Lösningsskiss tenta 2024-03-13, Analys del 1

1. (a) Förlänger vi med konjugatuttrycket $\sqrt{n+a}+\sqrt{n}$ får vi

$$\left(\sqrt{n+a}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+b}+\sqrt{n}\right)=a\frac{\sqrt{n+b}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}=a\frac{\sqrt{1+b/n}+1}{\sqrt{1+a/n}+1}\to a$$

då $n\to\infty$.

(b) Med standardgränsvärdet för e får vi att

$$x\big(\ln(x+1)-\ln(x)\big)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\to\ln(e)=1$$

då $x\to\infty$.

2. Om $x\neq -1$ och $y\neq 2$ får vi

$$y=f(x)\ \Leftrightarrow\ y=\frac{2x+1}{x+1}\ \Leftrightarrow\ xy+y=2x+1\ \Leftrightarrow\ x(y-2)=1-y\ \Leftrightarrow\ x=\frac{1-y}{y-2}.$$

Funktionen f är därmed inverterbar och $f^{-1}(y)=\frac{1-y}{y-2}$ Vi har alltså att

$$f^{-1}(x)=\frac{1-x}{x-2},$$

och inversen definitionsmängd är alla reella tal utom 2, och värdemängden alla reella tal utom -1.

3. (a) Med partialintegrering får vi $\displaystyle\int xe^{7x}\,dx=x\frac{e^{7x}}{7}-\int\frac{e^{7x}}{7}\,dx=\frac{7x-1}{49}e^{7x}+C.$

(b) Vi börjar med en substitution och forsätter med partialintegrering och får:

$$\int_0^{\pi^2}\sin(\sqrt{x})\,dx=\left[\begin{smallmatrix}u=\sqrt{x},\\ x=u^2\\ dx=2u\,du\end{smallmatrix}\right]=\int_0^{\pi}\sin(u)2u\,du$$

$$=\Big[-\cos(u)2u\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos(u))2\,du=2\pi+\Big[2\sin(u)\Big]_0^{\pi}=2\pi.$$

(c) Vi får $\displaystyle\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx=\left[\begin{smallmatrix}t=e^x\\ dt=e^x\,dt\end{smallmatrix}\right]=\int\frac{1}{1+t^2}\,dt=\arctan(t)+C=\arctan(e^x)+C$ så

$$\int_0^{\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx=\lim_{N\to\infty}\Big(\arctan(e^N)-\arctan(e^0)\Big)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

4. Funktionen $f(x)=2\arctan(|x|)-x$ är definierad och kontinuerlig för alla $x\in\mathbb{R}$, så vertikala asymptoter saknas. Vi får

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2\arctan(|x|)}{x}-1\right)=-1$$

och

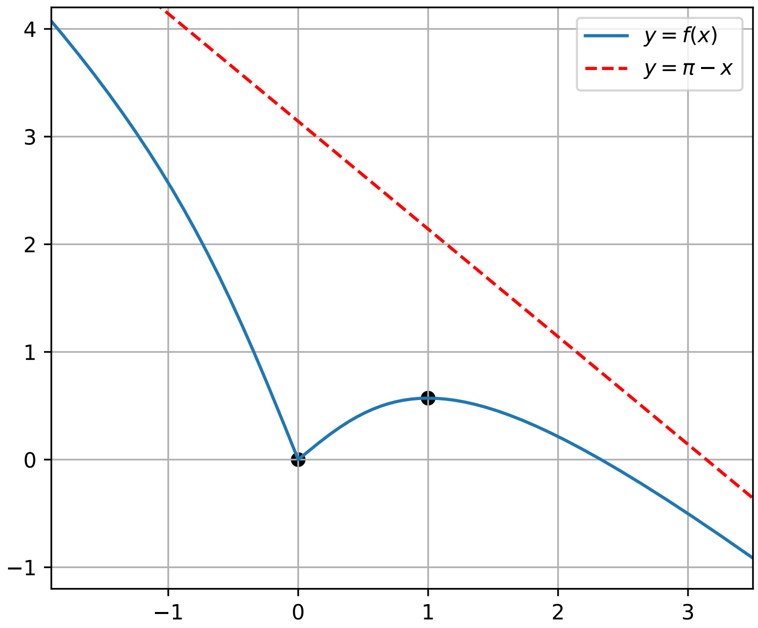
$$m=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}2\arctan(|x|)=\pi$$

så $y=kx+m=\pi-x$ är en tvåsidig sned asymptot.

Vi har $f(x)=\begin{cases}2\arctan(x)-x & ;x\geq 0\\ -2\arctan(x)-x & ;x<0\end{cases}$ så $f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{1+x^2}-1 & ;x>0\\ -\frac{2}{1+x^2}-1 & ;x<0\end{cases}$. Vi ser direkt att $f'(x)<0$ för alla $x<0$, och för $x>0$ är $f'(x)=0$ bara då $x=1$. Efter förenkling får vi att $f''(x)=\frac{-4|x|}{(1+x^2)^2}$ så $f''(x)<0$ för $x\neq 0$. Vi gör en teckentabell:

x		0		1	
$f'(x)$	$-$	$\wr$	$+$	$\wr$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\pi/2-1$	$\searrow$
$f''(x)$	$-$	$\wr$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\frown$		$\frown$	$\frown$	$\frown$

Från denna ser vi att funktionen har ett lokalt minimum för $x = 0$, och och ett lokalt maximum för $x = 1$. Grafen är konkav på intervallen $]-\infty, 0]$ och $[0, \infty[$. Slutligen skissar vi grafen:



5. (a) Vi får

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} xe^{-1/x} = \Big[t = 1/x\Big] = \lim_{t\to\infty} = \frac{1}{te^t} = 0,$$

men

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-} xe^{-1/x} = \Big[t = -1/x\Big] = \lim_{t\to\infty} -\frac{e^t}{t} = -\infty,$$

så $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existerar inte. Därmed kan vi inte få funktionen kontinuerlig, oavsett värde på a.

(b) Med derivatans definition får vi för varje $x \in \mathbb{R}$ att

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = [f \text{ jämn}] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \\ &= \Big[k = -h\Big] = \lim_{k\to 0} -\frac{f(x+k) - f(x)}{k} = -f'(x), \end{aligned}$$

vilket visar att $f'(x)$ är en udda funktion.