MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Föreläsare: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
den 24 maj 2024

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E. Eventuella bonuspoängen räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara angivna i standardbasen om inget annat anges.

1. För ett reellt tal a, betrakta ekvationssystemet (5p)

$$\begin{cases} x + 3y + 4z &= a \\ \quad\;\; y + 2z &= 2 \\ 2x + 3y + 2z &= a. \end{cases}$$

Avgör för vilket a systemet är lösbart och beskriv lösningarna både algebraiskt och geometriskt[1] i detta fall.

Lösning. Ekvationssystemet på matrisform blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6-a \end{array}\right).$$

Vi ser därmed att om $6 - a \neq 0$ så saknas lösningar. Om $a = 6$, så får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vi ser alltså att om $a = 6$, har vi parameterlösningen $x = 2t$, $y = 2 - 2t$, $z = t$, där $t \in \mathbb{R}$; dvs

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Detta beskriver en linje i rummet som går genom punkten $(0, 2, 0)$ och som har riktningsvektor $(2, -2, 1)$. För $a \neq 6$ saknar systemet lösning.

[1] Punkt, linje eller plan?

2. Låt A vara matrisen $\begin{pmatrix} 40 & 30 & 10 \\ 30 & 20 & 20 \\ 20 & 10 & 0 \end{pmatrix}$. Ge välmotiverade svar på frågorna nedan. (5p)

(a) Vad är determinanten av A?

(b) Är matrisen A inverterbar?

(c) Finns det mer än en vektor $\mathbf{v}$ så att $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$?

(d) Formulera en sats om allmänna kvadratiska matriser B som ger sambandet mellan determinanten av B, inverterbarhet hos B och lösningar till $B\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Lösning. (a) Vi börjar med att bryta ut faktorn 10 ur varje rad:

$$\begin{vmatrix} 40 & 30 & 10 \\ 30 & 20 & 20 \\ 20 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 10^3 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Utveckling längs med sista kolonnen ger därefter att determinanten blir

$$10^3 \left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = 10^3(-1 - 2 \cdot (-2)) = 3000.$$

Determinanten av matrisen är därmed 3000.

(b) Ja, A är inverterbar eftersom dess determinant är nollskild.

(c) Nej, vi vet enligt sats att ekvationssystemet $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ har unik lösning om $\det(A) \neq 0$. Alltså finns det bara en lösning, nämligen nollvektorn.

(d) Satsen kan formuleras som följande: *Låt B vara en kvadratisk matris. Då är följande påståenden ekvivalenta:*

- $\det(B) \neq 0$
- *Matrisen B är inverterbar*
- $B\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *har unik lösning.*

3. (a) Beräkna skalärprodukten $(1, 2, 3) \cdot (1, 0, 1)$. (1p)

(b) Bestäm arean av den parallellogram som spänns upp av vektorerna $(1, 2, 3)$ och $(1, 0, 1)$. (2p)

(c) Om $\|\mathbf{w}\|^2 = 9$, $\|\mathbf{u}\|^2 = 4$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 4$, bestäm $(2\mathbf{u} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{u})$. (2p)

Notera att $\|\mathbf{v}\|$ betecknar längden av $\mathbf{v}$.

Lösning. (a) Vi har att $(1, 2, 3) \cdot (1, 0, 1) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 4$ (antingen per definition, eller tack vare att standardbasen är en ON-bas om man använder den geometriska definitionen av skalärprodukt).

(b) Enligt utlärd sats ges arean av parallellogramet av längden av kryssprodukten av vektorerna:

$$(1, 2, 3) \times (1, 0, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 = (2, 2, -2).$$

Denna vektor har längd $\sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$, som då även är arean som sökes.

(c) Vi har enligt räknelagar för skalärprodukt (och information i uppgiften) att

$$\begin{aligned}(2\mathbf{u} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{u}) &= 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - 2\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 \\ &= 4 - 2 \cdot 4 + 9 = 5.\end{aligned}$$

4. Låt linjen L i $\mathbb{R}^3$ ges av $(x, y, z) = (4, 7, 4) + t(1, 2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Finn de två punkterna på L vars avstånd till origo är 9. (2p)

(b) Finn det plan som innehåller L och som inte skär z-axeln. Ange planet på normalform. (3p)

Lösning. (a) Vi söker de punkter (x, y, z) på L sådana att

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 9 \iff (4 + t)^2 + (7 + 2t)^2 + (4 + t)^2 = 9^2.$$

Detta är ekvivalent med $81 + 44t + 6t^2 = 81 \iff 44t + 6t^2 = 0$. Lösningarna ges av $t = 0$ samt $t = -44/6 = -22/3$. Detta ger punkterna

$$(4, 7, 4) \text{ samt } (4, 7, 4) - \frac{22}{3}(1, 2, 1) = \frac{1}{3}(-10, -23, -10).$$

(b) Planet ska innehålla punkten $(4, 7, 4)$ och dess normal måste vara vinkelrät mot $(1, 2, 1)$ samt $(0, 0, 1)$. Normalen kan då fås genom kryssprodukten

$$(1, 2, 1) \times (0, 0, 1) = (2, -1, 0).$$

Planets ekvation på normalform är då $2x - y = D$, där $D = 1$ eftersom planet ska innehålla $(4, 7, 4)$.

5. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som speglar i planet genom origo med normalen $\mathbf{n} = (0, 2, -1)$. (5p)

(a) Bestäm $T(0, 2, -1)$ samt $T(1, 0, 0)$.

(b) Bestäm avbildningsmatrisen för T med avseende på standardbasen.

(c) Bestäm $T(6, 4, -2)$.

Lösning. (a) Då T speglar i planet med normalen $\mathbf{n} = (0, 2, -1)$, så skickas $\mathbf{n}$ på $-\mathbf{n}$. Alltså gäller $T(0, 2, -1) = (0, -2, 1)$. Vidare, eftersom $(1, 0, 0)$ är ortogonal mot $\mathbf{n}$, så ligger $(1, 0, 0)$ i planet. Alltså gäller $T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

(b) Spegling i ett plan med normalen $\mathbf{n}$ ges av följande formel:

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}.$$

Med vektorerna i uppgiften får vi

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (x, y, z) - 2\frac{(x, y, z) \cdot (0, 2, -1)}{5}(0, 2, -1) \\ &= \frac{1}{5}(5x, 5y, 5z) - \frac{1}{5}(4y - 2z)(0, 2, -1) \\ &= \frac{1}{5}\left(5x, -3y + 4z, 4y + 3z\right). \end{aligned}$$

Speciellt,

$$T(1, 0, 0) = \frac{1}{5}(5, 0, 0), \quad T(0, 1, 0) = \frac{1}{5}(0, -3, 4), \quad T(0, 0, 1) = \frac{1}{5}(0, 4, 3).$$

Avbildningsmatrisen blir då

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) I enlighet med del (b) har vi

$$T(6, 4, -2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

vilket ger $T(6, 4, -2) = (6, -4, 2)$. Alternativt kan vi använda del (a) och linjäritet:

$$T(6, 4, -2) = T(6, 0, 0) + T(0, 4, -2) = 6T(1, 0, 0) + 2T(0, 2, -1) = (6, -4, 2).$$

6. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning. (5p)

(a) Definiera begreppet *linjär avbildning.*

(b) Visa utifrån definitionen att den nya avbildningen $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}) + T(T(\mathbf{v}))$ också är en linjär avbildning.

(c) Ge exempel på en linjär avbildning där T är inverterbar, men där motsvarande S inte är inverterbar.

Lösning. (a) En avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är linjär om vi för alla $\lambda \in \mathbb{R}$ samt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ har att

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \text{ och } T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u}).$$

(b) Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Vi har att

$$\begin{aligned} S(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + T(T(\mathbf{u} + \mathbf{v})) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) + T(T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) + T(T(\mathbf{u})) + T(T(\mathbf{v})) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(T(\mathbf{u})) + T(\mathbf{v}) + T(T(\mathbf{v})) \\ &= S(\mathbf{u}) + S(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Vidare, för $\lambda \in \mathbb{R}$ har vi

$$\begin{aligned} S(\lambda\mathbf{u}) &= T(\lambda\mathbf{u}) + T(T(\lambda\mathbf{u})) \\ &= \lambda T(\mathbf{u}) + T(\lambda T(\mathbf{u})) \\ &= \lambda T(\mathbf{u}) + \lambda T(T(\mathbf{u})) \\ &= \lambda\big(T(\mathbf{u}) + T(T(\mathbf{u}))\big) \\ &= \lambda S(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

(c) Om A är matrisen för T relativt standardbasen, så ges matrisen för S av $A + A^2 = A(I + A)$. Vi vet att A har invers, så vi måste välja A så att $I + A$ saknar invers. Till exempel kan vi ta avbildningen $A = -I$. Detta motsvarar att

$$T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v} \text{ vilket ger att } S(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

för alla $\mathbf{v}$. Avbildningen T har då invers, men S saknar invers.