MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Diskret matematik, Matematik I, 4 hp
2024-10-25

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E.

1. (a) Ge exempel på tre olika primtal p_1, p_2, p_3 så att $p_1 + p_2 + p_3$ också är ett primtal. (2p)

   (b) Bestäm $\Big(\{1,2,3,7,8\} \cap \{2,3,4,9\}\Big) \cup \{2,10,11\}$. (2p)

   (c) Låt $z = 1 + i \in \mathbb{C}$ och beräkna summan $\displaystyle\sum_{k=0}^{16} \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^k$. (2p)

   Lösning. (a) Man kan ta till exempel $3 + 5 + 11 = 19$.

   (b) Det blir $\{2, 3, 10, 11\}$.

   (c) Formeln för geometrisk summa ger oss att summan är $\frac{(z/\sqrt{2})^{17}-1}{z/\sqrt{2}-1}$. Om $z = 1 + i$ så är $z/\sqrt{2} = e^{i\pi/4}$. Alltså är summan

   $$\frac{(e^{i\pi/4})^{17} - 1}{e^{i\pi/4} - 1} = \frac{e^{i\pi/4}(e^{i\pi/4})^{16} - 1}{e^{i\pi/4} - 1}.$$

   Eftersom $(e^{i\pi/4})^{16} = 1$, så är täljare och nämnare lika, så summans värde är 1.

2. Ekvationen $8x^5 - 12x^4 + 6x^3 - 9x^2 - 2x + 3 = 0$ har den komplexa roten $x = i$. Finn övriga rötter. (6p)

   Lösning. Om $x = i$ är en rot, så är även dess komplexkonjugat $x = -i$ en rot (eftersom koefficienterna i polynomet är reella). Därmed har vi rötterna $x = i$ och $x = -i$.

   Nu dividerar vi polynomet med $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$. Polynomdivisionen ger att

   $$8x^5 - 12x^4 + 6x^3 - 9x^2 - 2x + 3 = (x^2 + 1)(8x^3 - 12x^2 - 2x + 3).$$

   Vi löser nu ekvationen $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$. Vi testar rationella rötter och finner att $x = \frac{1}{2}$ är en rot. Genom polynomdivision får vi att de resterande lösningarna är $x = \frac{3}{2}$ och $x = -\frac{1}{2}$. Sammanfattningsvis har vi följande lösningar:

   $$x_1 = i, \quad x_2 = -i, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{3}{2}, \quad x_4 = -\frac{1}{2}.$$

3. Lös olikheten (6p)

   $$\frac{(x^2 - 9) \cdot \sqrt{5 - x}}{(x + 1) \cdot \sqrt{x^2 - 4}} \geq 0 \text{ där } x \in \mathbb{R}.$$

   Glöm inte att ta hänsyn till för vilka x som olikheten är definierad.

Lycka till!

Lösning. Vänsterledet är definierat om $x < -2$, $x \neq -1$ och om $2 < x \leq 5$, för att undvika division med noll och negativa uttryck under rötterna.

För att olikheten ska vara sann, räcker det att

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x+1} \geq 0.$$

Teckentabell ger nu att ovanstående olikhet gäller om

$$-3 \leq x < -1 \text{ och } 3 \leq x.$$

Den ursprungliga olikheten löses då av de $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller

$$-3 \leq x < -2 \text{ eller } 3 \leq x \leq 5,$$

eftersom vi bara tar med lösningarna där olikheten är definierad.

4. Du ska avgöra om den Diofantiska ekvationen $(3^{300} - 5^{60})\, x + 7y = 12$ har lösningar. Gör detta genom att först skriva ned villkoret på $a, b, c \in \mathbb{Z}$ som måste gälla för att den Diofantiska ekvationen $ax + by = c$ ska ha lösningar, och därefter avgöra om 7 delar $3^{300} - 5^{60}$. (6p)

   Lösning. Den Diofantiska ekvationen $ax + by = c$ heltalslösningar precis då $\mathrm{SGD}(a, b) \mid c$.

   Vi har att

   $$3^{300} - 5^{60} \equiv_7 (3^2)^{150} - (5^2)^{30} \equiv_7 2^{150} - 4^{30} \equiv_7 (2^3)^{50} - (4^3)^{10} \equiv_7 1^{50} - 1^{10} = 0.$$

   Alltså gäller $\mathrm{SGD}(3^{300} - 5^{60}, 7) = 7$, och eftersom 12 ej är delbart med 7, så saknar ekvationen lösningar.

5. I spelet BrawlStars™ finns de åtta spelarkaraktärerna nedan: (6p)

   `Leon`, `Draco`, `Crow`, `Spike`, `Kit`, `Kenji`, `Chester`, `Surge`.

   En *match* består av två lag (hemma och borta) med tre karaktärer i varje lag. Samma karaktär kan inte förekomma mer än en gång per lag, *men samma karaktär får förekomma i båda lagen.*

   Exempel: **Hemma:** Leon, Draco, Crow **Borta:** Leon, Spike, Kit.

   (a) På hur många sätt kan man skapa ett hemmalag från karaktärerna ovan?

   (b) På hur många sätt kan de två lagen konstrueras om hemmalaget har Spike, och bortalaget har Leon?

(c) På hur många sätt kan man konstruera ett hemmalag och ett bortalag, så att Leon inte möter Spike?

Svaren ska anges där eventuella binomialkoefficienter har beräknats, men produkter, skillnader och summor får lämnas utan att förenklas.

Lösning. (a) Eftersom vi har 8 karaktärer att välja bland, har vi

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

olika sådana lag.

(b) Hemmalaget har Spike, så två till karaktärer ska väljas. Detta kan göras på $\binom{7}{2} = 21$ sätt. Liknande resonemang gäller för bortalaget, så svaret är 21^2 enligt multiplikationsprincipen.

(c) Vi beräknar det totala antalet möjliga matchkonfigurationer utan villkoren. Att utse de två lagen kan göras på 56^2 sätt enligt (a).

Nästa steg är att beräkna antalet konfigurationer där Leon *möter* Spike (dvs. Leon är i ett lag och Spike är i det andra). Det finns tre fall:

Fall 1: Leon i hemmalaget, Spike i bortalaget. Detta kan göras på 21^2 sätt.

Fall 2: Leon i bortalaget, Spike i hemmalaget. Som tidigare, göras detta ske på 21^2 sätt.

Fall 3: Båda lag har både Spike och Leon. Varje lag behöver välja var sin karaktär till bland de 6 som finns kvar: 6^2 sätt.

Notera att Fall 3 förekommer både som specialfall för Fall 1 och Fall 2, så Fall 3 dubbelräknas om vi subtraherar Fall 1 och Fall 2.

Enligt inklusion-exklusionsprincipen får vi då totalt $56^2 - 2 \cdot 21^2 + 6^2 = 2290$.