Lösningsskiss tenta 2023-12-02, Analys del 1

1. (a) Förlänger vi med konjugatuttrycket får vi

$$\sqrt{n^4+an^2}-n^2 = \frac{(n^2+an^2)-n^4}{\sqrt{n^4+an^2}+n^2} = \frac{a}{\sqrt{1+a/n^2}+1} \to \frac{a}{2}$$

då $n \to \infty$.

(b) Vi får, med en substitution och standardgränsvärdet för e, att

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \left[t=\frac{n-1}{2}\right] = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^2\left(1+\frac{1}{t}\right) = e^2\cdot 1 = e^2.$$

2. Derivatans definition ger direkt att

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2+1}-\frac{1}{x^2+1}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+1)-((x+h)^2+1)}{h(x^2+1)((x+h)^2+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x^2+1)((x+h)^2+1)} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

3. (a) Med partialintegrering får vi $\int x^3\ln(x)\,dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}\,dx$
$= \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{x^4}{16} + C = \frac{x^4}{16}(4\ln(x)-1)+C.$

(b) Vi bestämmer först den primitiva funktionen $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \left[{u=2x \atop du=2dx}\right]$
$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+y^2}\,du = \frac{1}{2}\arctan(u)+C = \frac{1}{2}\arctan(2x)+C$, så vi får

$$\int_{1/2}^{\infty}\frac{1}{1+4x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{1/2}^{N}\frac{1}{1+4x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan(2x)\right]_{1/2}^{N}$$
$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left(\arctan(2N)-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

4. Låt $f(x) = \frac{x^2+x}{1-|x|}$. Vi ser direkt att $D_f = \{x\in\mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$, och eftersom f är kontinuerlig är de enda möjliga vertikala asymptoterna $x=-1$ och $x=1$. Efter polynomdivision får vi

$$f(x) = \begin{cases} -x-2+\frac{2}{1-x} & \text{om } x>0 \text{ och } x\neq 1 \\ x & \text{om } x<0 \text{ och } x\neq -1 \end{cases}$$

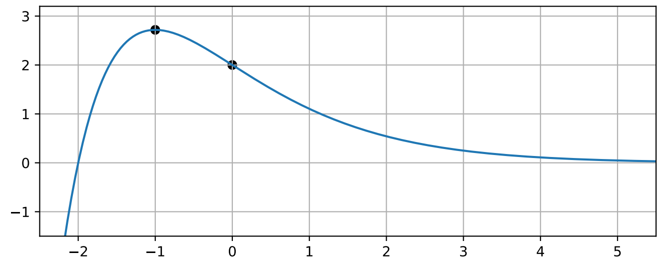
så $\lim_{x\to -1} f(x) = -1$, så $x=-1$ är ingen asymptot, medan $\lim_{x\to 1+} f(x) = -\infty$ så $x=1$ är det. Vidare är $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(-x-2)) = 0$, och $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$, så vi har alltså de tre asymptoterna $x=1$, $y=-x-2$ och $y=x$.

5. Funktionen $f(x) = (x+2)e^{-x}$ är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$. Vi får att $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$ och $f''(x) = xe^{-x}$, så $f'(x) = 0$ bara för $x = -1$. Vidare $f''(x) = 0$ bara för $x = 0$. Vi gör en teckentabell

x		-1		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\frown$	$\frown$		$\smile$

Från denna ser vi att funktionen har lokala maximum i $x = -1$. Grafen är konvex på intervallen $]-\infty, 0]$ och konkav på $[0, \infty]$, så $x = 0$ är en inflektionspunkt.

Vi konstaterar vidare att $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, och att $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, vilket gör att vi kan skissa grafen, från vilken vi kan dra slutsatsen att funktionens värdemängd är $]-\infty, e]$.



6. Låt $f(x) = e^{-3x}$, så $'f(x) = -3e^{-3x}$. Tangenten till $y = f(x)$ i en punkt $(b, f(b))$ har ekvationen $y - f(b) = f'(b)(x - b)$ som blir

$$y - 3^{-3b} = -3e^{-3b}(x - b) \quad \Leftrightarrow \quad y = -3e^{-3b}x + (3b+1)e^{-3b}).$$

Denna tangent är på formen $y = ax$ precis då

$$\begin{cases} -3e^{-3b} = a \\ (3b+1)e^{-3b} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -1/3 \\ a = -3e. \end{cases}$$

så för $a = -3e$ tangerar linjen $y = ax$ grafen $y = f(x)$ i punkten $x = -1/3$.

Anmärkning: Ett alternativt sätt att lösa uppgiften är att bestämma alla tangenter till grafen som passerar origo.