 9$.

   (b) Om p är ett primtal och a är ett heltal så att a ej delas av p, då gäller $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

   (c) Eftersom 31 är ett primtal, gäller enl. Fermat's lilla sats att

   $$4^{63} = 4^3(4^{30})^2 \equiv_{31} 4^3 \cdot 1^2 = 64 \equiv_{31} 2.$$

   Alternativt, $4^{60} = 2^{120} = (2^5)^{24} = (32)^{24} \equiv_{31} 1^{24} = 1$, där $\equiv_{31}$ indikerar att talen ger samma rest modulo 31.

2. Polynomet $2x^3 - 3x^2 - 6x + a$ har $x = \frac{3}{2}$ som nollställe. Finn talet a samt polynomets övriga nollställen. (5p)

   Lösning. Vi sätter in $x = \frac{3}{2}$ i polynomet. Detta ger

   $$2 \cdot \frac{3^3}{2^3} - 3 \cdot \frac{3^2}{2^2} - 6 \cdot \frac{3}{2} + a = \frac{27}{4} - \frac{27}{4} - 9 + a = a - 9.$$

   Eftersom 3/2 ska vara vara ett nollställe måste $a = 9$. Polynomet är alltså

   $$2x^3 - 3x^2 - 6x + 9,$$

   och det innehåller $2x - 3$ som faktor. Polynomdivision med detta ger kvoten $x^2 - 3$ så de två sista rötterna är $\pm\sqrt{3}$.

3. Lös ekvationen $|x^2 - 1| + |x - 1| = x + 1$ för $x \in \mathbb{R}$. (5p)

   Lösning. Uttrycken inom absolutbeloppen byter tecken vid $x = -1$ och $x = 1$, respektive. Vi delar upp i tre fall.

   - Fall $x < -1$: Här blir ekvationen

     $$(x^2 - 1) - (x - 1) = x + 1 \iff x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

     Ingen av lösningarna uppfyller $x < -1$.

Lycka till!

- Fall $-1 \leq x < 1$: Här blir ekvationen

  $$-(x^2-1)-(x-1) = x+1 \iff x^2+2x-1=0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

  Enbart $x = \sqrt{2}-1$ ligger inom intervallet.
- Fall $1 \leq x$: Här blir ekvationen

  $$(x^2-1)+(x-1) = x+1 \iff x^2-3=0 \iff x = \pm\sqrt{3}.$$

  Bara $\sqrt{3}$ är lösning inom intervallet.

Ekvationen har lösningarna $x = \sqrt{3}$ samt $x = \sqrt{2}-1$.

4. Bestäm för vilka $z \in \mathbb{C}$ vi har att $\dfrac{1}{z} + \overline{z}$ är ett reellt tal. (5p)

   Lösning. Vi bryter ut $\overline{z}$ och får att

   $$\frac{1}{z} + \overline{z} = \overline{z}\left(\frac{1}{z \cdot \overline{z}} + 1\right) = \overline{z}(|z|^{-2}+1),$$

   då $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. Eftersom $|z|^{-2}+1$ är reellt, räcker det att $\overline{z}$ ska vara reellt. Detta sker bara om talet z själv är reellt (och nollskilt).

5. Bokstäverna `P`, `E`, `N`, `N`, `A`, `N` kan man sätta samman och bilda kombinationer med 6 bokstäver (ord). Hur många ord

   (a) kan skapas totalt? (1p)

   (b) uppfyller att `P` står direkt till vänster om `E`? (2p)

   (c) uppfyller att `P` står först eller `N` står sist (eller båda)? (2p)

   Svaren ska anges med heltal. Inget svar överstiger 300.

   Lösning. (a) Ordet innehåller 6 bokstäver, men vi har att `NNN` är tre lika bokstäver så totala antalet ord är $\frac{6!}{3!} = 6!/6 = 5! = 120$.

   (b) Vi betraktar `PE` som om det vore en bokstav som kan placeras ut. Detta ger $\frac{5!}{3!} = 20$ olika sådana ord.

   (c) Antal ord där `P` står först är $5!/3! = 20$, då vi måste bilda ord genom att kasta om `ENNAN`. Liknande, antal ord där `N` står sist är $5!/2! = 60$, då vi måste bilda ord genom att kasta om `PENNA`. Slutligen, antal ord där `P` står först och `N` står sist fås genom omkastning av `ENNA`, vilket ger $4!/2! = 12$ ord. Inklusion-exklusion ger nu att totala antalet ord vi söker är

   $$20 + 60 - 12 = 68$$

   då vi bland de $20 + 60$ orden med antingen `P` först eller `N` sist, dubbelräknar de 12 ord som uppfyller båda kraven.

6. Visa med hjälp av induktion att (5p)

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1 \tag{$*$}$$

gäller för alla heltal $n \geq 1$. Ange tydligt basfall samt induktionsantagande.

Lösning. Vi har basfallet $n = 1$. Vänsterledet och högerledet är båda 1 i $(*)$.

Vi antar nu att formeln ovan gäller för ett fixt värde på $n \geq 1$. Vi vill nu visa att nästföljande fall också gäller, dvs.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^{k-1} = (n) \cdot 2^{n+1} + 1. \tag{1}$$

Vi har nu att

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^{k-1} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}\right)}_{\text{byts ut enl. antagande}} + (n+1) \cdot 2^n = (n+1) \cdot 2^n + 1 + (n-1) \cdot 2^n.$$

Högerledet kan skrivas om,

$$(n+1)\cdot 2^n + 1 + (n-1)\cdot 2^n = ((n+1)+(n-1))\cdot 2^n + 1 = 2n\cdot 2^n + 1 = n\cdot 2^{n+1} + 1,$$

så vi har nu visat (1). Basfallet samt induktionsprincipen ger nu att den slutna formeln för summan gäller för alla $n \geq 1$.