Lösningsskiss tenta 2024-04-10, Analys del 1

1. (a) För att $f(x)$ skall vara definierat behöver vi $1+x \geq 0$ och $1-x \geq 0$ vilket är ekvivalent med att $-1 \leq x \leq 1$, så $D_f = [-1, 1]$.

   (b) Vi får
$$f(-x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1-(-x)} = -\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right) = -f(x)$$
   för alla $x \in D_f$, så funktionen är udda.

   (c) Vi har för $-1 < x < 1$ att
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0$$
   så funktionen är växande (inklusive i ändunkterna pga kontinuitet), och därmed monoton.

2. Derivatans definition ger för $x > 0$ att
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{x+h}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h(\sqrt{x+h}+1)(\sqrt{x}+1)} = [\text{förlänger med konjugat}] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(\sqrt{x+h}+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} \\
&= \frac{-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+\sqrt{x})} = \frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}.
\end{aligned}$$

3. (a) Med partialintegrering får vi $\displaystyle\int x^4 \ln|x|\,dx = \frac{x^5}{5}\ln|x| - \int \frac{x^5}{5}\frac{1}{x}\,dx$
$\displaystyle = \frac{x^5}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\frac{x^5}{5} + C = \frac{x^5}{25}(5\ln|x| - 1) + C.$

   (b) Vi får $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\ln(x))^3} = \begin{bmatrix} u=\ln(x) \\ du=\frac{dx}{x} \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u^3} = \frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2(\ln(x))^2} + C$ så
$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln(x))^3} = \lim_{N\to\infty} \int_e^N \frac{dx}{x(\ln(x))^3} = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{-1}{2(\ln(N))^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

4. Funktionen är definierad och kontinuerlig för alla $x \neq -1$, så $x = -1$ är den enda möjliga vertikala asymptoten. Vi har $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2}{|x+1|} = \infty$ vilket visar att $x = -1$ faktiskt är en asymptot.

   För $x > -1$ får vi, med polynomdivision, att $\displaystyle f(x) = \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$, så
$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (x-1)) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0,$$
   så $y = x - 1$ är en asymptot då $x \to \infty$.

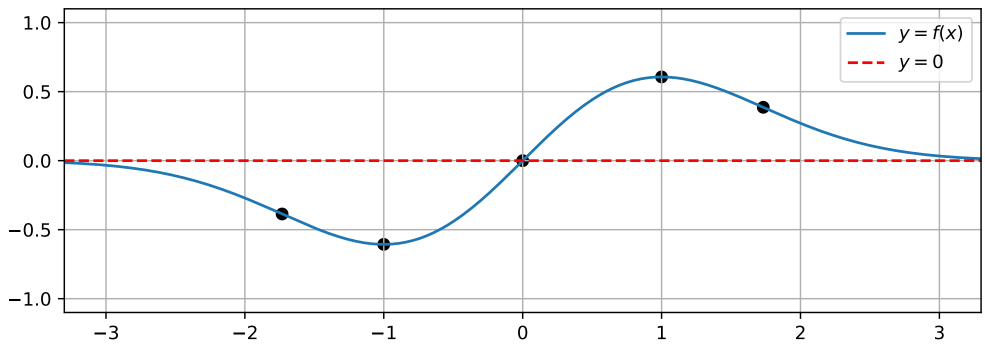
   På samma sätt får vi för $x < -1$ att $\displaystyle f(x) = 1 - x - \frac{1}{x+1}$ så
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (1-x)) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x+1} = 0,$$
   så $y = 1 - x$ är en asymptot då $x \to -\infty$.

5. Vi observerar att funktionen $f(x) = xe^{-x^2/2}$ är udda, samt definierad och kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$. Därmed saknas vertikala asymptoter. Vi har $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x}{e^{x^2/2}}\right) = 0$ så $y = 0$ är en tvåsidig horisontell asymptot.

   Vi får att $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$ så $f'(x) = 0$ för $x = \pm 1$. Vidare får vi efter förenkling att $f''(x) = x(x^2 - 3)e^{-x^2/2}$, så $f''(x) = 0$ för $x = 0$ och för $x = \pm\sqrt{3}$. Vi gör en teckentabell:

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$-1/\sqrt{e}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$1/\sqrt{e}$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	infl.	$\smile$	$\smile$	$\smile$	infl.	$\frown$	$\frown$	$\frown$	infl.	$\smile$

   Från denna ser vi att funktionen har ett flobalt minimum för $x = -1$, och och ett globalt maximum för $x = 1$, så värdemängden är $V_f = [-1/\sqrt{e}, 1/\sqrt{e}]$. Vi har tre inflektionspunkter. Slutligen skissar vi grafen:



6. Låt $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, vilket ger att $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. Tangenten till $y = f(x)$ i en punkt $(a, f(a))$ har ekvationen

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \Leftrightarrow \quad y - \frac{1}{1+a^2} = \frac{-2a}{(1+a^2)^2}(x - a). \tag{1}$$

   Denna tangenter passerar punkten $(x, y) = (0, 1)$ om

$$1 - \frac{1}{1+a^2} = \frac{-2a}{(1+a^2)^2}(0 - a) \Leftrightarrow (1+a^2)^2 - (1+a^2) = 2a^2 \Leftrightarrow a^2(a-1)(a+1) = 0,$$

   så för $a = 0, \pm 1$. Insättning av dessa värden på a i ekvation (1) ger de tre tangenterna $y = 1$, $y = 1 + x/2$ och $y = 1 - x/2$.