Lösningsskiss tenta 2024-08-15, Analys del 1

1. (a) Gränsvärdet är av typen $\frac{0}{0}$ så vi kan faktorisera polynomen och får

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+1}=\frac{4}{3}.$$

   (b) Förlänger vi med konjugatuttrycket då $n\to\infty$ får vi

$$\sqrt{n^4+3n^2+2}-n^2=\frac{3n^2+2}{\sqrt{n^4+3n^2+2}+n^2}=\frac{3+2/n^2}{\sqrt{1+3/n^2+2/n^4}+1}\to\frac{3}{2}.$$

2. Funktionen är definierad på hela $\mathbb{R}$ och vi får $f'(x)=\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}<0$ för alla x så $f(x)$ är avtagande. Vi får vidare att $\lim_{x\to\infty}=3$ och $\lim_{x\to-\infty}=5$, så $V_f=]3,5[$.
Om $3<y<5$ får vi därmed

$$y=f(x)\Leftrightarrow y-3=\frac{2}{1+e^x}\Leftrightarrow 1+e^x=\frac{1}{y-3}\Leftrightarrow e^x=\frac{5-y}{y-3}\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{5-y}{y-3}\right).$$

Funktionen är därmed inverterbar och $f^{-1}(y)=\ln\left(\frac{5-y}{y-3}\right)$ Vi har alltså att

$$f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{5-x}{x-3}\right),$$

och inversen definitionsmängd $D_{f^{-1}}=]3,5[$, och värdemängden $V_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

3. (a) Med upprepad partialintegrering får vi

$$\begin{aligned}I=\int e^{3x}\sin(x)\,dx&=e^{3x}(-\cos(x))-\int 3e^{3x}(-\cos(x))\,dx\\&=-e^{3x}\cos(x)+3e^{3x}\sin(x)-9\int e^{3x}\sin(x)\,dx\\&=e^{3x}(3\sin(x)-\cos(x))-9I+D,\end{aligned}$$

   vilket ger att $I=\dfrac{e^{3x}}{10}(3\sin(x)-\cos(x))+C.$

   (b) Vi får $\displaystyle\int\frac{x^2}{1+x^6}\,dx=\left[\substack{u=x^3\\du=3x^2\,dx}\right]=\frac{1}{3}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{3}\arctan(u)+C$
   $=\dfrac{1}{3}\arctan(x^3)+C$ så

$$\int_0^\infty\frac{x^2}{1+x^6}\,dx=\lim_{N\to\infty}\int_0^N\frac{x^2}{1+x^6}\,dx=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\arctan(N^3)}{3}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

4. Funktionen är definierad och kontinuerlig för alla $x\neq 0,-1$, vilket ger oss två möjliga vertikala asymptoter. Vi har $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$ och $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ vilket visar att $x=-1$ och $x=0$ verkligen är asymptoter. Vi får vidare att

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(\frac{3x^2}{(x+1)^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(\frac{3}{(1+1/x)^2}\right)=\ln(3),$$

så $y=\ln(3)$ är tvåsidig horisontell asymptot.

5. Vi ser att funktionen $f(x) = \arcsin(x) - \sqrt{2} \cdot x$ är udda, samt definierad och kontinuerlig för alla $x \in [-1, 1]$. Vi får att $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{2}$ vilket ger att $f'(x) = 0$ för $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Vidare får vi efter förenkling att $f''(x) = x \cdot (1-x^2)^{-3/2}$, så $f''(x) = 0$ bara för $x = 0$. Vi gör en teckentabell:

x	-1		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		1
$f'(x)$	$\wr$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$\wr$
$f(x)$	$\sqrt{2}-\pi/2$	$\nearrow$	$1-\pi/4$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\pi/4-1$	$\nearrow$	$\pi/2-\sqrt{2}$
$f''(x)$	$\wr$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$\wr$
$f(x)$		$\frown$	$\frown$	$\frown$	infl.	$\smile$	$\smile$	$\smile$	

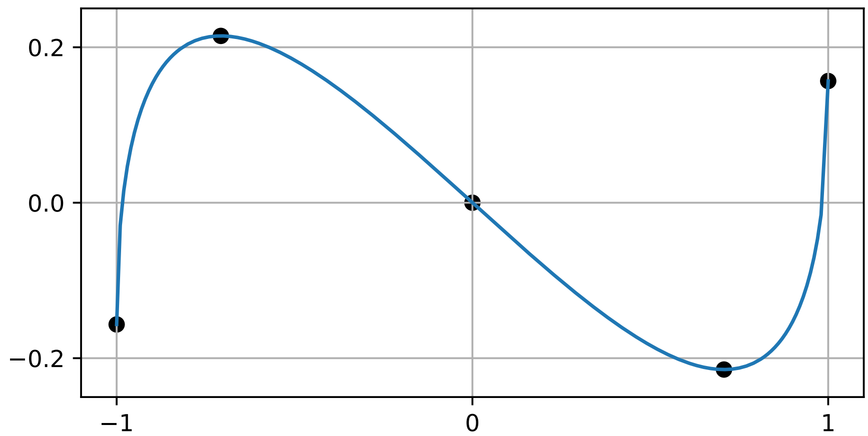
Från denna ser vi att funktionen har lokala maximum för $x = -1/\sqrt{2}$ och $x = 1$. Vi får

$$f(-1/\sqrt{2}) = 1 - \pi/4 \approx 1 - 0.785 = 0.215,$$

och

$$f(1) = \pi/2 - \sqrt{2} \approx 1.57 - 1.41 = 0.16,$$

så vi har globalt maximum $f(-1/\sqrt{2}) = 1 - \pi/4$. På samma sätt får vi att vi har globalt minimum $f(1/\sqrt{2}) = \pi/4 - 1$. Vidare är funktionen konkav på $[-1, 0]$ och konvex på $[0, 1]$, så $x = 0$ är en inflektionspunkt. Vi skissar grafen:



6. Derivatans definition ger att

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h|^3 - 0^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{|h^3|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot |h|}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot |h| = 0. \end{aligned}$$

Eftersom $f(x) = \begin{cases} x^3 & ; x \geq 0, \\ -x^3 & ; x < 0 \end{cases}$ får vi därmed att $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & ; x > 0, \\ 0 & ; x = 0, \\ -3x^2 & ; x < 0 \end{cases}$

vilket man enkelt verifierar kan uttryckas som $f'(x) = 3x \cdot |x|$ för alla $x \in \mathbb{R}$.