MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
10 februari 2024

---

1. Vi utför Gausseliminering på den utökade koefficientmatrisen:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -2 & -4 & 52 \\ 4 & -2 & -4 & 32 \\ -5 & 5 & 10 & 20 \end{array}\right) \sim \quad \cdots \quad \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

   Därmed kan vi ta $z = t$ som fri variabel och läsa av att den allmänna lösningen ges av

$$(x, y, z) = (20, 24 - 2t, t) \text{ för } t \in \mathbb{R}.$$

   Enligt determinantregler har vi att

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ -5 & 5 & 10 \end{vmatrix}.$$

   Matrisen här är koefficientmatrisen för det angivna systemet, som har oändligt många lösningar för det angivna högerledet. Eftersom systemet inte har en entydig lösning så är determinanten 0 enligt utlärd sats.

   Svar: $(x, y, z) = (20, 24 - 2t, t)$ för $t \in \mathbb{R}$, och determinanten är 0.

2. Vi kan via Gausseliminering, eller direkt beräkning, se att

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   De tre riktningsvektorerna är alltså linjärt beroende, så en av dem kan elimineras från ekvationen: ekvationen kan skrivas om som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (r - t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (s + 2t) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

   Då r, s, t varierar fritt bland alla reella tal så gör $r - t$ och $s + 2t$ det också: ekvationen beskriver samma mängd punkter som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

   Eftersom de två riktningsvektorerna här är linjärt oberoende (då ingen av dem är en skalärmultipel av den andra), så är detta ekvationen på parameterform för ett plan.

   Svar: Ett plan.

Var god vänd!

3. $\boxed{\Delta_1:}$ Triangeln har hälften så stor area som parallellogrammen som spänns upp av vektorerna

$$(0,8)-(1,2)=(-1,6) \quad \text{och} \quad (8,2)-(1,2)=(7,0).$$

Enligt kurssats har denna parallellogram area lika med absolutbeloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -42.$$

Alltså är arean av triangeln 21.

$\boxed{\Delta_2:}$ På samma sätt ser vi att triangeln har hälften så stor area som parallellogrammen som spänns upp av vektorerna

$$\vec{u} = (0,3,5)-(3,0,5) = (-3,3,0) \quad \text{och} \quad \vec{v} = (3,3,11)-(3,0,5) = (0,3,6).$$

Enligt kurssats har denna parallellogram area lika med längden av kryssprodukten $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \cdots = 3(-6,-6,3).$$

Alltså är triangelns area

$$\tfrac{1}{2}\,3\sqrt{6^2+6^2+3^2} = 27/2.$$

Svar: $\text{Area}(\Delta_1) = 21$ och $\text{Area}(\Delta_2) = 27/2$.

4. (Rita en bild.) De kortaste vektorna mellan punkter på linjen och planet är precis de som är ortogonala mot planet, och kan därmed hittas genom att projicera på en normalvektor till Π en godtycklig vektor mellan en punkt Q på L och en punkt P_0 på Π. Vi väljer $Q = (0,4,2)$ och $P_0 = (2,2,-4)$, vilket ger

$$\overrightarrow{P_0Q} = (-2,2,6).$$

Som normalvektor till planet tar vi kryssprodukten av de angivna riktningsvektorerna

$$\vec{n} = (2,0,1) \times (0,1,-1) = \cdots = (-1,2,2).$$

Denna vektor har längd $\|\vec{n}\| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$. En vektor från en punkt P på Π till Q som är ortogonal mot $\vec{n}$ ges då av

$$\overrightarrow{PQ} = \text{proj}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{P_0Q} = \frac{(-2,2,6) \bullet (-1,2,2)}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \tfrac{18}{9}\vec{n} = 2(-1,2,2).$$

Det eftersökta avståndet är precis längden på denna vektor, dvs $2 \cdot 3 = 6$.

Svar: Avståndet är 6.

5. Direkt beräkning av skalärprodukter via koordinater ger att

$$\overrightarrow{f_1} \bullet \overrightarrow{f_1} = (\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}) \bullet (\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}) = 1 = \overrightarrow{f_2} \bullet \overrightarrow{f_2}$$

och att $\overrightarrow{f_1} \bullet \overrightarrow{f_2} = (\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}) \bullet (-\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}) = 0$. Därmed utgör $\mathcal{F}$ en ON-bas.

Matrisen för T relativt denna bas kan hittas på flera sätt, t.ex. via satsen om basbyte, eller via direkt beräkning. Vi använder direkt beräkning: vi behöver skriva vektorerna $T(\overrightarrow{f_1})$ och $T(\overrightarrow{f_2})$ i basen $\mathcal{F}$.

Vi har

$$T(\overrightarrow{f_1}) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I $\mathcal{F}$ är koordinaterna för $T(\overrightarrow{f_1})$ alltså $(0, 0)$.

Vidare är

$$T(\overrightarrow{f_2}) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \overrightarrow{f_2}.$$

I $\mathcal{F}$ är koordinaterna för $T(\overrightarrow{f_2})$ alltså $(0, 1)$.

Alltså är matrisen för T relativt basen $\mathcal{F}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan känna igen detta som en matris för en projektion på linjen genom origo med riktningsvektor $\overrightarrow{f_2}$.

Svar: ON-bas: se början; matrisen: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; tolkning: projektion på linjen genom origo med riktningsvektor $\overrightarrow{f_2}$.

6. (a) Avbildningen T kallas linjär om den uppfyller att
   - $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ för alla $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, och
   - $T(\lambda \vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$ för alla $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ och $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Alternativt kan dessa skrivas ihop på olika sätt, t.ex.: om

   $$T(a\vec{u} + b\vec{v}) = aT(\vec{u}) + bT(\vec{v}) \text{ för alla } \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ och } a, b \in \mathbb{R}.$$

   (b) Skriv $T(1, 0) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ och $T(0, 1) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Vi påstår att

   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

uppfyller att $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ för alla $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. För att se detta använder vi att $(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$ och att T är linjär:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T\left(x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x_1 T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Per definitionen av matrismultiplikation är detta lika med

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ var en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^2$ så är

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{för alla } \vec{x} \in \mathbb{R}^2,$$

vilket var det vi ville visa.