MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Diskret matematik, Matematik I, 4 hp
20 oktober 2023

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30.

1. Bestäm samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen (5p)

$$221x + 391y = 51.$$

2. Lös olikheten (5p)

$$\frac{1}{4x+5} < \frac{1}{(x+1)(x+3)}.$$

3. Bestäm samtliga lösningar $z \in \mathbb{C}$ till ekvationen (5p)

$$(z - (1+i))^4 = 16$$

och bestäm hur många av lösningarna som uppfyller att $\mathrm{Re}(z) < 0$.

4. Polynomet $p(z) = z^4 - 2z^3 + 9z^2 - 8z + 20$ har $z = 2i$ som en rot. Bestäm polynomets samtliga rötter i $\mathbb{C}$. (5p)

5. En standardkortlek består av 52 kort i fyra olika ”färger”, med 13 valörer per färg. En pokerhand består av fem olika kort.

   (a) Bestäm antalet pokerhänder. Ditt svar får endast innehålla heltal och de fyra vanliga räknesätten. (2p)

   (b) Bestäm antalet pokerhänder som innehåller tre kort av en valör och två kort av en annan valör. Ditt svar ska ges som ett uttryckligt heltal. T.ex. är $\boxed{8\clubsuit}\boxed{8\heartsuit}\boxed{8\spadesuit}\boxed{4\clubsuit}\boxed{4\diamondsuit}$ en sådan hand, som består av tre kort med valören 8 och två kort med valören 4. (3p)

6. (a) För $d, n \in \mathbb{Z}$, ange definitionen av att $d \mid n$. (2p)

   (b) Bevisa att det för varje heltal n gäller att $4 \mid n^2$ eller $4 \mid (n^2 - 1)$. (3p)