

Inga hjälpmedel tillåtna. 15 poäng ger säkert godkänt
Samtliga svar måste motiveras ordentligt!

1. Undersök om de följande gränsvärdena existerar och beräkna dem i så fall med metoderna från kursen (särskilt, utan att använda l'Hospitals regel).

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 2}$ 3 p

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\ln(x+1)}$ 3 p

2. (a) Låt 5 p

$$g(x) = x \ln(x), \quad x > 0.$$

Undersöka funktionens beteende och skissa grafen till g .

Ange speciellt alla lokala extrempunkter samt ett intervall där g är avtagande.

Anmärkning: Din undersökning och skiss ska också visa tydligt vad som händer på randen av definitionsmängden. Konveritetsgenskaper och asymptoter behöver dock ej undersökas!

- (b) Skissa utifrån dina resultat i (a) (utan vidare beräkningar) grafen till funktionen 1 p

$$h(x) = |x| \ln(|x|), \quad x \neq 0.$$

3. Betrakta funktionen

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

- (a) Beräkna funktionens derivata f' . 3 p

- (b) i. Ange den största möjliga definitionsmängden för f .
ii. Är f jämn, udda eller varken eller? Motivering krävs.
iii. Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
iv. Skissa grafen till f . 3 p

4. (a) Bestäm $\int \frac{\sin(2x)}{\sin^5(x)} dx$. 3 p

- (b) Avgör om den generaliserade integralen $\int_0^{\infty} (x^2 + 3x)e^{-x} dx$ är konvergent eller divergent och bestäm i så fall dess värde. 3 p

5. (a) Visa utifrån derivatans definition: Om en funktion f är deriverbar, så är även funktionen $g(x) = (f(x))^2$ deriverbar och $g'(x) = 2f(x)f'(x)$. 3 p

- (b) Ange för vart och ett av de följande påståendena om det är sant eller ej. 3 p
Endast motiverade svar kan ge poäng!

- i. För varje lokal extrempunkt $x = a$ av en funktion h gäller att $h'(a) = 0$.
ii. Om h har en primitiv funktion H som är icke-negative, dvs $H(x) \geq 0$ för alla x i definitionsointervallet, så är h växande.

Lycka till!